V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

# О КЛАССЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ РЕДЕЮЩИХ ПОТОКОВ ОДНОРОДНЫХ СОБЫТИЙ

И. Н. КОВАЛЕНКО

Пусть имеется поток однородных событий рекуррентного типа, т. е. интервалы между последовательными событиями — независимые, одинаково распределенные случайные величины. Допустим, что каждое событие потока, независимо от прочих, с вероятностью $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, порождает событие вторичного потока. Затем осуществляется преобразование оси времени $t'=\delta t$. Спрашивается: каков класс предельных потоков, если исходить из фиксированного рекуррентного потока и допустить, что $\delta\to 0$ и $\varepsilon=\varepsilon(\delta)\to 0$?

В случае, если интервалы между событиями исходного потока обладают конечной средней длительностью, вопрос решается теоремой А. Реньи [1]: при нормировке $\varepsilon=c\delta$, где $c$ — положительная константа, предельный поток будет простейшим. (Данная теорема позднее была обобщена Ю. К. Беляевым [2] на более общие потоки.) В настоящей заметке исследуется случай произвольной нормировки.

Обозначим через $\varphi(s)$ преобразование Лапласа—Стильтьеса распределения длительности интервала между событиями исходного потока. Тогда как легко видеть, вторичный поток будет рекуррентным, и соответствующее преобразование для него (с учетом изменения масштаба времени) будет иметь вид

$$\varphi_\varepsilon(s)=\frac{\varepsilon\varphi(\delta s)}{1-(1-\varepsilon)\,\varphi(\delta s)}. \tag{1}$$

Обозначим

$$\varphi_0(s)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\varepsilon(\delta)\,\varphi(\delta s)}{1-[1-\varepsilon(\delta)]\,\varphi(\delta s)}, \tag{2}$$

если этот предел существует.

**Теорема.** Введенная функция может иметь только следующий вид:

$$\varphi_0(s)=\frac{1}{1+cs^\beta}, \qquad \operatorname{Re}s\geqslant 0, \quad c>0, \tag{3}$$

где $0<\beta\leqslant 1$, либо

$$\varphi_0(s)\equiv 1. \tag{4}$$

Для того, чтобы $\varphi_0(s)$ имела вид (3), необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\varphi(s)=1-a(s)\,s^\beta+o\left(a(s)\,s^\beta\right) \qquad (s\to 0,\ \ s>0),$$

где $a(s)>0$ — медленно меняющаяся функция при $s\to 0$;

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\varepsilon(\delta z)}{\varepsilon(\delta)}=z^\beta.$$

Для того, чтобы $\varphi_0(s)$ имела вид (4), необходимо и достаточно равенство

$$1-\varphi(\delta s)=o\left(\varepsilon(\delta)\right) \qquad (\delta \to 0).$$

Доказательство. Запишем (2) в следующем виде:

$$\varphi_0(s)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{1-\varphi(\delta s)}{\varepsilon(\delta)\varphi(\delta s)}}.$$

При $\delta\to 0$ также $\varphi(\delta s)\to 1$ (если $s$ фиксировано). Поэтому

$$\varphi_0(s)=\frac{1}{1+\alpha(s)}, \tag{5}$$

где

$$\alpha(s)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1-\varphi(\delta s)}{\varepsilon(\delta)}. \tag{6}$$

Пусть $\alpha(s)\neq 0$ при $s>0$ (невырожденное распределение). Тогда

$$\alpha(s')=\lim_{\delta\to 0}\frac{1-\varphi(\delta s')}{\varepsilon(\delta)}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1-\varphi\left(\delta\dfrac{s'}{s}\cdot s\right)}{\varepsilon\left(\delta\dfrac{s'}{s}\right)}\cdot\frac{\varepsilon\left(\delta\dfrac{s'}{s}\right)}{\varepsilon(\delta)}=$$

$$=\alpha(s)\cdot\lim_{\delta\to 0}\frac{\varepsilon\left(\delta\dfrac{s'}{s}\right)}{\varepsilon(\delta)}=\alpha(s)K\left(\frac{s'}{s}\right). \tag{7}$$

Поскольку $\alpha(s)$ при $\operatorname{Re}s>0$, очевидно, аналитическая функция, мы можем применить формулу Тейлора:

$$\alpha(s')=\alpha(s)+\alpha'(s)(s'-s)+o(s'-s).$$

Подставив это равенство в (7), получим:

$$\alpha'(s)(s'-s)=\alpha(s)\left[K\left(\frac{s'}{s}\right)-1\right]+o(s'-s).$$

Разделив это равенство на $\alpha(s)(s'-s)$ и устремив $s'$ к $s$, придем к уравнению

$$\frac{\alpha'(s)}{\alpha(s)}=\frac{\beta}{s}, \tag{8}$$

где

$$\beta(s)=K'(1). \tag{9}$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$\alpha(s)=cs^{\beta}, \tag{10}$$

где $c$ — произвольная постоянная.

Вспомним теперь, что $\varphi_0(s)=\dfrac{1}{1+\alpha(s)}$ — преобразование Лапласа—Стильтьеса неотрицательной невырожденной случайной величины. При $s>0$ $\varphi_0(s)$ должна быть убывающей функцией.

Подставим (10) в (5):

$$\varphi_0(s)=\frac{1}{1+cs^{\beta}}. \tag{11}$$

Для этого необходимо, чтобы $c\beta>0$. Но при $c<0$, $\beta<0$ функция (11) будет иметь полюс в точке $s=\left(-\dfrac{1}{c}\right)^{\frac{1}{\beta}}>0$, что невозможно. Остается только случай $c>0$, $\beta>0$. Далее, поскольку при $s>0$ $\varphi_0(s)$ — выпуклая функция, не может быть $\beta > 1$: иначе $\varphi_0'(0) = 0 \leqslant \varphi_0'(s) \leqslant 0$, а, следовательно, $\varphi_0(s) \equiv 1$. Таким образом, $c > 0$, $0 < \beta \leqslant 1$.

Если подставить (10) в (7), мы придем к формуле

$$s'^{\beta} = s^{\beta} K\left(\frac{s'}{s}\right),$$

откуда $K(z) = z^{\beta}$ или, что то же,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\varepsilon(\delta z)}{\varepsilon(\delta)} = z^{\beta}.$$

Теперь очевидно выполнение условия сходимости, фигурирующего в теореме.

Проверим, теперь, достаточность данного условия.

Пусть

$$\varphi(s) = 1 - a(s) s^{\beta} + o\left[a(s) s^{\beta}\right],$$

где $a(s)$ — медленно меняющаяся функция. Тогда

$$\varphi_{\varepsilon}(\delta s) \sim \frac{1}{1 + \frac{a(\delta s)\, \delta^{\beta}}{\varepsilon} s^{\beta}}.$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{c} a(\delta)\, \delta^{\beta}.$$

Так как $a(s)$ — медленно меняющаяся функция при $s \to 0$, то $a(\delta s) \sim \sim a(\delta)$ $(\delta \to 0)$, и

$$\varphi_{\varepsilon}(\delta s) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \varphi_0(s) = \frac{1}{1 + c s^{\beta}},$$

что и требовалось.

Случай сходимости к вырожденному распределению (4) тривиален, и мы не будем на нем останавливаться.

**Следствие.** Предельное распределение для редеющего потока будет показательным (при соответствующей нормировке) тогда и только тогда, когда $-\varphi'(0) < \infty$, т. е. интервалы между восстановлениями исходного процесса имеют конечное математическое ожидание.

Возникает вопрос: существуют ли распределения неотрицательных случайных величин, для которых $1 - \varphi(s) = s^{\beta} a(s) + o\left[s^{\beta} a(s)\right]$ $(s \to 0,\ s > 0)$, где $a(s)$ — медленно меняющаяся функция, а $\beta$ принадлежит интервалу $(0, 1)$? Ответ получается положительный. Проще всего в этом убедиться, рассмотрев распределение с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 1, \\ \dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

В этом случае

$$\varphi(s) = \beta \int_1^{\infty} \frac{e^{-sx}}{x^{\beta+1}} dx.$$

Подставим в эту формулу $s'$ вместо $s$ и сделаем замену $s'x = sy$. Получим:

$$\varphi(s') = \left(\frac{s'}{s}\right)^{\beta} \left[\varphi(s) - \beta \int_1^{\frac{s'}{s}} \frac{e^{-sy}}{y^{\beta+1}} dy\right].$$

Произведя предельный переход при $s' \to s$, придем к дифференциальному уравнению

$$\varphi'(s) = \frac{\beta}{s}\varphi(s) - \frac{\beta}{s}e^{-s}.$$

Положим

$$\varphi(s) = 1 - s^{\beta} f(s).$$

Тогда легко получим

$$f'(s) = \frac{\beta}{s^{\beta+1}}(e^{-s} - 1) = -\frac{\beta}{s^{\beta}} + o\left(\frac{1}{s^{\beta}}\right) \qquad (s \to 0),$$

откуда

$$f(s) = c + o\left(\frac{1}{s^{\beta-1}}\right)$$

и

$$\varphi(s) = 1 - cs^{\beta} + o(s) \qquad (s \to 0).$$

$c \neq 0$, поскольку в противном случае было бы $\varphi(s) = 1 + o(s)$, в противоречии с расходимостью интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}}$ $(\beta \leqslant 1)$.

К этому же выводу можно было бы придти и на основании тауберовой теоремы.

В действительности сходимость к предельному процессу восстановления с функцией $F(x)$, преобразование Лапласа—Стильтьеса которой имеет вид (3), имеет место в значительно более широком классе случаев, чем в предположении о том, что исходный процесс — процесс восстановления. Однако, мы не имеем возможности здесь на этом останавливаться.

Интересна также следующая постановка. Исследовать класс $S$ распределений, получающихся в результате следующего предельного процесса:

$$\varphi_0(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n \varphi_n(s)}{1 - (1 - \varepsilon_n)\varphi_n(s)}. \tag{12}$$

Эта постановка аналогична задаче нахождения предельных распределений для последовательностей серий независимых бесконечно-малых случайных величин.

Класс предельных распределений в данной постановке значительно шире, чем в предыдущем случае. Мы ограничимся только тем, что приведем две интересные леммы.

**Лемма 1.** Если $n \geqslant 1$, $c_i > 0$, $0 < \beta_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$\varphi_0(s) = \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i s^{\beta_i}} \in S.$$

**Лемма 2.** Если $\varphi(s)$ — преобразование Лапласа—Стильтьеса неотрицательной случайной величины, то

$$\varphi_0(s) = \frac{1}{1 + c[1 - \varphi(s)]} \in S, \quad \text{где} \quad c \geqslant 0.$$

Лемма 1 вряд ли требует объяснения. Докажем лемму 2. Возьмем в качестве $\varphi_n(s)$ функцию

$$\varphi_n(s) = 1 - \gamma_n + \gamma_n \varphi(s), \tag{13}$$

где $0<\gamma_n<1$, $\varphi(s)$ — преобразование Лапласа—Стильтьеса некоторой неотрицательной случайной величины. Формула (12) приводит к равенству

$$\varphi_0(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\gamma_n}{\varepsilon_n}\cdot\frac{1-\varphi(s)}{1-\gamma_n[1-\varphi(s)]}}. \tag{14}$$

Положим теперь $\gamma_n=c\varepsilon_n$ и заставим $\varepsilon_n$ стремиться к нулю при $n\to\infty$. В пределе получим $\varphi_0(s)=\{1+c[1-\varphi(s)]\}^{-1}$. Лемма доказана.

Небезинтересно отметить, что в случае последовательности серий для сходимости предельного процесса к потоку Пуассона существование математического ожидания интервала между восстановлениями исходного процесса не является необходимым. Более того, может существовать положительная вероятность того, что интервал между восстановлениями будет равен $\infty$. Чтобы убедиться в этом, возьмем $\varphi_n(s)$ в виде

$$\varphi_n(s)=\frac{1-\gamma_n}{1+\varepsilon_n s} \qquad (0<\gamma<1) \tag{15}$$

(„случайная величина" с вероятностью $1-\gamma_n$ равна показательно-распределенной случайной величине и с вероятностью $\gamma_n$ равна бесконечности). Подстановка (15) в (12) дает равенство

$$\varphi_0(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\varepsilon_n s}{1+(1+\varepsilon_n)s+\gamma_n/\varepsilon_n}.$$

Если $\varepsilon_n\to 0$ и $\gamma_n=0(\varepsilon_n)$ $(n\to\infty)$ (например, $\gamma_n=\varepsilon_n^2$), то $\varphi_0(s)=\frac{1}{1+s}$. При каждом фиксированном $n$ процесс будет обрывающимся, но при неограниченном возрастании $n$ момент обрыва с вероятностью 1 уходит в бесконечность.

Поступило в редакцию
26.XII.1964

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Rényi, A. Poisson-folyamat egy jellemzése; Тр. Матем. ин-та, АН Венгрия, 1 : 4, 1956, 519–527.
2. Ю. К. Беляев, Предельные теоремы для редеющих потоков, Теория вероятн. и ее прим., 8 : 2, 1963.

## APIE HOMOGENINIŲ ĮVYKIŲ RETĖJANČIŲ SRAUTŲ RIBINIŲ PASISKIRSTYMŲ KLASĘ

I. N. KOVALENKO

(Reziumė)

Surasta retėjančių rekurentinio tipo homogeninių įvykių srautų galimų ribinių pasiskirstymų klasė. Formuluojamas ir bendresnis uždavinys.

## ON THE CLASS OF LIMIT DISTRIBUTIONS FOR THINNING CURRENTS OF HOMOGENIOUS EVENTS

I. KOVALENKO

(Summary)

The class of possible limit distributions for thinning homogenious currents of recurrent type is found. A more general problem is formulated.