V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

О КЛАССЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЕРИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

И. Н. КОВАЛЕНКО

Теория процессов восстановления [1] имеет большое значение в задачах массового обслуживания, надежности и других прикладных областях. В частности, приходится сталкиваться с суммами (суперпозициями) независимых малоинтенсивных процессов восстановления. Фундаментальную теорему о сходимости последовательности серий сумм потоков однородных событий к потоку Пуассона установил А. Я. Хинчин [2]. Г. А. Ососков в кандидатской диссертации 1957 г. построил интересные примеры сходимости сумм процессов восстановления к потокам, отличным от потока Пуассона, и вывел соответствующие условия сходимости. Важные результаты, касающиеся предельных теорем и их уточнения, содержатся в работах П. Франкена [3], Б. Григелиониса [4] и других авторов.

Целью настоящей статьи является указание класса предельных потоков для последовательности серий независимых процессов восстановления в естественном условии ,,бесконечной малости" процессов-слагаемых.

Процесс восстановления мы, как это принято, характеризуем двумя функциями: $F^{(1)}(x)$ – функцией распределения момента первого восстановления, и $F(x)$ – функцией распределения длительности интервала между k-м и $(k+1)$-м восстановлением, где $k \geqslant 1$. В необходимых случаях функции $F^{(1)}(x)$ и $F(x)$ будет снабжаться нижними индексами, фиксирующими определенный процесс.

Для большей ясности разобьем наше рассуждение на несколько пунктов.

А. Предельные формы процесса восстановления. В данном пункте будет рассматриваться процесс восстановления, для которого $F_1(x) = F(x)$.

Мы до сих пор считали $F(x)$ собственной функцией распределения, подчиненной условию $F(+0) = 0$. Спрашивается: какие процессы (потоки) можно получить, если рассмотреть различные предельные случаи? В строгой формулировке наш вопрос принимает следующую форму. Пусть $\{F\}$ – множество функций распределения, для которых $F(+0) = 0$; $\{X_F\}$ – множество соответствующих процессов восстановления. Введем в множестве $\{X_F\}$ топологию, считая, что последовательность потоков, соответствующих функциям распределения $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, сходится к потоку X_{F_0}, если для любого $m \geqslant 1$

$$P_n\{z_1 < x_1,\ z_2 < x_2,\ \ldots,\ z_m < x_m\} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} P_0\{z_1 < x_1,\ \ldots,\ z_m < x_m\} \qquad (1)$$

(через P_n $(n \geqslant 0)$ обозначена вероятность, соответствующая потоку X_{F_n}; напомним, что z_k — момент k-го события потока). В заданной топологии множество $\{X_F\}$ не будет замкнутым. Ставится вопрос об описании замыкания этого множества, которое мы обозначим $\overline{\{X_F\}}$.

Замечание 1. Сходимость (1) эквивалентна сходимости последовательности функций распределения $\{F_n(x)\}$ к функции распределения $F_0(x)$ в каждой точке непрерывности последней.

Необходимость этого условия следует из соотношения

$$P_n\{z_1 < x_1\} \underset{n\to\infty}{\to} P_0\{z_1 < x_1\},$$

достаточность — из соотношения

$$P_n\{z_1 < x_1,\ z_2 < x_2,\ \ldots,\ z_m < x_m\} = F_n(x_1)\,F_n(x_2)\ \ldots\ F_n(x_m), \quad m \geqslant 1.$$

Из этого простого замечания можно сделать следующий вывод. Топологическое пространство $\overline{\{X_F\}}$ совпадает с пространством $\{X_{\tilde F}\}$, где $\tilde F$ — либо функция распределения с условием $F(+0)=0$, либо предел последовательности таких функций в смысле сходимости в каждой точке непрерывности.

В соответствии с этим, рассмотрим возможные пределы последовательности $\{F_n(x)\}$. Прежде всего, предельная функция $F_0(x)$ должна быть неубывающей. Различные случаи, которые могут представиться, показаны на рис. 1.

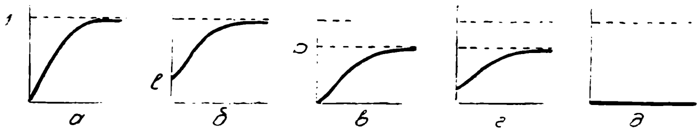

Рис. 1

В случае а) предельная функция является функцией распределения, причем $F_0(+0)=0$. Соответствующий ей процесс X_{F_0} будет процессом восстановления в нашем обычном понимании.

В случае б) мы будем иметь неординарный поток с ограниченным последействием: с вероятностью 1 каждый интервал между событиями потока может оказаться равным 0.

Случай в) интерпретируется следующим образом. После каждого события потока бросается жребий. С вероятностью, равной p, следующее событие произойдет через конечное случайное время, распределенное по закону $\frac{F_0(x)}{F_0(\infty)}$; с вероятностью $1-p$ следующего события вообще не произойдет. Таким образом, общее число событий потока конечно и имеет геометрическое распределение.

Случай г) охватывает более общую ситуацию, когда наряду с возможностью обрыва потока присутствует еще неординарность.

Последний случай д) соответствует полному отсутствию потока.

После того, как природа каждого из возможных случаев раскрыта, мы можем описать замыкание класса процессов восстановления, для которых $F_1(x)=F(x)$, при помощи функции $F(x)$. Это теперь не обязательно функция распределения, а любая неубывающая непрерывная слева функция со свойствами

$$F(0)=0, \quad F(\infty)<1.$$

Коль скоро конкретный вид функции $F(x)$ задан, мы сможем установить, какой из случаев а) — д) налицо.

Будем называть **F** — потоком любой из потоков с заданной функцией F, которая удовлетворяет сформулированным свойствам.

Б. Предельная теорема для потока первых событий. Рассмотрим последовательность серий процессов восстановления:

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}, \\ X_{21},\ X_{22}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ X_{n1},\ X_{n2},\ \dots\ X_{nn}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots , \end{array}\right\} \tag{2}$$

где

$$X_{nk}=\{\, t_{nk}^{(1)}<t_{nk}^{(2)}<\dots<t_{nk}^{(N)}<\dots \,\}. \tag{3}$$

Обозначим

$$F_{nk}^{(1)}(x)=P\{\, t_{nk}^{(1)}<x \,\},$$

$$F_{nk}(x)=P\{\, t_{nk}^{(i+1)}-t_{nk}^{(i)}<x \,\}, \qquad i\geqslant 2.$$

Тогда последовательности серий процессов (2) будет соответствовать последовательность серий пар функций распределения $\{\, F_{nk}^{(1)}(x),\ F_{nk}(x) \,\}$. В данном пункте мы рассмотрим поток, образованный только первыми событиями каждого из потоков X_{nk} $(1\leqslant k\leqslant n)$, а именно,

$$X_n^1=\{\, t_{nk}^{(1)} \,\}_{k=1}^{n}.$$

Теорема. Если при $n\to\infty$ выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{n} F_{nk}^{(1)}(x)\leqslant c \qquad (n=1,\ 2,\ \dots) \tag{4}$$

и

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} F_{nk}^{(1)}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{5}$$

то при $n\to\infty$ поток X_n^1 в интервале времени $(0,\ x)$ сближается с классом пуассоновских потоков без последействия. Для того, чтобы имела место сходимость последовательности $\{\, X_n^1 \,\}$ к потоку указанного класса с ведущей функцией $\Lambda(t)$, в условии (5) необходимо и достаточно равенство

$$\sum_{k=1}^{n} F_{nk}^{(1)}(t) \underset{n\to\infty}{\to} \Lambda(t)$$

для каждой точки t отрезка $(0,\ x)$, где $\Lambda(t)$ непрерывна.

Доказательство. Требуется установить существование такой последовательности ведущих функций $\{\, \Lambda_n(t) \,\}$, что если A — произвольное событие, связанное с расположением точек потока в интервале $(0, x)$ и его подинтервалах, а $P_n(A)$ и $Q_n(A)$, соответственно, вероятность A для потока X_n и для пуассоновского потока без последействия с ведущей функцией $\Lambda_n(t)$, то при $n\to\infty$

$$P_n(A)-Q_n(A) \to 0. \tag{6}$$

Выберем $\Lambda_n(t)$ в виде

$$\Lambda_n(t)=\sum_{k=1}^{n} F_{nk}^{(1)}(t). \tag{7}$$

Достаточно проверить теорему для событий A вида

$$A_m=\}\, \nu_{\Delta_1}=k_1,\quad \nu_{\Delta_2}=k_2,\ \dots,\ \nu_{\Delta_m}=k_m \},$$

где $m\geqslant 0$, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ — непересекающиеся интервалы, принадлежащие интервалу $(0, x)$, ν_{Δ_i} — число событий рассматриваемого потока, попавших в интервал Λ_i.

При $m=0$ утверждение теоремы очевидно: событие A_0 достоверно, и $P_n(A_0)=Q_n(A_0)=1$. Применим индукцию по m. Пусть известно, что для всех A_{m-1} справедливо соотношение (6) при $\Lambda_n(t)$, выбранном в соответствии с формулой (7). Докажем это соотношение для A_m.

Очевидно,

$$P\{A_m\}=P\{A_{m-1}\}\,P\{\nu_{\Delta_m}=k_m/A_{m-1}\}. \tag{8}$$

Событие A_{m-1} может осуществиться $\dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\,\dots\,k_{m-1}!}$ различными способами; каждому из них соответствует попадание в интервалы $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{m-1}$ фиксированных $t_{nk}^{(1)}$; это событие мы обозначим B_i, понимая под i совокупность индексов k, для которых $t_{nk}^{(1)}\in\Delta_1\cup\Delta_2\cup\dots\cup\Delta_{m-1}$. По формуле полной вероятности,

$$P\{A_{m-1}\}=\sum_i P\{B_i\};$$

$$P\{\nu_{\Delta_m}=k_m/A_{m-1}\}=\sum_i P\{B_i/A_{m-1}\}P\{\nu_{\Delta_m}=k_m/B_i\}. \tag{9}$$

Обозначим через $p_{nk}^{(i)}$ апостериорную вероятность события $\{t_{nk}^{(1)}\in\Delta_m\}$ при условии B_i. Тогда

$$p_{nk}^{(i)}=\begin{cases} 0, & \text{если } k\in i \\[2mm] \dfrac{\int\limits_{\Delta_m} dF_{nk}^{(1)}(t)}{\left[1-\int\limits_{\Delta_1\cup\Delta_2\cup\dots\cup\Delta_{m-1}} dF_{nk}^{(1)}(t)\right]}, & \text{если } k\,\bar{\in}\, i. \end{cases}$$

Так как, по условию (5), $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} F_{nk}^{(1)}(x)\to 0$ при $n\to\infty$, а

$$\int\limits_{\Delta_1\cup\Delta_2\cup\dots\cup\Delta_{m-1}} dF_{nk}^{(1)}(x)\leqslant F_{nk}^{(1)}(x),$$

то

$$\frac{p_{nk}^{(i)}}{\int\limits_{\Delta_m} dF_{nk}^{(i)}(t)} \Rightarrow 1, \quad n\to\infty, \quad k\in i.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k\bar{\in} i} p_{nk}^{(i)} \leqslant (k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}) \max F_{nk}^{(i)}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

так что, во-первых,

$$\sum_{k=1}^{n} p_{nk}^{(i)} - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Delta_m} d\Lambda(t) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

где

$$\int\limits_{\Delta_m} d\Lambda(t) \leqslant C,$$

и, во-вторых,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} p_{nk}^{(i)} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Мы находимся в условиях применимости предельной теоремы Пуассона для распределения числа редких событий. Можно заключить, что

$$P\{\nu_{\Delta_m}=k_m/B_i\} - e^{-\int\limits_{\Delta_m} d\Lambda(t)} \frac{\left[\int\limits_{\Delta_m} d\Lambda(t)\right]^{k_m}}{k_m!} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Поскольку последняя оценка, как видно из доказательства, равномерна по i и $\sum\limits_i P\{B_i/A_{m-1}\}=1$, мы немедленно приходим к равенству

$$P\{\nu_{\Delta_m}=k_m/A_{m-1}\} - e^{-\int\limits_{\Delta_m} d\Lambda(t)} \cdot \frac{\left[\int\limits_{\Delta_m} d\Lambda(t)\right]^{k_m}}{k_m!} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

что равносильно утверждению о сближении потоков X_n с пуассоновскими потоками. Что касается второй части теоремы, то она очевидна в силу того, что ведущая функция пуассоновского потока определяется единственным образом. Теорема доказана.

В. Описание класса предельных потоков. Будем говорить, что поток принадлежит классу K в следующем случае.

Задается распределение

$$P\{t_1<t\}=1-e^{-\Lambda(t)},$$

где $\Lambda(t)$ — произвольная конечная неубывающая, непрерывная слева функция; $\Lambda(0)=0$. Каждому $t\in(0, x)$ ставится в соответствие вероятностная мера μ_t на множестве $\{F\}$ неубывающих, непрерывных слева функций; $F(0)=0\leqslant F(\infty)\leqslant 1$. При этом класс измеримых подмножеств $\{F\}$ должен быть борелевским полем, содержащим все множества вида $\{F(x)<y\}$, где $0\leqslant x<\infty$, $0<y\leqslant 1$. Функции $\mu_t\{F(x)<y\}$ должны быть измеримы при фиксированных x и y по мере, порожденной функцией $\Lambda(t)$.

Поток строится следующим образом.

Пусть $X^{(1)}$ — пуассоновский поток без последействия с ведущей функцией $\Lambda(t)$. Предположим, что в результате реализации этого потока, однородные события произошли в моменты $t_1^{(1)} \leqslant t_2^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant t_n^{(1)} \leqslant \cdots$ Тогда из класса $\{F\}$ случайным образом выбираются функции $F_1, F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$, причем функция $F_n(x)$ выбирается в соответствии с вероятностной мерой $\mu_{t_n^{(1)}}$ $(n \geqslant 1)$. Строится последовательность независимых F-потоков (см. выше), откладываемых на оси времени, начиная с моментов $t_1^{(1)}, t_n^{(2)}, \ldots, t_1^{(n)}, \ldots$ Поток, который нас интересует, определяется, как объединение множества точек $\{t_n^{(1)}\}$ и построенных потоков.

Поскольку приведенное описание несколько тяжеловесно для читателя, незнакомого с теорией меры, мы дадим другое описание, исходящее из физического примера.

Пусть имеется большое число элементов, выходящих из строя в соответствии с нестационарным потоком Пуассона без последействия с ведущей функцией $\Lambda(t)$. Всего элементов N типов. Для элементов i-го типа $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеется неограниченный запас резервных элементов, длительность исправной работы которых распределена по закону $F_i(x)$. Всякий раз, когда элемент отказывает, он заменяется резервным. Таким образом, если фиксированы первые моменты отказов элементов, то после каждого из них образуется процесс восстановления моментов отказов последовательно заменяющих его элементов.

Допустим теперь, что первый отказ некоторого элемента произошел в момент t. Тогда существуют вероятности $\mu_t(i)$ того, что этот элемент был i-го типа. В соответствии с этим вероятность того, что функция распределения времени до следующего отказа будет равна $F_i(x)$, составляет $\mu_t(i)$. Ввиду того, что с теоретической точки зрения естественно рассматривать бесконечное множество типов элементов, приходится рассматривать вместо конечного набора чисел $\{\mu_t(i)\}_{i=1}^N$ общую меру μ_t.

Г. Предельная теорема. Введя класс K потоков, мы можем теперь установить предельную теорему. Следует только договориться, что понимать под сходимостью потоков однородных событий.

Пусть, как и выше, $P_n(z_1 < x_1, z_2 < x_2, \ldots, z_m < x_m\}$ обозначает вероятность события, записанного в скобках, для потока X_n, где $n \geqslant 0$.

Будем считать, что последовательность потоков $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к потоку X_0, если имеет место сходимотсь

$$P(z_1 < x_1, z_2 < x_2, \ldots, z_m < x_m) \underset{n\to\infty}{\to} P_0(z_1 < x_1, z_2 < x_2, \ldots, z_m < x_m), \qquad m \geqslant 1$$

в любой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где функция $P_0(\ldots)$ непрерывна.

Теорема. Пусть $H_{nk}(t)$ — функция восстановления процесса восстановления X_{nk} из серии (2), $X_n = X_{n1} + \cdots + X_{nn}$. Тогда, если выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{n} H_{nk}(x) \leqslant c, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

и

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} H_{nk}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{11}$$

то при $n \to \infty$ поток X_n сближается с классом K в смысле слабой сходимости. Для слабой сходимости серии (2) к потоку X из K, характеризуемому ведущей функцией $\Lambda(t)$ и мерой μ_t, при условии (11) достаточно, чтобы при любом $m \geqslant 1$ и произвольных $x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m$

$$\int_0^t \sum_{F_{nk}(x_i)<y_i\,(1\leqslant i\leqslant m)} dF_{nk}^{(1)}(\tau) \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^t \mu_\tau\Big(F(x_i)<y_i,\ 1\leqslant i\leqslant m\Big)\, d\Lambda(\tau). \quad (12)$$

Доказательство. Из условий (10) и (11), очевидно, следует (4) и (5). Но тогда, как мы видели в пункте Б, поток первых событий сближается с классом потоков Пуассона без последействия. Если определить ведущую функцию потока класса K в виде

$$\Lambda(t) = \sum_{k=1}^{n} F_{nk}(t),$$

а меру μ_t — как произвольную измеримую относительно $\Lambda(t)$ функцию, удовлетворяющую соотношению

$$\int_0^t \sum_{F_{nk}(x_i)<y_i 1\leqslant i\leqslant m} dF_{nk}^{(1)}(\tau) = \int_0^t \mu_\tau\Big(F(x_i)<y_i,\ 1\leqslant i\leqslant m\Big)\, d\Lambda(\tau),$$

то, как легко видеть, справедливо неравенство

$$\Big| P_n(z_1<x_1, \ldots, z_m<x_m) - Q(z_1<x_1, \ldots, z_m<x_m)\Big| \leqslant m \max_{1\leqslant k\leqslant n} F_{nk}(x), \quad (13)$$

где P_n — вероятность, соответствующая потоку X_n, Q — вероятность того же события в случае построенного потока из класса K. В самом деле, $\mu_t(A)$ подобрана таким образом, что при совпадении первых моментов потоков — слагаемых распределение последующих моментов совпадает. В силу (5), из (13) следует, что потоки X_n сближаются с классом потоков K. Так как при доказательстве использовался конкретный вид $\Lambda(t)$ и μ_t, то вторая часть теоремы также установлена.

Поступило в редакцию
26.XII.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Смит, Теория восстановления и смежные с ней вопросы, сб. переводов «Математика», ИЛ, 5 : 3, 1961, 95—150.
2. А. Я. Хинчин, Работы по математической теории массового обслуживания, Физматгиз, 1963.
3. П. Франкен, Уточнение предельной теоремы для суперпозиции независимых процессов восстановления, «Теория вероятн. и ее прим.», 8 : 3, 1963, 341—348.
4. Б. Григелионис, Предельные теоремы для сумм процессов восстановления, сб. «Кибернетику — на службу коммунизму», 2, изд. «Энергия», 1964, 246—266.

APIE NEPRIKLAUSOMŲ ATSTATYMO PROCESŲ SERIJŲ SEKOS SUMŲ RIBINIŲ PASISKIRSTYMŲ KLASĘ

I. N. KOVALENKO

(Reziumė)

Šiame darbe yra aprašoma „mažų" apibrėžta prasme nepriklausomų atsitiktinių atstatymo proceso sumų galimų pasiskirstymų klasė. Taip pat duotos konvergavimo pakankamos sąlygos.

ON THE CLASS OF LIMITING DISTRIBUTIONS FOR A SEQUENCE OF SERIES OF SUMS OF INDEPENDENT RENEWAL PROCESSES

I. KOVALENKO

(Summary)

The class of possible limiting distributions for sums of independent „small" in a definite sense random renewal processes is described in this work.

Sufficient conditions of convergence are given as well.