ИНФОРМАЦИЯ О ШЕСТОМ СОВЕЩАНИИ ЛИТОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

27-го и 28-го марта 1965 года в Вильнюсе происходило Шестое республиканское совещание Литовского математического общества, посвященное 25-летию Литовской ССР. Совещание было организовано Институтом физики и математики Академии наук Литовской ССР, Физико-математическим факультетом Вильнюсского Государственного университета им. В. Капсукаса, Физико-математическим факультетом Вильнюсского Государственного педагогического института и математическими кафедрами Каунасского политехнического института. В совещании участвовали математики республиканских научных учреждений, учебных заведений, учителя школ.

На совещании были заслушаны отчет Правления Литовского математического общества, который сделал председатель Правления проф. И. Кубилюс, и совместный доклад проф. П. Катилюса и доц. В. Статулявичуса о работах литовских математиков.

Во время совещания работали 4 секции: геометрии и теории функций, вычислительной математики и математической логики, теории вероятностей и теории чисел, элементарной математики и методики преподавания математики. Было прочитано 36 докладов и сообщений. На заключительном пленарном заседании было избрано новое Правление Общества, в состав которого вошли: З. Жемайтис, П. Катилюс, И. Кубилюс, В. Лютикас, В. Матулис, А. Нафталявичус, В. Статулявичус. Председателем Правления вновь избран И. Кубилюс, его заместителем В. Лютикас, ученым секретарем — В. Статулявичус.

Ниже приводится программа совещаний и резюме докладов, прочитанных на заседаниях.

ПЛЕНАРНЫЕ ЗАСЕДАНИЯ

Суббота, 27 марта

1. Открытие совещания.
2. П. Катилюс, В. Статулявичус. Работы математиков Советской Литвы*.
3. И. Кубилюс. Отчет Правления Литовского математического общества.
4. В. Паулаускас. Отчет ревизионной комиссии Литовского математического общества.

Воскресенье, 28 марта

1. Дискуссии.
2. Выборы Правления Литовского математического общества
3. Закрытие совещания.

Секция геометрии и теории функций

Руководитель — доц. В. Близникас

Суббота, 27 марта

1. Д. Петрушкевичюте. Геодезические кривые однородных пространств.
2. В. Близникас. К вопросу кратности составного многообразия.
3. В. Близникас. Симметрические свойства центральных копункторов.

---

* Опубликовано в предыдущем номере «Литовского математического сборника». (В результате корректурной ошибки соавтор П. Катилюс не указан.)

4. З. Жемайтис. Некоторое расширение области абсолютной геометрии.
5. С. Мазиляускайте. К вопросу о геометрии пространства центральных пункторов.
6. А. Ионушаускас. О существовании инвариантных финслеровых метрик в специальных однородных пространствах.

Воскресенье, 28 марта

1. В. Кабайла. Обобщение автоморфных функций.
2. А. Нафталевич. Обобщение одной из теорем Эрмита.
3. Ш. Стрелиц. Доказательства существования собственных значений.
4. Ю. Киселюс. Свойства решений одного класса дифференциальных уравнений.
5. Е. Кирьяцкий. Свойства функций с n-ой ненулевой разделенной разностью.
6. К. Гармус. Обобщение функций ограниченной вариации в двухмерном пространстве.

Секция вычислительной математики и математической логики

Руководитель — канд. физ.-мат. наук В. Матулис

Суббота, 27 марта

1. И. Уждавинис. Сходимость методов коллокационного типа.
2. А. Ненортене. Оценка области сходимости решения нелинейных дифференциальных уравнений.
3. М. Сапаговас. Решение квазилинейных дифференциальных уравнений эллиптического типа методом конечных разностей.
4. М. Сапаговас. Об оценке нормы одной матрицы.
5. Л. Ступялис. О неустойчивости решений уравнений смешанного типа.
6. В. Кведарас. Исследование краевых задач с переопределенными краевыми условиями.

Воскресенье, 28 марта

1. В. Матулис. К вопросу о методе Q Ван Хао.
2. Р. Плюшкявичус. Об одном конструктивном варианте С. Кангера и некоторых его модификациях.
3. Р. Плюшкявичус. Два фрагмента конструктивного исчисления предикатов с равенством.
4. Р. Ясюленис. Приближенное решение задач линейного программирования.
5. В. Будрейка. Последовательный метод для конечных игр трех лиц.

Секция теории вероятностей и теории чисел

Руководитель — канд. физ.-мат. наук Б. Ряуба

Суббота, 27 марта

1. И. Кубилюс, Р. Уждавинис, З. Юшкис. Новые результаты вероятностной теории чисел.
2. А. Бикялис, А. Аксомайтис, Е. Гечаускас, Н. Калинаускайте, А. Миталаускас, В. Статулявичус, Л. Вилкаускас. Новые результаты для независимых случайных величин.
3. П. Сурвила. Рекуррентные значения сумм последовательностей независимых случайных величин и их свойства.

Воскресенье, 28 марта

1. А. Алешкявичене, Г. Алешкявичус, В. Кубилюс, Я. Кучкаров, В. Лютикас, Е. Мисявичус, А. Рауделюнас, Б. Ряуба, В. Статулявичус. Предельные теоремы для зависимых случайных величин.

2. И. Кубилюс, К. Булота, В. Калинка, Ю. Урбялис, Ю. Вайткявичус. Работы в области аналитической теории чисел в Советской Литве.
3. А. Темпельман. Банаховы пространства реализаций случайных стационарных процессов.
4. Э. Вилкас. Критерий минимакса в играх с неполной информацией.

Секция элементарной математики и методики преподавания математики

Руководители — В. Люткас и П. Румшас

Суббота, 27 марта

1. К. Гринцевичус. Некоторые применения комплексных чисел в тригонометрии и геометрии.
2. Т. Диджюлите. Как я, преподавая математику, организую индивидуальную работу с учащимися.
3. А. Лепешкявичус. К вопросу решения типовых арифметических задач

Воскресенье, 28 марта

1. Я. Янулионис. Место математики в жизни и в школе.
2. В. Дрегунас. К вопросу производства и использования наглядных пособий.
3. А. Шилаускас. Графики тригонометрических функций в курсе математики в средней школе.
4. Б. Хмелевский. Математический журнал Гусева «Вестник математических наук».

НЕКОТОРОЕ РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ АБСОЛЮТНОЙ ГЕОМЕТРИИ

З. ЖЕМАЙТИС

В докладе делается ссылка на свойства сопряженных углов, установленные автором в его предыдущей работе [1], общие для гиперболической, эллиптической и параболической геометрий. Выведены новые формулы, также применимые во всех трех геометриях, позволяющие выразить площади круговых вырезков, заключенных между двумя хордами, и их отношения при помощи очень простых алгебраических функций от вершинных углов вырезков и соответствующих им центральных углов; исследуются изменения этих функций при неограниченном удлинении радиуса круга.

1. «Некоторые новые соотношения в гиперболической и эллиптической геометриях». («Труды ВГУ», секция физ.-мат. наук, 1958 г.)

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

К ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПУНКТОРОВ

С. МАЗИЛЯУСКАЙТЕ

Пусть ω^i, ω^i_j и ω^i_{jk} — инвариантные формы аналитической псевдогруппы. Пространство первых интегралов вполне интегрируемой системы

$$\omega^i=0,\quad \Theta^i=0,$$

где

$$\Theta^i=du^i+u^k\,\omega^i_k-\frac{1}{n+1}\,u^i\,u^k\,\omega^l_{lk},$$

является пространством представления аналитической псевдогруппы и называется пространством центральных пунктоов. При помощи поля дифференциально-геометрического объекта Γ^i_j определяется инфинитезимальная связность

$$\omega^i \qquad \varphi^i=\Theta^i+\Gamma^i_j\,\omega^j$$

и рассматриваются свойства тензоров кручения и кривизны горизонтальных и вертикальных связностей, определенных следующим образом:

$$\Psi^i_j=\omega^i_j+H^i_{jk}\,\omega^k+a^i_{jk}\,\Theta^k,$$

$$\varphi^i_j=\bar\omega^i_j+V^i_{jk}\,\omega^k+b^i_{jk}\,\Theta^k,$$

где

$$\bar\omega^i_j=\omega^i_j-\frac{2u^k}{n+1}\,\delta^i_{(k}\,\omega^l_{j)\,l}\,.$$

Рассматриваются аналоги операции ковариантного дифференцирования.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ МЕТРИК В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА ИЗОТРОПИИ КОТОРЫХ ЯВЛЯЕТСЯ ТЕНЗОРНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ

А. ИОНУШАУСКАС

Для любой линейной группы Ли $\mathfrak{A}$

$$dx^\beta=x^\alpha P^\beta_{\alpha i}\,\Theta^i \qquad (P^\beta_{\alpha i}=\text{const.};\ \alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ \ldots,\ n;\ i,\ j,\ k,\ \ldots=n+1,\ \ldots,\ n+n'),$$

где

$$D\Theta^i=\frac{1}{2}\,C^i_{jk}\,[\Theta^j\,\Theta^k],\ C^i_{jk}=\text{const.},\ C^i_{(jk)}=0,\ C^l_{(ij}\,C^m_{k)\,l}=0,$$

$$P^\gamma_{\alpha j}\,P^\beta_{\gamma k}-P^\gamma_{\alpha k}\,P^\beta_{\gamma j}=C^i_{kj}\,P^\beta_{\alpha i},$$

существуют однородные пространства G/H, линейная группа изотропии которых изоморфна $\mathfrak{A}$. Действительно, в качестве G всегда можно взять группу Ли, определяемую левоинвариантными формами ω^i, ω^α, имеющими структуру

$$D\omega^i=\frac{1}{2}\,C^i_{jk}\,[\omega^j\,\omega^k],\ \ D\omega^\alpha=P^\alpha_{\beta i}\,[\omega^\beta\,\omega^i],$$

а в качестве H – подгруппу группы G, определяемую системой $\omega^\alpha=0$.

Ввиду этого замечания мы вправе выделить некоторый класс однородных пространств, указав, какой вид имеет линейная группа изотропии этих пространств.

В настоящем сообщении изучается существование инвариантной финслеровой метрики в однородных пространствах, линейная группа изотропии которых является тензорным представлением произвольного типа, а также намечен путь исследования и приводятся некоторые результаты о существовании такой метрики в однородных пространствах с вполне приводимой линейной группой изотропии, неприводимые части которой являются тензорными представлениями. Именно, когда линейная группа изотропии $\mathfrak{A}$ изоморфна группе матриц преобразования тензора типа $T^{A_1\ldots A_q}_{B_1\ldots B_q}$, где A_ξ $(\xi=1,\ \ldots,\ q;\ q\geqslant 1)$ означает систему $a_{1_\xi}\ldots a_{m_\xi}$ контравариантных индексов, равно как B_ξ означает систему $b_{1_\xi}\ldots b_{n_\xi}$ ковариантных индексов, преобразуемых группой $GL\,(N_\xi,\ R)$ $(m_\xi\geqslant 0,\ n_\xi\geqslant 0,\ m_\xi+n_\xi>0)$, результаты таковы: если $m_{\xi_0}\neq n_{\xi_0}$ хотя бы для одного $\xi=\xi_0$ $(1\leqslant\xi_0\leqslant q)$, то в однородных пространствах с такой линейной группой изотропии инвариантная финслерова метрика невозможна; в противном случае, т.е. когда $m_\xi=n_\xi$ для всякого $\xi=1,\ \ldots,\ q$, такая метрика существует.

В случае вполне приводимой линейной группы изотропии ($\mathfrak{A}_v$ – тензорные представления)

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathfrak{A}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\mathfrak{A}_r} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

для существования инвариантной финслеровой метрики достаточно, чтобы каждая группа вида

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathfrak{A}_{v_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\mathfrak{A}_{v_s}} \end{pmatrix},$$

где $v_1, \ldots, v_s$ $(s \geqslant 1)$ — некоторая подпоследовательность конечной последовательности $1, \ldots, r$, являлась линейной группой изотропии однородного пространства, обладающего инвариантной финслеровой метрикой. Указанное достаточное условие отнюдь не является необходимым. Например, если $r=2$ и $\mathfrak{A}_1$ имеет вид

$$dx^\beta = -\omega^\beta_\alpha x^\alpha, \quad D\omega^\beta_\alpha = [\omega^\gamma_\alpha \omega^\beta_\gamma], \tag{2}$$

а $\mathfrak{A}_2$ — вид

$$da_\alpha = +\omega^\beta_\alpha a_\beta, \quad D\omega^\beta_\alpha = [\omega^\gamma_\alpha \omega^\beta_\gamma], \tag{3}$$

то как $\mathfrak{A}_1$ в пространстве (x^α), так и $\mathfrak{A}_2$ в пространстве (a_β) действуют транзитивно, значит, в соответствующих им однородных пространствах инвариантная финслерова метрика невозможна; тем не менее в пространстве (x^α, a_β) имеется тангенциально невырожденная гиперповерхность (её уравнение $x^\alpha a_\alpha = \text{const.}$), инвариантная относительно преобразований (2), (3). В случае же, когда в (1) все $\mathfrak{A}_v$ $(v=1, \ldots, r)$ одинаковы и имеют вид (2), при любом конечном $r \geqslant 1$ в соответствующих однородных пространствах инвариантная финслерова метрика отсутствует.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

ОБОБЩЕНИЯ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. КАБАЙЛА

Пусть $S_1, S_2, \ldots$ — конечная или бесконечная функциональная группа G дробно-линейных трансформаций, порождаема трансформациями $A, B, \ldots$ из G, отображающими область D в себя (предельные точки группы G не входят в D). Рассматриваются мероморфные в области D решения $f(z)$ $\left(f(z) \not\equiv 0\right)$ системы

$$\begin{cases} f(Az) = \lambda_A f(z), \\ f(Bz) = \lambda_B f(z), \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{1}$$

($\lambda_A, \lambda_B, \ldots$ — константы). В случае $1 = \lambda_A = \lambda_B = \ldots$ решениями системы (1) являются автоморфные функции группы G. Автор доклада указывает необходимые и достаточные условия для существования решения системы (1) в случае $1 = |\lambda_A| = |\lambda_B| = \ldots$ (в частности, в случае любых конечных групп), а также в случае, когда для некоторых $\lambda'_A, \lambda'_B, \ldots$ $(|\lambda'_A| = |\lambda_A|, |\lambda'_B| = |\lambda_B|, \ldots)$ существует мероморфное решение системы

$$\begin{cases} f(Az) = \lambda'_A f(z), \\ f(Bz) = \lambda'_B f(z), \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Когда указанные условия удовлетворены, автор находит общие мероморфные решения системы (1).

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Ш. И. СТРЕЛИЦ

Рассматривается задача о существовании решений уравнения

$$y'' + \sum_{j=0}^{m} (-1)^j q_j(x) \lambda^j y = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющих краевым условиям:

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{2}$$

В уравнении (1) λ — параметр, $q_j(x) \geqslant 0$, $j=0, 1, \ldots, m-1$, $q_m(x) > 0$ суть непрерывные функции на отрезке $[0, l]$.

Заметим, что к виду (1) с $q_j(x) \geqslant 0$ можно привести любое уравнение типа (1), если только в нем коэффициент у λ^m положителен на всем отрезке $[0, l]$.

Решение задачи (1) — (2) мы ищем в виде ряда

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \varphi_j(x), \tag{3}$$

с условиями для функций $\varphi_j(x)$:

$$\varphi_0(0) = 0, \ \varphi_0'(0) = 1; \ \varphi_j(0) = \varphi_j'(0) = 0; \ j = 1, 2, 3, \ldots$$

Мы доказали, что все функции $\varphi_j(x)$ существуют, причем для всех $j: j=0, 1, 2, 3, \ldots$ $-\varphi_j(l) \neq 0$. Ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(l) \lambda^j$ оказывается затем целой функцией регулярного роста переменного λ порядка $\frac{m}{2}$ и нормальных нижнего и верхнего типов. Следовательно, верно следующее предположение:

при нечетном m в уравнении (1) задача (1) — (2) имеет бесконечную последовательность собственных значений:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, \tag{4}$$

функция плотности $n(r)$ $\big($т.е. $n(r)$ — число членов последовательности (4) с $|\lambda_p| \leqslant r\big)$, которой удовлетворяет неравенствам:

$$0 < \varliminf_{r \to \infty} \frac{n(r)}{r^{\frac{m}{2}}} \leqslant \varlimsup_{r \to \infty} \frac{n(r)}{r^{\frac{m}{2}}} < \infty.$$

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

И. В. КИСЕЛЮС

Как известно, обыкновенное дифференциальное уравнение типа Фукса $\sum_{k=0}^{n} F_k(z) z^k w^{(k)} = 0$, где $F_k(z)$, $k=0, 1, \ldots, n$ аналитические функции в круге $|z| \leqslant R$, имеет решения вида

$$\text{a)} \quad w = z^\lambda h(z),$$

$$\text{b)} \quad w = z^\lambda \sum_{j=0}^{i} h_j(z) \ln^j z, \quad i \leqslant n-1.$$

Здесь $h(z)$ и $h_j(z)$ аналитические функции в окрестности начала координат, а λ — комплексное число.

Ш. И. Стрелиц [1] доказал аналог теоремы Фукса для случая многих комплексных переменных (он рассмотрел тот случай, когда коэффициенты дифференциального уравнения — полиномы). Оказывается, что теорема Стрелица справедлива и для более общего случая, т. е. когда коэффициенты дифференциального уравнения являются аналитическими функциями. Доказана следующая

Теорема. Если для уравнения

$$L_m(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=k} F^k_{i_1 i_2\ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\, z_1^{i_1} z_2^{i_2}\ldots z_m^{i_m}\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m}}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\ldots\partial z_m^{i_m}}=0$$

однородная форма

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} F^n_{i_1 i_2\ldots i_m}(0, 0, \ldots, 0)\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}\ldots\eta_m^{i_m}$$

для любых неотрицательных чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$; $\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_m=1$ не обращается в нуль, то существует бесконечное множество линейно независимых решений вида

$$u=z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2}\ldots z_m^{\lambda_m} f(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

где λ_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ — постоянные числа, а $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — регулярная функция в окрестности начала координат. В частности, если $F^n_{i_1 i_2\ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)=\mathrm{const}$ для всех таких $i_1, i_2, \ldots, i_m$, что $i_1+i_2+\ldots+i_m=n$, а остальные коэффициенты — целые функции, то $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — целая функция.

Если при условиях сформулированной теоремы существуют такие числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$, которые являются нулями полинома

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=k} F^k_{i_1 i_2\ldots i_m}(0, 0, \ldots, 0)\,(\lambda_1)^{(i_1)}(\lambda_2)^{(i_2)}\ldots(\lambda_m)^{(i_m)}\times$$

$$\times\Big(\big((a)^{(p)}=a(a-1)(a-2)\ldots(a-p+1)\big),\ (a)^{(0)}=1\Big)$$

и удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial^{j_1+j_2+\ldots+j_m} Q(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots \lambda_m^0)}{\partial\lambda_1^{j_1}\partial\lambda_2^{j_2}\ldots\partial\lambda_m^{j_m}}=0$$

для всех $j_k=0, 1, 2, \ldots, \alpha_k$, $k=1, 2, \ldots, m$, то существует решение вида

$$u=z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2}\ldots z_m^{\lambda_m}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1}\sum_{j_2=0}^{\alpha_2}\ldots\sum_{j_m=0}^{\alpha_m}\varphi_{j_1 j_2\ldots j_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\times$$

$$\times\ln^{\alpha_1-j_1} z_1 \ln^{\alpha_2-j_2} z_2\ldots\ln^{\alpha_m-j_m} z_m,$$

где $\varphi_{j_1 j_2\ldots j_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — аналитические функции в окрестности начала координат.

Следует заметить, что при дополнительных предположениях теоремы

$$\varphi_{j_1 j_2\ldots j_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

являются целыми функциями.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Стрелиц. Аналог теоремы Фукса для решений линейных уровнений в частных производных. Мат. сб., 60 (102), 121—130.

ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ В ДВУХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К. П. ГАРМУС

Известно, что функция ограниченной вариации на прямоугольнике определяется следующим образом.

Если дана аддитивная функция $F(r)$ на прямоугольнике R, где $r \in R$, и если

$$\sup \sum_{k} |F(r_k)| < +\infty, \tag{1}$$

где прямоугольники $r_k R$ не перекрываются и число их конечно, то функцию $F(r)$ называем функцией, ограниченной вариации на R.

Для обобщения этого понятия даем определение двойного приращения функции $F(x, y)$ на прямоугольнике. Пусть дана конечная функция $F(x, y)$ на прямоугольнике

$$R[a_1, b_1; a_2, b_2].$$

Назовем выражение

$$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$$

двойным приращением функции $F(x, y)$ на R и обозначим через $\Delta^{(2)}(F; R)$.

Если дана конечная функция $F(x, y)$ на прямоугольнике R и если вместо (1) будем брать

$$\sup \sum_{k} |\Delta^{(2)}(F; r_k)| < +\infty,$$

то получим определение функции ограниченной вариации на R в нашем смысле.

Обобщение получим следующим образом.

Если дана конечная функция $F(x, y)$ на прямоугольнике R и множество $G \subset R$, и если

$$\sup \sum_{k} |\Delta^{(2)}(F; r_k)| < +\infty, \tag{2}$$

где прямоугольники r_k двумя противоположными вершинами принадлежат множеству G, то функцию $F(x, y)$ назовем VB-функцией на множестве $G \subset R$. Если $G = \sum_{n} g_n$, где n-число конечное или счетное, и на каждом g_n $F(x, y)$ есть VB-функция, то получим VBG-функцию на $G \subset R$.

Дальше, пусть дана конечная функция $F(x, y)$ на прямоугольнике R

$$\sup |\Delta^{(2)}(F; r)|,$$

где $r \subset R$, назовем двойным колебанием функции $F(x, y)$ на R и обозначим через $O(\Delta^{(2)}; F; R)$.

Если

$$\sup \sum_{k} O(\Delta^{(2)}; F; r_k) < +\infty, \tag{3}$$

где r_k — прямоугольники, две противоположные вершины которых принадлежат множеству G, то $F(x, y)$ назовем VB_x-функцией на $G \subset R$. И если $G = \sum_{n} g_n$, где n — число конечное или счетное, и на каждом g_n функция $F(x, y)$ есть VB_x-функция, то получим VBG_x-функцию на $G \subset R$.

Доказано, что VBG-функция почти всюду дифференцируема в аппроксимативном смысле, а VBG_x-функция — в обыкновенном смысле, причем, речь идет о двойных производных.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

О НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ КОЛЛОКАЦИОННОГО ТИПА

И. УЖДАВИНИС

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение типа Фредгольма

$$\overset{(m)}{y}(x)-\lambda\left[\sum_{s=2}^{m} p_s(x)\overset{(m-s)}{y}(x)+\int_a^b\sum_{s=0}^{m} q_s(x,\tau)\overset{(m-s)}{y}(\tau)\,d\tau\right]=f(x) \tag{1}$$

при условии

$$L_jy\equiv\sum_{i=0}^{m-1}\left[\sum_{k=1}^{l} a_{ij}^{(k)}y^{(i)}(\tau_k)+\int_a^b b_{ij}(x)\,y^{(i)}(x)\,dx\right]=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{2}$$

Коэффициенты уравнения (1) предполагаются непрерывными в соответствующих областях.

Приближенное решение разыскивается в виде

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n} d_k R_{m+k-1}(x), \tag{3}$$

где полиномы $R_{m+k-1}(x)$ удовлетворяют краевым условиям.

Коэффициенты d_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ определяются по видоизмененному методу коллокации, а именно, из следующей системы уравнений:

$$y_n^{(m)}-\lambda A_n z_n=B_n f_n, \tag{4}$$

где $y_n^{(m)}$, z_n и f_n — n-мерные векторы, компонентами которых являются, соответственно, значения $y_n^{(m)}x$,

$$\left[\sum_{s=2}^{m} p_s(x)\,y_n^{(m-s)}{}_x+\int_a^b\sum_{s=0}^{m} q_s(x,\tau)\,y_n^{(m-s)}(\tau)\,d\tau\right],$$

$f(x)$ в заданных точках $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\in[a,\ b]$. A_n и B_n — произвольные матрицы типа $(n,\ n)$.

В случае $A_n=B_n=E$ метод (4) совпадает с методом коллокации.

Исследуется разрешимость системы (4) и быстрота сходимости приближенного решения и его производных к точному решению и его производным краевой задачи (1), (2) при некоторых матрицах A_n и B_n, в случае равноотстоящих узлов и узлов Чебышева.

Рассматривается также видоизмененный метод подобластей.

Аналогичные результаты получены для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

ОБ ОЦЕНКЕ НОРМЫ ОДНОЙ МАТРИЦЫ

М. САПАГОВАС

При исследовании сходимости метода конечных разностей для уравнения Пуассона, а также при изучении сходимости итерационных процессов для некоторых нелинейных разностных уравнений приходится оценивать норму матрицы, обратной матрице

$$H=\frac{1}{h^2}\left\|\begin{matrix} -A & E & & & \\ E & -A & E & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & E & -A & E \\ & & & E & -A \end{matrix}\right\|\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} M-1 \text{ строк}, \tag{1}$$

где E — единичная матрица,

$$-A=\left\|\begin{matrix} -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 \end{matrix}\right\| \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} N-1 \text{ строк}.$$

Матрицу H можно рассматривать как матрицу (конечно-разностный аналог функции Грина) системы разностных уравнений аппроксимирующей уравнение Пуассона в прямоугольнике Ω со сторонами длиною a и b ($a=Nh$, $b=Mh$, $a\geqslant b$). Эта система записывается в векторном виде:

$$u_{k-1}-Au_k+u_{k+1}=f_k, \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ M-1)$$
$$u_0=f_0,\ u_M=f_M, \tag{2}$$

где u_k, f_k — векторы размерности $N-1$. Для решения системы (2) применяется метод прогонки:

$$u_k=P_k\,u_{k+1}+q_k, \qquad (k=M-1,\ M-2,\ \ldots,\ 1), \tag{3}$$

где матрицы P_k и векторы q_k вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$P_k=(A-P_{k-1})^{-1},\ P_0=0,$$
$$q_k=(A-P_{k-1})^{-1}(q_{k-1}-f_k),\ q_0=f_0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ M-1). \tag{4}$$

Используя формулы (3)—(4), выражаем элементы матрицы H^{-1} в явном виде как функции от P_0, P_1, $\ldots$, P_{M-1}. Подставляя в эти выражения оценки:

$$\|P_k\|\leqslant\frac{k}{k+1},$$

после многочисленных элементарных преобразований получаем:

$$\|H^{-1}\|\leqslant\frac{b^2}{8}, \tag{5}$$

где норма понимается как первая норма матрицы. Эта оценка справедлива также в случае произвольной ограниченной области. В этом случае b означает наименьшую из двух сторон прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям, содержащего в себе область Ω.

Оценка (5) является улучшением известной оценки Гершгорина:

$$\|H^{-1}\|\leqslant\frac{R^2}{4},$$

где R — радиус наименьшей, описанной вокруг области Ω, окружности.

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

О НЕКОРЕКТНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОМ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Л. СТУПЯЛИС

Пусть в трехмерном пространстве имеем две ограниченные области Ω_1 и Ω_2, которые имеют общую часть границы; обозначим ее через S_2. Всю границу области Ω_1 будем обозначать через $S_{\rm I}$, а области Ω_2 — через $S_{\rm II}$; $S_1=S_{\rm I}\backslash S_2$, $S_3=S_{\rm II}\backslash S_2$. Предполагаем, что $S_{\rm I}$, $S_{\rm II}\in C_{2+\alpha}$. Соответственно, через Q_1 и Q_2 будем обозначать цилиндрические области $\Omega_1\times[0\leqslant t\leqslant l]$ и $\Omega_2\times[0\leqslant t\leqslant l]$.

Пусть задана разрывная функция:

$$\sigma(P,\ t)=\begin{cases} 0, & \text{при } (P,\ t)\in Q_1 \\ 1, & \text{при } (P,\ t)\in Q_2. \end{cases}$$

Для уравнения

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} - L_0 u = f \tag{1}$$

ставится следующая краевая задача: найти функцию $u_0(P, t)$, имеющую непрерывные вторые производные по x, y, z в Q_1 и Q_2 и непрерывную первую производную по t в Q_2, удовлетворяющую внутри Q_1, Q_2 и при $t=0$ в Ω_1 уравнению (1), начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(P), \quad P \in \Omega_2, \tag{2}$$

граничным условиям

$$u|_{S_1} = 0, \quad u|_{S_3} = 0 \qquad \text{при всех } t \in [0, l] \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$[u]_{S_2} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]_{S_2} = 0 \qquad \text{при всех } t \in [0, l],$$

где

$$L_0 = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(P)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \left(c(P) + \lambda\right)$$

— эллиптический оператор, $a_{ik}(P) \in C_{1+\alpha}(\Omega)$; $c(P)$, $f(P, t) \in C_\alpha(\Omega)$ при любом $t \in [0, l]$; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Кроме того предполагаем, что $f(P, t) = 0$ при $(P, t) \in Q_1$. Предполагается, что параметр λ является собственным числом внутренней задачи Дирихле для области Ω_1, т. е. задача

$$L_0 u = 0,$$
$$u|_{S_1} = 0$$

имеет ненулевые решения в области Ω_1; их обозначим через u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, выполнены следующие условия согласования

$$a)\ \varphi|_{S_3} = 0, \quad b)\ \int_{S_2} \varphi u_i \, d\sigma = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$c)\ \varphi|_{S_2} = \tilde{u}|_{S_2}, \quad d)\ \frac{\partial \varphi}{\partial N}\Big|_{S_2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial N}\Big|_{S_2},$$

где $\tilde{u}$ — решение следующей внутренней задачи Дирихле

$$L_0 u = 0 \qquad \psi(P) = \begin{cases} 0, & P \in S_1 \\ \varphi(P), & P \in S_2. \end{cases}$$
$$u|_{S_1} = \psi(P),$$

Точно такая же задача рассматривается для уравнения

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} - L_\varepsilon u = f,$$

где

$$L_\varepsilon = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(P)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \left(c(P) + \lambda - \varepsilon\right);$$

ε сколь угодно малое положительное число. Решение этой задачи обозначим через $u_\varepsilon(P, t)$. Доказывается следующая теорема.

Теорема. Если $\varepsilon \to 0$, то решение $u_\varepsilon(P, t)$ не стремится к $u_0(P, t)$. Предел $\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(P, t)$ не существует.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

О МЕТОДЕ ВАН ХАО Q

В. А. МАТУЛИС

В статье [1] (русский перевод в [2]) Ван Хао предложил метод поиска ответа на вопрос о выводимости секвенций в классическом исчислении предикатов, названный им методом Q. Опишем этот метод для таких секвенций, в которые из пропозициональных знаков могут входить только знаки $\neg$, $\supset$, $\&$, $\vee$ и в которых все свободные и связанные переменные попарно различны.

Этап I. Определить положительные и отрицательные вхождения кванторов в секвенцию. Для каждого положительного вхождения квантора в секвенцию найти отрицательные вхождения кванторов в секвенцию, управляющие рассматриваемым положительным вхождением квантора в секвенцию.

Этап II. Опустить все кванторы и заменить все переменные, которые были связаны отрицательными вхождениями кванторов в секвенцию, на особые числа, а все переменные, которые были связаны положительными вхождениями кванторов в секвенцию, управляемыми отрицательными вхождениями кванторов в секвенцию, – на попарно различные символы функций, за которыми следуют числа, соответствующие управляющим отрицательным вхождениям кванторов в секвенцию.

Этап III. Применяя правила, обратные правилам вывода исчисления высказываний, упростить секвенцию так, чтобы все логические связи исчисления высказываний были удалены и получилось конечное множество секвенций из элементарных формул.

Этап IV. Произвести все возможные соответствующие подстановки в эти секвенции и получить результаты S_1, S_2, S_3 и т. д. Исходная секвенция есть теорема тогда и только тогда, когда среди S_1, $S_1 \vee S_2$, $S_1 \vee S_2 \vee S_3$ и т. д. есть тождественно истинное выражение.

Покажем некорректность этого метода. Вопрос о наличии тождественно истинного выражения среди S_1, $S_1 \vee S_2$, $S_1 \vee S_2 \vee S_3$ и т. д. сводится к вопросу о выводимости предваренной формы формулы, основа которой эквивалентна дизъюнкции элементарных формул и отрицаний элементарных формул, а класс таких формул разрешим (см., напр., [3]). Поскольку классическое исчисление предикатов неразрешимо, то отсюда следует некорректность метода. Положительный ответ на вопрос о выводимости секвенции иногда может быть получен для невыводимой секвенции потому, что при поиске ответа согласно методу Q в этих случаях не рассматриваются некоторые секвенции, которые должны быть выводимыми если исходная секвенция выводима. Сказанное поясним на примере.

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$ – элементарные формулы,

$K_1, \ldots, K_n$ – кванторные комплексы. Рассмотрим секвенцию

$$K_1 \ \ldots \ K_n (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}),\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*.$$

Выполнив I–III этапы метода Q, получим две секвенции вида

$$\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*,\ \mathfrak{A}^{\neq}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{B}^{\neq},\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*. \tag{2}$$

Пусть для каждой из этих секвенций сделаны две подстановки. Полученные после подстановки из $\mathfrak{A}^{\neq}$ и $\mathfrak{B}^{\neq}$ формулы, соответственно обозначим через $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$. Тождественная истинность соответствующих дизъюнкций эквивалентна выводимости следующих секвенций:

$$\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*,\ \mathfrak{A}',\ \mathfrak{A}'', \tag{1}$$

$$\mathfrak{B}',\ \mathfrak{B}'',\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*. \tag{2}$$

Пусть $\mathfrak{A}^*$ совпадает с $\mathfrak{A}''$, а $\mathfrak{B}'$ с $\mathfrak{B}^*$, тогда секвенции (1) и (2) будут выводимыми, и метод Q даст положительный ответ относительно выводимости исходной секвенции. В то время, если произвести соответствующие подстановки при двухкратном снятии кванторов при помощи соответствующих правил исчисления предикатов, то получим выражение вида

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*,\ \mathfrak{A}'\ \mathfrak{A}'';\ \mathfrak{B}'',\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*,\ \mathfrak{A}'}{(\mathfrak{A}'' \supset \mathfrak{A}''),\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*,\ \mathfrak{A}'}\ ;\ \dfrac{\mathfrak{B}',\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*,\ \mathfrak{A}'';\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{B}'',\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*}{\mathfrak{B}', (\mathfrak{A}'' \supset \mathfrak{B}''),\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*}}{(\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{B}'),\ (\mathfrak{A}'' \supset \mathfrak{B}''),\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*}}{K_1 \ \ldots \ K_n (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}),\ \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*}$$

где вопрос о выводимости секвенции, полученной на вершине второй ветви остается открытым. Следовательно и вопрос о выводимости исходной секвенции также остается открытым.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. W a n g H a o, Toward mechanical mathematics, IBM J. Res. Devel, v. 4, № 1 (1960).
2. Кибернетический сборник, вып. 5(1962).
3. А. Ч е р ч, Введение в математическую логику, т. I, (1960).

О КОНСТРУКТИВНОМ ВАРИАНТЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ С. КАНГЕРА И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

Р. А. ПЛЮШКЯВИЧУС

Рассматривается конструктивное исчисление предикатов с равенством, ниже обозначаемое через I_{op}, которое получается из исчисления I_0 [1] включением функциональных символов и предикатного символа $=$, а также изменением и присоединением некоторых постулатов. Исчисление I_{op} имеет некоторые сходные черты с классическим исчислением С. Кангера [2].

Перечислим основные из использованных ниже синтаксических знаков и выражений с пояснением их смысла: Γ, Σ и те же самые букзы с индексами будут обозначать произвольные формульные цепи; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — произвольные формулы; для кратных импликаций будем пользоваться обозначением:

$$\{\supset\mathfrak{A}\}\ \Xi\ \mathfrak{A},\quad \{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\}\ \Xi\ (\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}),\quad \{\mathfrak{A}\,\Sigma\supset\mathfrak{B}\}\ \Xi\ (\mathfrak{A}\supset\{\Sigma\supset\mathfrak{B}\});$$

$\mathfrak{A}_э$ — элементарная формула; $\mathfrak{D}$ — произвольная формула, не являющаяся формулой типа $\{\Sigma_1\supset\neg\mathfrak{A}\}$ и $\left\{\Sigma_1\supset\forall x\,\{\Sigma_2\supset\neg\mathfrak{A}\}\right\}$; Θ — произвольная формула или пустое слово; x, y — переменные, t_1, t_2 — произвольные термы.

Исчисление I_{op} задается схемами аксиом

$$\Gamma\mathfrak{A}\Sigma\to\mathfrak{A},\quad \Gamma\to(t=t)$$

и соответствующими правилами вывода, из которых укажем только правила вывода для равенства и антецедентные правила вывода для импликации и отрицания. Другие правила будут такие же, как и в I_0 с той разницей, что в отрицательных кванторных правилах подставляется не переменная, а терм.:

$$\frac{\Gamma^{t_1}_{t_2}\,(t_1=t_2)\,\Sigma^{t_1}_{t_2}\to\Theta^{t_1}_{t_2}}{\Gamma\,(t_1=t_2)\,\Sigma\to\Theta},\qquad \frac{\Gamma^{t_2}_{t_1}\,(t_1=t_2)\,\Sigma^{t_2}_{t_1}\to\Theta^{t_2}_{t_1}}{\Gamma\,(t_1=t_2)\,\Sigma\to\Theta},$$

где t_1, t_2 в Γ, Σ, Θ входят только свободно.

$$\frac{\Gamma\Sigma\to\mathfrak{A}_э;\ \Gamma\mathfrak{B}\Sigma\to\Theta}{\Gamma\,(\mathfrak{A}_э\supset\mathfrak{B})\,\Sigma\to\Theta},\qquad \frac{\Gamma\Sigma\Sigma_1\,\mathfrak{A}\to;\ \Gamma\mathfrak{B}\Sigma\to\Theta}{\Gamma\,(\{\Sigma_1\supset\neg\mathfrak{A}\}\supset\mathfrak{B})\,\Sigma\to\Theta},$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\Sigma\Sigma_1\,\Sigma_{2\,y}^{\ x}\,\mathfrak{A}^x_y\to;\ \Gamma\mathfrak{B}\Sigma\to\Theta\\ x \text{ и } y \text{ уловлет. усл. I}\end{array}}{\Gamma\left(\left\{\Sigma_1\supset\forall x\,\{\Sigma_2\supset\neg\mathfrak{A}\}\right\}\supset\mathfrak{B}\right)\Sigma\to\Theta},\qquad \frac{\Gamma\,(\mathfrak{D}\supset\mathfrak{B})\,\Sigma\to\mathfrak{D};\ \Gamma\mathfrak{B}\Sigma\to\Theta}{\Gamma\,(\mathfrak{D}\supset\mathfrak{B})\,\Sigma\to\Theta},$$

$$\frac{\Gamma\Sigma\to\mathfrak{A}_э}{\Gamma\neg\mathfrak{A}_э\,\Sigma\to\Theta},\qquad \frac{\Gamma\Sigma\Sigma_1\,\mathfrak{A}\to}{\Gamma\neg\{\Sigma_1\supset\neg\mathfrak{A}\}\,\Sigma\to\Theta},$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\Sigma\Sigma_1\,\Sigma_{2\,y}^{\ x}\,\mathfrak{A}^x_y\to\\ x \text{ и } y \text{ удовлет. усл. I}\end{array}}{\Gamma\neg\left\{\Sigma_1\supset\forall x\,\{\Sigma_2\supset\neg\mathfrak{A}\}\right\}\Sigma\to\Theta},\qquad \frac{\Gamma\neg\mathfrak{D}\Sigma\to\mathfrak{D}}{\Gamma\neg\mathfrak{D}\Sigma\to\Theta}.$$

Условие I : y не входит в заключение; x в $\Sigma_2\neg\mathfrak{A}$ входит только свободно.

Укажем три модификации исчисления I_{op}.

1. Правила для равенства модифицируются таким образом, что подставляемый терм имеет в некотором смысле менее сложную структуру, чем заменяемый. Такие правила для равенства будем называть неудлиняющими.

Доказано, что любой вывод в исчислении I_{op} можно перестроить в такой вывод, в котором все правила для равенства — неудлиняющие.

2. Отрицательные кванторные правила модифицируются таким образом, что вместо фиксированного подбора подставляемого терма производится подстановка метатерма и указываются все возможные значения метатерма — т. е. все термы, входящие свободно в заключении, а так же метатермы, причем указываются условия, не допускающие возникновения зацикливания.

3. К исчислению I_{0p} присоединяется ряд правил, производящих минисферизацию кванторов, а так же отрицательных вхождений символов $\supset$ и $\neg$. Примерами таких правил могут служить следующие правила:

$$\frac{\Gamma\forall x_1 \ldots \forall x_n\neg\neg\mathfrak{A}\,\forall x_1 \ldots \forall x_n\neg\mathfrak{B}\Sigma\to\Theta}{\Gamma\forall x_1 \ldots \forall x_n\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\Sigma\to\Theta}, \qquad \frac{\Gamma\{\Sigma_1\supset\mathfrak{A}\}\{\Sigma_1\supset\mathfrak{B}\}\Sigma\to\Theta}{\Gamma\{\Sigma_1\supset(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})\}\Sigma\to\Theta},$$

$$\frac{\Gamma\{\Sigma_1\neg\mathfrak{M}\Sigma_2\supset\neg\mathfrak{B}\}\{\Sigma_1\mathfrak{N}\Sigma_2\supset\neg\mathfrak{B}\}\Sigma\to\Theta}{\Gamma\{\Sigma_1(\mathfrak{M}\supset\mathfrak{N})\Sigma_2\supset\neg\mathfrak{B}\}\Sigma\to\Theta}, \qquad \frac{\Gamma\neg\mathfrak{A}\neg\mathfrak{B}\Sigma\to\Theta}{\Gamma\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\Sigma\to\Theta}.$$

Доказано, что исчисление I_{0p} равнообъемно с обычным генценовским исчислением G_1 (с присоединенными функциональными символами и предикатным символом $=$, а так же с соответствующими постулатами для равенства).

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Плюшкявичус. Об одном варианте конструктивного исчисления предикатов без структурных правил вывода, ДАН СССР, 161, № 2 (1965).
2. S. Kanger, A simplified proof method for elementary logic, Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (1963).

ДВА ФРАГМЕНТА КОНСТРУКТИВНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ С РАВЕНСТВОМ

Р. А. ПЛЮШКЯВИЧУС

1. Введем конструктивное исчисление, обозначенное посредством I_{0p}^{λ}, выводимыми объектами которого являются некоторые секвенции конструктивного исчисления предикатов с равенством, имеющие пустой сукцедент. Для описания исчисления I_{0p}^{λ} используется терминология и обозначения исчисления I_{0p} [1], кроме того в исчислении I_{0p}^{λ} — $\mathfrak{N}$-формула, содержащая свободное вхождение переменной x, а $\mathfrak{L}$-формула, не содержащая вхождения переменной x.

Исчисления I_{0p}^{λ} задается схемами аксиом:

$$\Gamma\mathfrak{A}\Gamma_1\neg\mathfrak{A}\Gamma_2\to$$

$$\Gamma\neg\mathfrak{A}\Gamma_1\mathfrak{A}\Gamma_2\to$$

$$\Gamma\neg(t=t)\Sigma\to$$

и следующими правилами вывода:

$$(\neg\supset)\ \frac{\Gamma\mathfrak{A}\neg\mathfrak{B}\Sigma\to}{\Gamma\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\Sigma\to} \qquad (\neg\&)\ \frac{\Gamma\neg\mathfrak{A}\Sigma\to;\ \Gamma\neg\mathfrak{B}\Sigma\to}{\Gamma\neg(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})\Sigma\to}$$

$$(\neg\vee)\ \frac{\Gamma\neg\mathfrak{A}\neg\mathfrak{B}\Sigma\to}{\Gamma\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\Sigma\to} \qquad (\neg\forall\neg)\ \frac{\Gamma\Sigma_{1}{}_{y}^{x}\,\mathfrak{A}_{y}^{x}\,\Sigma\to}{\Gamma\neg\forall x\{\Sigma_1\supset\neg\mathfrak{A}\}\Sigma\to}$$

$$(\neg\exists)\ \frac{\Gamma\forall x\neg\mathfrak{A}\Sigma\to}{\Gamma\neg\exists x\mathfrak{A}\Sigma\to} \qquad (\neg\forall\supset)\ \frac{\Gamma\exists x\mathfrak{N}\neg\mathfrak{L}\Sigma\to}{\Gamma\neg\forall x(\mathfrak{N}\supset\mathfrak{L})\Sigma\to}$$

$$(\neg\neg)\ \frac{\Gamma\mathfrak{A}\Sigma\to}{\Gamma\neg\neg\mathfrak{A}\Sigma\to} \qquad (\supset)\ \frac{\Gamma\neg\mathfrak{A}\Sigma\to;\ \Gamma\mathfrak{B}\Sigma\to}{\Gamma(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\Sigma\to}$$

Согласно правилу $(\neg\forall\neg)$: y не входит в $\Gamma\Sigma_1\neg\mathfrak{A}\Sigma$, x входит в $\Sigma_1\neg\mathfrak{A}$ только свободно.

Все остальные антецедентные правила для $\&$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ и правила для $=$ получаются из соответствующих правил исчисления I_{0p} опусканием сукцедента.

Все правила вывода исчисления I^{λ}_{0p} – обратимы.

Пусть $\Gamma^* \to$ секвенция, в которую входят формулы, не содержащие отрицательных вхождений кванторов всеобщности типа $\forall x \mathfrak{D}'$, где $\mathfrak{D}'$ – произвольная формула, не являющаяся формулой типа $\{\Sigma_1 \supset \neg \mathfrak{A}\}$ и $(\mathfrak{R} \supset \mathfrak{L})$. Тогда секвенция $\Gamma^* \to$ выводима в исчислении I^{λ}_{0p} тогда и только тогда, когда она выводима в исчислении I_{0p}.

Пусть E^{λ}_{0p} – исчисление, которое получается из исчисления I^{λ}_{0p} присоединением правила

$$(\neg \forall \_ \mathrm{l}) \quad \frac{\Gamma \neg \mathfrak{D}'^{x}_{y} \Sigma \to}{\Gamma \neg \forall x \mathfrak{D}' \Sigma \to}$$

y не входит в $\Gamma \mathfrak{D}' \Sigma$, x входит в $\mathfrak{D}'$ только свободно.

Исчисление E^{λ}_{0p} можно рассматривать как обобщение исчисления G^{λ}_{2}, построенного Г. Е. Минцем и Е. П. Оревковым в [2]. С помощью исчисления E^{λ}_{0p} можно получить некоторое уточнение теоремы Минца и Оревкова (см. в [2]), являющейся обобщением теорем В. И. Гливенко и Г. Крейсела.

Теорема. *Если $\mathfrak{A}$ – формула исчисления предикатов с равенством, не содержащая отрицательных вхождений квантора всеобщности типа $\forall x \mathfrak{D}^*$, где $\mathfrak{D}^*$ – формула не эквивалентная (в конструктивном смысле) формуле типа $\{\Sigma_1 \supset \neg \mathfrak{A}\}$ и $(\mathfrak{R} \supset \mathfrak{L})$, то формула $\neg \mathfrak{A}$ выводима в классическом исчислении предикатов с равенством тогда и только тогда, когда она выводима в конструктивном исчислении предикатов с равенством.*

2. Введем конструктивное исчисление, обозначенное посредством I^{c}_{0p}, выводимыми объектами которого являются некоторые секвенции конструктивного исчисления предикатов с равенством, имеющие не пустой сукцедент. Для описания исчисления I^{c}_{0p} используется терминология и обозначения I_{0p}, кроме того в исчислении I^{c}_{0p} – Γ_1 (Σ_1) – или пустое слово, или формульная цепь, состоящая из элементарных формул, Γ^* – или пустое слово, или формульная цепь, состоящая из формул, не содержащих символов $\supset$, $\neg$ и $\forall$; $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{L}^*$ – произвольные формулы, не содержащие вхождения символа $\neg$ и отрицательных вхождений символов $\supset$ и $\forall$.

Исчисление I^{c}_{0p} задается схемами аксиом

$$\Gamma \mathfrak{A}^* \Sigma \to \mathfrak{A}^*,$$

$$\Gamma \to (t = t)$$

и следующими правилами вывода

$$1^*.\ \frac{\Gamma_1 \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma_1 \to (\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*)}, \qquad 4^*.\ \frac{\Gamma_1 \mathfrak{A}^* \mathfrak{B}^* \Gamma^* \to \mathfrak{L}^*}{\Gamma_1 (\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^*) \Gamma^* \to \mathfrak{L}^*},$$

$$3^*.\ \frac{\Gamma_1 \to \mathfrak{A}^*;\ \Gamma_1 \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma_1 \to (\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^*)}, \qquad 6^*.\ \frac{\Gamma_1 \mathfrak{A}^* \Gamma^* \to \mathfrak{L}^*;\ \Gamma_1 \mathfrak{B}^* \Gamma^* \to \mathfrak{L}^*}{\Gamma_1 (\mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^*) \Gamma^* \to \mathfrak{L}^*},$$

$$5^*.\ \frac{\Gamma_1 \to \mathfrak{A}^* \text{ или } \Gamma_1 \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma_1 \to (\mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^*)}, \qquad 12^*.\ \frac{\Gamma_1 \mathfrak{A}^{*x}_{y} \Gamma^* \to \mathfrak{L}^*}{\Gamma_1 \exists x \mathfrak{A}^* \Gamma^* \to \mathfrak{L}^*},$$

$$9^*.\ \frac{\Gamma_1 \to \mathfrak{A}^{*x}_{y}}{\Gamma_1 \to \forall x \mathfrak{A}^*}, \qquad 13^*.\ \frac{\Gamma_1{}^{t_1}_{t_2} (t_1 = t_2)\, \Sigma_1{}^{t_1}_{t_2} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{z}}{}^{t_1}_{t_2}}{\Gamma_1 (t_1 = t_2)\, \Sigma_1 \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{z}}},$$

$$11^*.\ \frac{\Gamma_1 \to \mathfrak{A}^{*x}_{t}}{\Gamma_1 \to \exists x \mathfrak{A}^*}, \qquad 14^*.\ \frac{\Gamma_1{}^{t_2}_{t_1} (t_1 = t_2)\, \Sigma_1{}^{t_2}_{t_1} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{z}}{}^{t_2}_{t_1}}{\Gamma_1 (t_1 = t_2)\, \Sigma_1 \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{z}}},$$

ограничения на переменные и терм t в правилах 9^*, 12^* и 11^* – аналогичны I_{0p}.

Все правила исчисления I^{c}_{0p}, кроме правила 5, обратимы. Что касается правила 5, то согласно теореме R. Haaropa [3] – если вводима секвенция $\Gamma_1 \to (\mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^*)$, то вводима секвенция $\Gamma_1 \to \mathfrak{A}^*$ или $\Gamma_1 \to \mathfrak{B}^*$.

Пусть S^* – секвенция, не содержащая вхождения символа $\neg$ и отрицательных вхождений символов $\supset$ и $\forall$. Тогда S^* выводима в I^{c}_{0p} тогда и только тогда, когда она выводима в I_{0p}.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Плюшкявичус (Перввый тезис).
2. Г. Е. Минц, Е. П. Оревков, Обобщение теорем В. И. Гливенко и Г. Крейсела на один класс формул исчисления, ДАН СССР, 152, № 3 (1963).
3. R. Haaгор, Concerning formulas of the types A→BVC, A→(-Ix)B(x) in intuitionistic formal systems. The Journal of symbolic logic, Vol. 25 (1960) p. p. 27—32.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

А. АКСОМАЙТИС

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots$ — независимые случайные величины с

$$\mathbf{E}\xi_1=0,\ \mathbf{E}\xi_1^2=1.$$

Обозначим

$$S_{N_t}=\sum_{j=1}^{N_t}\xi_j,\quad \bar{S}_{N_t}=\frac{S_{N_t}-\mathbf{E}S_{N_t}}{\sqrt{\mathbf{D}S_{N_t}}},$$

где N_t — случайная величина, принимающая лишь целые положительные значения и не зависящая от ξ_j $(j=1, 2, \ldots)$.

Ниже приводятся три теоремы, обобщающие некоторые результаты В. В. Петрова [1], [2] на случай, когда число слагаемых — случайная величина.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Существуют такие положительные числа $\alpha<\frac{1}{2}$ и A, что

$$E\exp\left(A\,|\,\xi_1\,|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right)<\infty \text{ (условие Ю. В. Линника)}.$$

2. Существует постоянное $B>1$ такое, что

$$E\,(N_t)^l\leqslant B^l\,(\mathbf{E}\,N_t)^l \qquad (l\geqslant 1).$$

3. $\mathbf{E}N_t\to\infty$ при $t\to\infty$.

Для любой функции $\rho(t)$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t)=+\infty$, имеем:

$$\frac{P\{\bar{S}_{N_t}>x\}}{1-\Phi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{EN_t}}\,\lambda_t^{[s]}\left(\frac{x}{\sqrt{EN_t}}\right)\right\}\{1+o(1)\}$$

при $t\to\infty$ равномерно относительно x в области $0\leqslant x\leqslant\frac{(\mathbf{E}\,N_t)^\alpha}{\rho(t)}$, где $s\geqslant 0$ — целое число, определяемое неравенствами

$$\frac{s}{2(s+2)}<\alpha\leqslant\frac{s+1}{2(s+3)},$$

а $\lambda_t^{[s]}(\tau)$ — известный отрезок ряда Крамера [1], первые коэффициенты которого вычислены в заметке [3].

При тех же обозначениях справедлива:

Теорема 2. Пусть $F_t(x)=P\{\bar{S}_{N_t}<x\}$ абсолютно непрерывна и $p_t(x)=\frac{d}{dx}F_t(x)$ ограничена. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\frac{p_t(x)}{\varphi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{EN_t}}\,\lambda_t^{[s]}\left(\frac{x}{\sqrt{EN_t}}\right)\right\}\{1+o(1)\},$$

при $t\to\infty$ равномерно относительно x в области

$$|\,x\,|\leqslant\frac{(E\,N_t)^\alpha}{\rho(t)}.$$

Пусть ξ_1 принимает только значения из некоторой арифметической прогрессии, т. е. вида $b+kh$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где b — некоторое действительное число, h — максимальный шаг распределения. Положим

$$P_t(K)=P\left\{\sum_{j=1}^{N_t}\xi_j=bN_t+K_t h\right\},$$

$$x=x_{K_t}=\frac{b\,\mathbf{E}\,N_t+K_t h}{B(t)},\quad B^2(t)=\mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^{N_t}\xi_j\right).$$

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\frac{\frac{\sqrt{\mathbf{E}\,N_t}}{h}P_t(K)}{\varphi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{\mathbf{E}N_t}}\lambda_t^{[s]}\left(\frac{x}{\sqrt{\mathbf{E}N_t}}\right)\right\}\{1+o(1)\}$$

при $t\to\infty$ равномерно относительно x в области

$|x|\leqslant\frac{(\mathbf{E}\,N_t)^{\alpha}}{\rho(t)}$, где $\rho(t)$, $\lambda_t^{[s]}(\tau)$ и s определяются как и в теореме 1.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Петров, Предельные теоремы для больших уклонений при нарушении условия Крамера I, Вестник Ленинградского университета № 19, 1963.

[2] В. В. Петров, Предельные теоремы для больших уклонений при нарушении условия Крамера II, Вестник Ленинградского университета № 1, 1964.

[3] А. Аксомайтис, О больших уклонениях для сумм случайного числа случайных слагаемых, Литовский математический сборник, 3, 1955.

О СХОДИМОСТИ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К УСТОЙЧИВОМУ ПРЕДЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ

А. МИТАЛАУСКАС

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_k,\ k=1, 2, \ldots\}$ с функциями распределения $\{F_k(x),\ k=1, 2, \ldots\}$. Пусть $G_\alpha(x, \lambda)$ — функция распределения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha<1$ и параметром λ. Обозначим

$$\Omega_k(x)=F_k(x)-G_\alpha(x, \lambda_k),\quad B_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

В [1] доказана интегральная предельная теорема для сходимости к устойчивому предельному закону при условии существования „псевдомоментов" порядка α. Здесь делается попытка доказать аналогичную теорему без упомянутого условия.

Теорема. *Если существует последовательность* $\{C_n, n=1, 2, \ldots\}$ *такая, что при* $n\to\infty$:

$$1.\quad \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geq C_n}|d\Omega_k(x)|\to\infty,$$

$$2.\quad \frac{C_n^{1-\alpha}}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<C_n}|x|^{\alpha}|d\Omega_k(x)|=O(1),$$

тогда равномерно по x

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k-A_n}{B_n}<x\right\}\to G_\alpha(x, 1).$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Миталаускас, Об интегральной предельной теореме для сходимости к устойчивому предельному закону, Лит. мат. сб., 4,2 (1964), 235—240.

РЕКУРРЕНТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

П. СУРВИЛА

Пусть $\{\xi_k\}$ последовательность независимых случайных величин. Обозначим через

$$S_{m+n}^{m}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{m+k},\ m=0, 1, 2, \ldots;\ n=1, 2, \ldots$$

Число a будем называть возможным значением, если для каждого m и любого $\varepsilon>0$ можно найти такое n, чтобы

$$P\{|S_{m+n}^{m}-a|<\varepsilon\}>0.$$

Число b будем называть рекуррентным значением, если для каждого m и для любого $\varepsilon>0$

$$P\{|S_{m+n}^{m}-b|<\varepsilon \text{ для бесконечного числа значений } n\}=1.$$

Надо заметить, что в случае одинаково распределенных случайных величин эти определения совпадают с определениями в [1].

Доказываются следующие предположения:

1. *Если нуль — возможное значение, то или все возможные значения являются рекуррентными, или рекуррентных значений вовсе нет.*

2. *Для того, чтобы существовали рекуррентные значения, необходимо, чтобы для каждого* m *и любого* $h>0$ *выполнялось соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|S_{m+n}^{m}|<h\}=\infty.$$

Доказательства аналогичны доказательствам в [1].

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. K. L. Chung and W. H. J. Fuchs, On the distribution of values of sums of random variables, Memoirs of the American Math. Soc., N. 6. (1951).

О ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА К СУММАМ СЕРИЙ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Я. Х. КУЧКАРОВ

Рассматривается последовательность серий случайных величин

$$X_1^{(n)},\ X_2^{(n)},\ \dots,\ X_n^{(n)},\qquad n=1,\ 2,\ \dots \tag{1}$$

Случайные величины, образующие n-ю серию, $n=1,\ 2,\ \dots$, слабо зависимы. Слабая зависимость определяется тем, что с вероятностью единица

$$\sup_{l-k=\tau>0}\ \sup_{A\in F_{1k}^{(n)}} |\mathbf{P}(A\mid F_{kn}^{(n)})-P(A\mid F_{kl}^{(n)})|\leqslant\varphi(\alpha_n\tau) \tag{2}$$

и

$$\sup_{l-k=\tau>0}\ \sup_{A\in F_{1k}^{(n)}} |P(A|F_{ln}^{(n)})-P|(A)|\leqslant\varphi(\alpha_n\tau),$$

где $\varphi(\alpha_n\tau)=\exp(-\alpha_n\tau)$, а ,,коэффициент эргодичности'' α_n стремится с определенной скоростью к 0 при $n\to\infty$. Здесь $F_{kl}^{(n)}$, $1\leqslant k<l\leqslant n$, σ — алгебра, порожденная событиями вида

$$\{(X_{i_1}^{(n)},\ X_{i_2}^{(n)},\ \dots\ X_{i_r}^{(n)})\in B\},\qquad k\leqslant i_1<i_2<\dots<i_r\leqslant l,$$

а B — r-мерное борелевское множество.

Обозначим

$$S_{kl}^{(n)}=X_{k+1}^{(n)}+\dots+X_l^{(n)},\quad S_n=S_{0n}^{(n)},\quad B_n^2=DS_n.$$

Предположим, что при $l-k\geqslant\dfrac{1}{\alpha_n}$, и $\alpha_n^3 n(\ln\ln n)^{-1}\geqslant f(n)$, где $f(n)\to\infty$ при $n\to\infty$

$$D\,S_{kl}^{(n)}\geqslant c\,(l-k)\,f(n)^{\frac{1}{3}}\,(n^{-1}\ln\ln)\,n^{\frac{1}{3}}, \tag{3}$$

где c — положительная константа.

Теорема 1. Если случайные величины (1) подчиняются условиям (2), (3) и

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|=0\left(\frac{\alpha_n^3 n}{\ln\ln n}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

кроме того при $n\to\infty$

$$\alpha_n^3 n(\ln\ln n)^{-1}\to\infty,$$

то

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n^2\ln\ln B_n^2}}=1\right\}=1. \tag{5}$$

Теорема 2. Если случайные величины подчиняются условиям (2), (3), (4) и

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|>c_1>0, \tag{6}$$

где c_1 — некоторая константа, то справедливо утверждение (5).

Теорема 3. Если случайные величины (1) подчиняются условию (2),

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^{(n)}|=0\left(\frac{\alpha_n B_n}{\sqrt{\ln\ln B_n^2}}\right) \tag{7}$$

и при $n\to\infty$

$$\alpha_n B_n(\ln\ln B_n^2)^{-\frac{1}{2}}\to\infty,$$

то справедливо утверждение (5).

Теорема 4. Если случайные величины (1) подчиняются условиям (2), (6) и (7), то справедливо утверждение (5).

Доказательства сформулированных выше теорем проводятся, следуя в основном методу А. Н. Колмогорова [1] и используя результаты, полученные В. А. Статулявичусом [2] и Б. А. Ряубой [3].

Пользуюсь случаем выразить большую признательность Витаутасу Антоновичу Статулявичусу за важные указания при ее решении.

Ташкентский Политехнический
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров. Über das Gesetzt des iterierten Logoritmus. Math. Annalen, 101 (1929).
2. В. А. Статулявичус. Об уточнениях предельных теорем для слабо зависимых случайных величин, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, ГИПНЛ, Вильнюс, 1962.
3. Б. А. Ряуба. Предельные теоремы для сумм слабо зависимых случайных величин. Диссертация. Институт физики и математики АН Лит. ССР, Вильнюс, 1963.

ОБ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ

А. К. РАУДЕЛЮНАС

Рассматривается последовательность независимых равномерно ограниченных случайных s-мерных векторов $\xi_k=(\xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots, \xi_{ks})$, имеющих плотность $p_{\xi_k}(\bar{x})$, $k=1, 2, \ldots$. Не нарушая общности, будем считать, что $\mathbf{M}\xi_k=0$, $k=1, 2, \ldots$

Для суммы $\mathbf{S}_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ верна следующая теорема:

Теорема. Если

$$p_{\xi_k}(\bar{x})\leqslant C_k\leqslant\infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{C_k^2}=\infty,$$

то существует линейное преобразование A_n такое, что

$$p_{A_nS_n}(x)\underset{(n\to\infty)}{\to}\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{2}}. \tag{1}$$

где

$p_{A_nS_n}(x)$ — плотность случайной величины $A_n\mathbf{S}_n$.

Полученная локальная предельная теорема для плотностей является усиленной в том смысле, что соотношение (1) будет иметь место, как для исходной последовательности, так и для любой последовательности, полученной из исходной, изменением распределений конечного числа членов.

Настоящий результат является обобщением одной теоремы В. А. Статулявичуса на многомерный случай.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА РЕАЛИЗАЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

Пусть $\{A_n\}$ — последовательность измеримых множеств на действительной прямой R с конечной мерой Лебега $|A_n|$; $S^k_{\{A_n\}}$ — множество измеримых функций $f(t)$, $t\in R$, таких, что

$$\|f\|^{(k)}_{\{A_n\}}=\left\{\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{|A_n|}\int_{A_n}|f(t)|^k dt\right\}^{\frac{1}{k}}<\infty;$$

$$N^k_{\{A_k\}}=\{f:\|f\|^{(k)}_{\{A_n\}}=0\}.$$

Тогда $B^k_{\{A_n\}} = S^k_{\{A_n\}} / N^k_{\{A_n\}}$ – линейное нормированное пространство с нормой $\|f\|^{(k)}_{\{A_n\}}$. Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $|A_n| \to \infty$, то пространство $B^k_{\{A_n\}}$ полно и, следовательно, является банаховым пространством. Немонотонность последовательности $\{A_n\}$ может повлечь неполноту пространства $B^k_{\{A_n\}}$. Для примера рассмотрим последовательность функций $f_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \chi_{L_i}(t)$, где $\chi_{L_i}(t)$ – характеристические функции множеств

$$L_i = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{d_i}{2} + k(l_i + d_i),\ \frac{d_i}{2} + k(l_i + d_i) + l_i \right),$$

причем $d_i, l_i > 0$, $\dfrac{l_i}{l_i + d_i} = 2^{-i}$, $l_i \to \infty$. Эта последовательность фундаментальна относительно норм $\|f\|^{(1)}_{\{I_n\}}$, $\|f\|^{(1)}_{\{C_n\}}$, $\|f\|^{(1)}_{\{D_n\}}$, где $I_n = (-n, n)$, $C_n = \left(\dfrac{d_n}{2}, \dfrac{d_n}{2} + l_n\right)$ $\{D_n\} = I_1, C_1, I_2, C_2 \ldots$; функция $g(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \chi_{L_i}(t)$ является пределом последовательности $f_m(t)$ относительно нормы $\|f\|^{(1)}_{\{I_n\}}$, но не является таковым относительно нормы $\|f\|^{(1)}_{\{C_n\}}$, так как при любом m имеем: $\left\| \sum\limits_{i=m}^{\infty} f_i(t) \right\|^{(1)}_{\{C_n\}} > 1$; следовательно, по норме $\|f\|^{(1)}_{\{D_n\}}$ последовательность $f_m(t)$ не сходится.

Рассмотрим некоторые свойства стационарных случайных процессов, естественно вытекающих из их интерпретации как абстрактных случайных величин со значениями в пространствах $B^k_{\{A_n\}}$.

Пусть E^k обозначает класс всех измеримых стационарных в узком смысле процессов $\xi(t)$, $t \in R$, для которых $M|\xi(t)|^k < \infty$. Последовательность измеримых множеств $\{A_n\}$ с $|A_n| \to \infty$ назовем осредняющей, если для любого процесса $\xi(t)$ класса E^1 с вероятностью 1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{|A_n|} \int\limits_{A_n} \xi(t)\,dt$. Согласно эргодической теореме Биркгофа, последовательность интервалов $I_n = (-n, n)$ является осредняющей.

Если $\{A_n\}$ – осредняющая последовательность множеств, то реализации всякого процесса из класса E^k с вероятностью 1 принадлежат пространству $B^k_{\{A_n\}}$. Всякий процесс $\xi(t)$ из класса E^k мы можем рассматривать как абстрактную случайную величину $X(\omega)$ на вероятностном пространстве (Ω, S, P) со значениями в $B^k_{\{A_n\}}$, причем $M(\|X(\omega)\|^k_{B^k_{\{A_n\}}}) < \infty$. После обычной факторизации множество всех таких абстрактных случайных величин превращаются в линейное нормированное пространство $L^k(\Omega, B^k_{\{A_n\}})$ с нормой $\|X(\cdot)\|_{L^k} = \{M(\|X(\omega)\|^k_{B^k_{\{A_n\}}})\}^{\frac{1}{k}}$. Это пространство полно тогда и только тогда, когда полно пространство $B^k_{\{A_n\}}$; например, для рассмотренной выше последовательности множеств $\{D_n\}$ пространства $L^k(\Omega, B^k_{\{D_n\}})$ не полны.

Не умаляя общности, мы можем считать, что стационарный процесс $\xi(t)$ задается группой сохраняющих меру P преобразований T_t, $t \in R$, пространства Ω: $\xi(t) = \eta(T_t\omega)$, где $\eta \in L^k(\Omega, R)$. Пусть $L^k_\xi(\Omega, R)$ – подпространство пространства $L^k(\Omega, R)$, порожденное случайными величинами $\xi(t)$, $t \in R$. Каждой случайной величине $\zeta \in L^k_\xi(\Omega, R)$ соответствует абстрактная случайная величина – процесс $Z = \zeta(T_t\omega) \in L^k(\Omega, B^k_{\{A_n\}})$. Обозначим через $L^k_\xi(\Omega, B^k_{\{A_n\}})$ подмножество всех таких процессов.

А. Множество $L^k_\xi(\Omega,\ B^k_{\{A_n\}})$ представляет собой замкнутое подпространство пространства $L^k(\Omega,\ B^k_{\{A_n\}})$, порожденное случайными процессами $X_s(\omega)=\xi(t+s)$, $s\in R$; соответствие $\zeta\xrightarrow{i}Z$ есть изоморфизм $L^k_\xi(\Omega,\ R)$ на $L^k_\xi(\Omega,\ B^k_{\{A_n\}})$.

Отсюда немедленно следует, что

В. Если последовательность $\{A_n\}$ осредняющая, то пространства $L^k(\Omega,\ B^k_{\{A_n\}})$ полны. Это, в частности, объясняет, почему немонотонные последовательности интервалов, подобные рассмотренной выше последовательности $\{D_n\}$, не являются осредняющими.

Рассмотрим в $L^k_\xi(\Omega,\ R)$ какое-либо плотное подмножество M. Пусть реализации всякого случайного процесса $Z\in i(M)$ с вероятностью 1 принадлежат множеству $K\subset B^k_{\{A_n\}}$.

С. Реализации любого случайного процесса $Z\in L^k_\xi(\Omega,\ B^k_{\{A_n\}})$ с вероятностью 1 принадлежат $B^k_{\{A_n\}}(K)$ – подпространству пространства $B^k_{\{A_n\}}$, порожденному множеством K.

Отсюда вытекает следующая теорема Е. Е. Слуцкого.

Д. С вероятностью 1 реализации случайного процесса класса E^k, имеющего дискретный спектр, являются почти-периодическими функциями Безиковича класса B^k.

С помощью утверждения С можно доказать также следующее предположение.

Е. Пусть $\{A_n\}$ – осредняющая последовательность множеств и $\{B_n\}$ – последовательность измеримых множеств такая, что при достаточно больших n: 1) $B_n\subset A_n$, 2) $|B_n|>\alpha|A_n|$ $(\alpha>0)$ и 3) при любом $t\in R$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|(B_n+t)\,\Delta\,B_n|}{|B_n|}=0$; тогда $\{B_n\}$ – осредняющая последовательность множеств.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР