

О ПОЛЮСАХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ. ВЕРОЯТНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ КОМБИНАЦИЙ

В. А. МАЛЫШЕВ

В книге Феллера [1] теория рекуррентных событий применяется к вычислению вероятностей появления серий успехов. В этом случае элементарными методами удается показать, что существует единственный наименьший полюс у соответствующей производящей функции, получить быстро сходящийся ряд для этого полюса и асимптотику Пуассона. В работе Бизли [2] выписывается производящая функция для вероятностей первого появления произвольной комбинации на бернуллиевской схеме с двумя состояниями. Отметим, что феллеровская теория рекуррентных событий позволяет получить в знаменателе этой производящей функции многочлены степени N (N — длина комбинации), в то время как прямое применение матричного метода исследования цепей Маркова дает степень многочлена, равную 2^N .

Вопрос о вычислении наименьшего корня (по модулю) многочлена возникает и в других вероятностных задачах. Ниже приведено необходимое и достаточное условие существования единственного такого корня у знаменателя рациональных производящих функций, которые могут встретиться в вероятностных задачах. Метод косвенный, основанный на изучении с помощью некоторого вероятностного условия диофантовой динамической системы на m -мерном торе (прямыми методами локализации корней (см., например, [3], [4]) пользоваться трудно из-за сложности коэффициентов многочленов).

Затем рассматривается задача о появлении комбинаций на марковской цепи. Для знаменателя производящей функции вероятностей первого появления любой комбинации получен ряд для наименьшего корня в общем случае и конечные формулы для асимптотики этого корня по Пуассону.

1. Полюса с наименьшим модулем у рациональных производящих функций

В дальнейшем

$$F(s) = \frac{U(s)}{V(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n \quad (1)$$

будет рациональной функцией с действительными коэффициентами.

Если $f_n \geq 0$, то существует положительный корень многочлена $V(s)$, не превосходящий по модулю никакого другого корня этого многочлена.

Действительно, рассмотрим окружность сходимости $|s| = r_0$ ряда (1). По теореме Адамара—Прингсгейма [5] пересечение этой окружности с положительной полуосью есть особая точка (полюс), она и является корнем многочлена $V(s)$, причем внутри этой окружности других корней у многочлена $V(s)$ нет. ($V(s)$ и $U(s)$ можно предполагать взаимно простыми).

Теорема 1. Если $f_n \geq 0$, то на окружности $|s| = r_0$ не существует корней многочлена $V(s)$ кратности большей, чем кратность корня $s = r_0$.

Доказательство. Разложение $F(s)$ на простейшие дроби имеет следующий вид:

$$F(s) = \sum_{k=0}^a \sum_{j_k=1}^{q_k} \frac{A_{kj_k}}{(s_k - s)^{j_k}}, \quad (2)$$

где s_k — корень кратности q_k многочлена $V(s)$.

При $|s| < s_k$ имеет место

$$\frac{1}{(s_k - s)^{j_k}} = \frac{1}{s_k^{j_k}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{s_k}\right)^{j_k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{s_k^{j_k + n}} \cdot \frac{j_k(j_k + 1) \dots (j_k + n - 1)}{n!}. \quad (3)$$

Каждому комплексному корню s_k соответствует комплексно-сопряженный корень s_k той же кратности. Нетрудно показать, что тогда

$$A_{kj_k} = \overline{A_{k'j_{k'}}}. \quad (4)$$

Объединяя сопряженные слагаемые в сумме (2) и пользуясь (3), получим

$$F(s) = \sum_n \sum_k \sum_{j_k=1}^{q_k} (2) \operatorname{Re} \left(\frac{A_{kj_k}}{s_k^{j_k} \cdot s_k^n} \right) \frac{(n+1) \dots (n+j_k-1)}{(j_k-1)!} s^n. \quad (5)$$

Двойка поставлена в скобках потому, что если $\operatorname{Im} s_k = 0$, то она отсутствует.

Пологая

$$A_{kj_k} = R_{kj_k} e^{i\psi_{kj_k}}, \quad s_k = r_k \cdot e^{-i\varphi_k}, \quad (6)$$

имеем

$$F(s) = \sum_n \sum_k \sum_{j_k=1}^{q_k} (2) \operatorname{Re} \left(e^{i(\psi_{kj_k} + (j_k + n)\varphi_k)} \right) \times \\ \times \frac{(n+1) \dots (n+j_k-1)}{(j_k-1)!} \cdot s^n \cdot \frac{R_{kj_k}}{r_k^{j_k + n}}. \quad (7)$$

Предположим, что на окружности $|s| = r_0$ есть корни большей кратности, чем $s_0 = r_0$. Асимптотическое поведение f_n будет определяться тогда именно этими корнями:

$$f_n \sim \sum_{k \in K} (2) \operatorname{Re} \left(e^{i(\psi_{kq_k} + (q_k + n)\varphi_k)} \right) \frac{(n+1) \dots (n+q'-1)}{(q'-1)!} \cdot \frac{R_{kq_k}}{r_0^{q'+n}} \quad (8)$$

— здесь K есть множество таких k , для которых $|s_k| = r_0$ и $q_k = q' = \max_{k \in K} q_k$; пусть таких q_k ровно m .

Тогда замечаем, что преобразование T

$$T\{\psi_k : k \in K\} = \{\psi_k + \varphi_k : k \in K\} \quad (9)$$

задает динамическую систему на m -мерном торе.

Из того, что $f_n \geq 0$, следует, что

$$d_n = \sum_{k \in K} (2) R_{kq_k} \operatorname{Re} \left(e^{i(\psi_{kq_k} + (j_k + n)\varphi_k)} \right) \geq 0. \quad (10)$$

Это значит, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $n(\epsilon)$, что для $n > n(\epsilon)$ будет $d_n > -\epsilon$; действительно, допустим, что для бесконечного числа значений n и некоторого $\epsilon > 0$ будет

$$d_n \leq -\epsilon,$$

тогда для бесконечного числа значений n будет $f_n < 0$, что невозможно.

Докажем, что из (10) должно следовать, что $d_n \geq 0$. Пусть по крайней мере для одного n_0 будет

$$d_{n_0} < -\epsilon < 0.$$

Отметим точку

$$a_{n_0} = \{ \psi_{kq_k} + n_0 \varphi_k : k \in K \}$$

m -мерного тора. Если частоты φ_k несоизмеримы, то в силу эргодичности этой динамической системы T точка

$$\{ \psi_{kq_k} + n\varphi_k : k \in K \}$$

для бесконечного числа значений n попадет в любую окрестность точки a_{n_0} . Тогда для бесконечного числа значений n будем иметь $d_n < -\delta < 0$ для некоторого $\delta > 0$, что противоречит формуле (10). Если частоты соизмеримы, то приходится воспользоваться теоремой Кронекера из теории многомерных диффантовых приближений (см. [6]), из которой следует, что точка a_{n_0} бесконечное число раз подойдет как угодно близко к той точке, в которой она уже была. Далее рассуждения аналогичны предыдущим. Убедившись теперь, что $d_n \geq 0$, применяем теорему Адамара — Прингсгейма (см. выше) и убеждаемся, что у рациональной функции

$$\sum_n \sum_{k \in K} (2) \operatorname{Re} \left(e^{i(\psi_{kq_k} + (q_k + n)\varphi_k)} \right) \cdot \frac{R_{kq_k}}{r_k^{q_k + n}} \cdot \frac{(n+1) \dots (n+q'-1)}{(q'-1)!} s^n \quad (11)$$

должна быть особая точка $s = r_0$. Таким образом, приходим к тому, что среди наименьших по модулю корней наибольшей кратности должен быть положительный корень, и это дает доказательство теоремы.

Легко привести пример, когда в предположениях теоремы 1 на окружности сходимости ряда (1) лежат несколько корней многочлена $V(s)$. Имеет место, однако,

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 кроме, может быть, того, что $f_n \geq 0$ и при дополнительном условии, что $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ стремится к определенному пределу, на окружности сходимости ряда (1) отсутствуют корни многочлена $V(s)$ той же кратности, что и наименьший положительный корень.*

Доказательство. В обозначениях теоремы 1 имеем

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{r_0} \sum_{k \in K} (2) \operatorname{Re} \left(e^{i(\psi_{kq_k} + (q_k + n+1)\varphi_k)} \right) R_{kq_k}}{\sum_{k \in K} (2) \operatorname{Re} \left(e^{i(\psi_{kq_k} + (q_k + n)\varphi_k)} \right) R_{kq_k}} + o(1). \quad (12)$$

Пусть сначала сумма в числителе правой части формулы (12) принимает два различных значения по крайней мере для двух значений n . Применяя теорему Кронекера аналогично тому как это делалось при доказательстве теоремы 1, можно убедиться в том, что как выражение

$$\frac{\frac{1}{r_0} \sum_{k \in K} (2) \operatorname{Re} \left(e^{i(\psi_{kq_k} + (q_k + n + 1)\varphi_k)} \right) R_{kq_k}}{\sum_{k \in K} (2) \operatorname{Re} \left(e^{i(\psi_{kq_k} + (q_k + n)\varphi_k)} \right) R_{kq_k}}, \quad (13)$$

так и отношение $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ будет для бесконечного числа значений n как угодно близко к некоторым двум различным значениям, и, следовательно, $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ не может стремиться к определенному пределу.

Рассмотрим теперь случай, когда сумма в числителе правой части выражения (12) постоянна. Тогда, начиная с некоторого момента, имеют постоянный знак суммы

$$\sum_k' (2) \operatorname{Re} \left(e^{i(\varphi_{kq_k} + (q_k + n)\varphi_k)} \right) R_{kq_k}, \quad (14)$$

где суммирование производится по всем $k \in K$, кроме того, которое соответствует положительному корню (в предположении, что существуют корни неположительные, с наименьшим модулем и с кратностью не меньшей кратности наименьшего положительного корня). Применяя теорему Адамара—Прингсгейма к рациональной функции, полученной из разложения $F(s)$ на простейшие дроби опусканием членов, соответствующих наименьшему (по модулю) положительному корню, приходим к противоречию с этим предположением и получаем доказательство теоремы. Заметим, что эта теорема является обращением частного случая теоремы Пуанкаре (см. [7]).

2. Комбинации на однородной конечной цепи Маркова

Рассмотрим конечную однородную цепь Маркова x_n , $n = 1, 2, \dots$, где x_n принимает значения $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Мы скажем, что в n -ый момент появляется комбинация $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, если $x_{n-N+1} = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_N$. Пусть u_n — вероятность того, что комбинация α появится в момент n , f_n — вероятность того, что комбинация α появится впервые в момент n , $\|q_U\|$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ — матрица вероятностей перехода в цепи x_n , w_n ($n \geq N$) — вероятность того, что α появится в момент $n + N$, если она появилась в момент N , a_k ($k < N$) — вероятность появления комбинации α в момент $N + k$, если α появилась в момент N . Вероятности a_k зависят от структуры допустимых сдвигов комбинации (мы скажем, что l -сдвиг допустим для комбинации α), если

$$\alpha_{i_1+l} = \alpha_i, \dots, \alpha_{i_N} = \alpha_{i_{N-l}}; \quad (15)$$

$$a_k = \varepsilon_k q_{i_{N-k} i_{N-k+1}} \dots q_{i_{N-1} i_N},$$

где ε_k равно 1 или 0 в зависимости от того, допустим k -сдвиг или нет.

Обозначив тогда

$$U(s) = \frac{s^N \cdot p_{i_1} \cdot q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{N-1} i_N}}{1-s};$$

$$W(s) = q_{i_1, i_1} \dots \cdot q_{i_{N-1}, i_N} \sum_{n=1}^{\infty} q_{i_N, i_1}^{(n)} s^{n+N-1} \quad (16)$$

из рекуррентного соотношения

$$U_n = f_1 w_{n-1} + \dots + f_{n+N} w_n + f_{n-N+1} a_{N-1} + \dots + f_n a_0, \quad (17)$$

получим

$$U(s) = F(s) \cdot W(s) + F(s) (a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_0) \quad (18)$$

и

$$F(s) = \frac{U(s)}{W(s) + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (19)$$

где $F(s)$ рациональна, т. к. $W(s)$ рациональна.

Теорема 3. Пусть на конечной однородной цепи Маркова $x_n, n = 1, 2, \dots, q_{ii} > 0$ для всех i , задана функция $\varphi(x_{n-N+1}, \dots, x_n)$, принимающая значение, 0 на одном наборе с положительной вероятностью, f_n — вероятность того, что $\varphi(x_{n-N+1}, \dots, x_n) = 0$, а $\varphi(x_{k-N+1}, \dots, x_k) = 1$ для $k < n$.

Тогда $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ стремится к определенному пределу, и следовательно, $F(s)$ имеет единственный полюс наименьшего модуля, превосходящий по кратности другие полюса с тем же модулем, если они существуют.

Доказательство. Рассмотрим новую цепь Маркова, состояниями которой являются всевозможные наборы (упорядоченные) состояний длины N цепи x_n , вероятности которых в цепи x_n отличны от нуля, а матрица вероятностей перехода $\|\tilde{q}_{ij}\|$ получается очевидным образом из условия, что следующее состояние цепи есть набор, получаемый сдвигом на единицу в цепи x_n (схема Маркова — Брунса).

В полученной матрице вычеркнем те строки и столбцы, индексы которых соответствуют тем состояниям, на которых $\varphi = 0$, и те, в которые нельзя попасть из состояния i , не проходя через состояние с $\varphi = 0$. Полученную матрицу обозначим

$$A_i = \|a_{ij}\|, \quad A_i^n = \|a_{ij}^{(n)}\|.$$

Это есть неотрицательная примитивная матрица (см. [8]), т. к. некоторая ее степень в силу эргодичности цепи x_n есть положительная матрица. Следовательно, она имеет единственный максимальный положительный корень λ . Воспользовавшись формулой Перрона имеем

$$a_{ij}^{(n)} \sim c_{ij} \lambda^n.$$

Заметив, что

$$f_n = \sum_{i, j, k} p_i \cdot a_{ij}^{(n-1)} \cdot q_{jk},$$

где суммирование производится по всем i, j (p_i — вероятность начального состояния i), таким, что $\varphi(i) = \varphi(j) = 1$ и всем k таким, что $\varphi(k) = 0$, получим, что $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ имеет предел.

В книге Феллера приводится асимптотика Пуассона для наименьшего по абсолютной величине полюса в случае серий на двоичной бернуллиевской схеме. Следующая теорема дает аналогичный результат в общем случае. Предварительно введем следующее обозначение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{i_N, i_1}^{(n)} s^{n+N-1} = \frac{P(s)}{(1-s) Q(s)}.$$

Теорема 4. Пусть $F\alpha^N(s)$ — производящая функция для вероятностей появления комбинации $\alpha^N = (\alpha_1^N, \dots, \alpha_N^N)$ длины N в первый раз в момент n на заданной однородной конечной эргодической цепи Маркова с переходной матрицей $\|q_{ij}\|$. Тогда для любой последовательности комбинаций $\alpha^1, \dots, \alpha^N, \dots$, вероятности которых отличны от нуля, наименьший по абсолютной величине корень многочлена

$$V(s) = q_{i_1 i_1} \dots q_{i_{N-1} i_N} P(s) + (1-s) Q(s) (a_{N-1} s^{N-1} + \dots + 1) \quad (20)$$

— знаменателя производящей функции $F\alpha^N(s)$ при $N \rightarrow \infty$ асимптотически равен

$$s(N) \sim 1 + \frac{q_{i_1 i_1} \dots q_{i_{N-1} i_N} P(1)}{(1+a_1 + \dots + a_{N-1}) \cdot Q(1)}.$$

Доказательство. Мы используем метод Ньютона в применении к уравнению

$$V(s) = 0.$$

Мы докажем, что для любого случая (любой марковской цепи и любой комбинации) можно одним способом выбрать начальное приближением из него начинать процесс Ньютона. Мы воспользуемся так называемым модифицированным процессом Ньютона и условием его сходимости, полученным Канторовичем (см. [9]). Отметим, что аналогично можно получить быстро сходящийся ряд для корня при фиксированном N .

В качестве начального приближения выберем $s_0(N) = 1$. Докажем, что условие сходимости модифицированного процесса Ньютона

$$\frac{|V(s_0) \cdot V''(s_0)|}{|V'(s_0)|^2} < \frac{1}{2}, \quad 1 \leq s \leq 1 - \frac{2V(s_0)}{V'(s_0)} \quad (21)$$

выполняется для любой эргодической цепи, начиная с некоторого N . Действительно, имеем:

$$V(1) = q_{i_1 i_1} \dots q_{i_{N-1} i_N} P(1) = O(\beta^N), \quad \beta < 1;$$

$$V'(1) = q_{i_1 i_1} \dots q_{i_{N-1} i_N} P'(1) - Q(1) (a_{N-1} + a_{N-2} + \dots + 1) \sim \text{const},$$

$$V''(s) = O(N).$$

Подставляя в (21), получаем искомым результат.

Модифицированный процесс Ньютона разворачивается по формуле

$$s_n(N) = s_{n-1} - \frac{V(s_{n-1}(N))}{V'(s_0(N))}.$$

Тогда из равенств

$$s_1(N) = 1 + \frac{q_{i_1 i_1} \dots q_{i_{N-1} i_N} P(1)}{(1+a_1 + \dots + a_{N-1}) \cdot Q(1) - q_{i_1 i_1} \dots q_{i_{N-1} i_N} P'(1)},$$

$$s_{n+1}(N) = s_1 + O\left(N \cdot (1 - s_1(N))^2\right)$$

следует доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Москва, 1964.
2. M. B i z l e y, Patterns in repeated trials, Journal of the Institute of Actuaries, 88, No 3, 1962.
3. М. Пароди, Локализация характеристических чисел матриц и ее применения, Москва, 1960.
4. Н. Обрешков, Нули на полиноmite, София, 1964.
5. С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, Москва, 1963.
6. Д.ж. Касселс, Введение в теорию дифантовых приближений, Москва, 1961.
7. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Москва, 1959.
8. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Москва, 1954.
9. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в линейных нормированных пространствах, Москва, 1959.

**RACIONALINIŲ GENERUOJANČIŲ FUNKCIJŲ POLIŲ KLAUSIMU.
KOMBINACIJŲ PASIRODYMO TIKIMYBĖS**

V. A. MALYŠEVAS

(Reziūmė)

Straipsnyje pateikiama racionalių generuojančių funkcijų, sutinkamų tikimybinuose uždaviniuose, vardiklio minimalios šaknies egzistavimo būtina ir pakankama sąlyga. Be to, straipsnyje nagrinėjamos kombinacijų pasirodymo Markovo grandinėje uždavinys.

**ON POLES OF RATIONAL GENERATING FUNCTIONS.
PROBABILITIES OF THE APPEARANCE OF COMBINATIONS**

V. MALYSHEV

(Summary)

Necessary and sufficient conditions of the existence of the minimal root of the denominator of a rational generating function are found in the paper. A problem on probabilities of the appearance of combinations in Markov chains is examined as well.

