V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОБЩЕННОЙ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В. А. ИВНИЦКИЙ

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с очередью. На вход поступает пуассоновский поток требований. Время обслуживания распределено по произвольному закону. Скорость обслуживания имеет вид $f(x)=\alpha+\varepsilon(a_1x+\cdots+a_nx^n)$, где ε – малый параметр и x – количество работы, оставшейся выполнить для обслуживания а) требования, находящегося на обслуживании, при исследовании длины очереди, б) всех требований, находящихся в системе, при исследовании времени ожидания. Для производящей функции стационарного распределения длины очереди и для характеристической функции распределения времени ожидания получены асимптотические разложения в ряд по степеням малого параметра ε.

Методы математической теории массового обслуживания в настоящее время находят весьма широкое применение. Одной из наиболее плодотворных областей их применения является теория надежности сложных систем. Обобщение задач, решенных в этой теории, позволяет сделать важный шаг в исследовании более сложной проблемы, включающей в себя теорию надежности – теории эффективности сложных систем. Многие задачи, постановка которых в рамках теории массового обслуживания и теории надежности кажется несколько искусственной, в теории эффективности имеют непосредственное приложение. К таким задачам относится исследование вероятностных характеристик однолинейной системы с очередью, скорость обслуживания которой имеет произвольную зависимость от количества оставшейся работы, причем вместо работы (в терминологии теории массового обслуживания) в других применениях можно рассматривать сигнал рассогласования и т. д. С этой точки зрения обобщение полученных результатов на произвольный вид зависимости не только не искусственно, а наоборот, полезно во многих приложениях. Однолинейную систему такого вида можно условно назвать обобщенной однолинейной системой масового обслуживания.

В настоящей статье рассматривается зависимость $f(x)$ вида $f(x)=\alpha+\varepsilon f_1(x)$, где ε — малый параметр и $f_1(x)$ — многочлен n-ой степени. Подобная зависимость имеет место, если скорость обслуживания (скорость отрегулировки) меняется плавным образом, постепенно, т. е. зависимость слабая, что определяется малым параметром ε.

Постановка задачи. Имеется однолинейная система массового обслуживания с очередью. На ее вход поступает пуассоновский поток требований с параметром λ [1]. Работа по обслуживанию одного требования (мы пользуемся энергетической интерпретацией процесса обслуживания) является случайной величиной η с законом распределения $H(x)$, $\tau=M\eta$. Скорость обслуживания не является постоянной, а представляется в виде $\alpha+\varepsilon f_1(x)$, где ε — малый параметр, $f_1(x)$ — произвольная функция от x, а x — оставшееся количество работы для обслуживания требования. Таким образом скорость обслуживания зависит от количества работы, еще необходимой выполнить для обслуживания требования, и эта зависимость небольшая, что определяет появление малого параметра ε. Такие задачи часто возникают в практике и их изучение представляет как теоретический, так и практический интерес. Требуется определить стационарное распределение длины очереди. Для решения этой задачи используется метод дифференциальных уравнений [2], [3].

Составление дифференциальных уравнений. Обозначим через $\xi(t)$ величину работы в момент t, которую еще необходимо выполнить для обслуживания требования, которое система обслуживает в этот момент, если такое имеется. Введем случайный процесс $\nu(t)$ — число требований в системе в момент времени t. Очевидно, что векторный случайный процесс

$$\zeta(t)=\{\nu(t),\ \xi(t)\}$$

является марковским. Обозначим его стационарное распределение

$$\varphi_0=\mathbf{P}_0=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\nu(t)=0\},\quad \varphi_k(x)=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\nu(t)=k,\ \xi(t)<x\},\quad k\geqslant 1.$$

Теорема 1. *Функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\lambda\varphi_0=f(0)\,\varphi_1'(0), \tag{1}$$

$$f(x)\,\varphi_1'(x)-\lambda\varphi(x)-f(0)\,\varphi_1'(0)+f(0)\,\varphi_2'(0)\,H(x)+\lambda\varphi_0 H(x)=0, \tag{2}$$

$$f(x)\,\varphi_i'(x)-\lambda\varphi_i(x)-f(0)\,\varphi_i'(0)+f(0)\,\varphi_{i+1}'(0)\,H(x)+\lambda\varphi_{i-1}(x)=0. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала уравнение (1). Пусть $\nu(t+h)=0$. Тогда либо в момент времени t $\nu(t)=0$ и при этом за время от t до $t+h$ ни одно требование не поступило, либо в момент времени t в системе находилось одно требование, которое за интервал времени длины должно покинуть систему ($\nu(t)=1$, $\xi(t)<f(0)\,h$, так как скорость обслуживания можно интерпретировать как правую часть с обратным знаком дифференциального уравнения

$$\frac{d\xi(t)}{dt}=-f\big(\xi(t)\big), \tag{4}$$

т. е. работа уменьшается по закону, описываемому этим дифференциальным уравнением, а из (4) следует $\frac{0-\xi(t)}{h}>-f(0)$, откуда и получаем

$\xi(t) < f(0)\,h$. Остальные события имеют вероятность порядка малости более высокого, чем h. Формула полной вероятности дает:

$$\varphi_0 = (1-\lambda h)\,\varphi_0 + \varphi_1\,[f(0)\,h] + o(h)$$

или

$$\lambda\varphi_0 = \frac{\varphi_1\,[f(0)\,h]\,f(0)}{f(0)\,h} + o(1).$$

Устремив h к нулю, немедленно приходим к формуле (1). Одновременно получается существование производной $\varphi_i'(0)$.

Рассмотрим $i=1$. Если $\nu(t+h)=1$ и $\xi(t+h) < x$, то это означает (если пренебречь событиями с общей вероятностью более высокого порядка малости, чем h), что осуществилось одно из следующих трех взаимноисключающихся событий:

1. За время от t до $t+h$ не поступило ни одного требования, в момент t в системе находилось одно требование и до конца обслуживания этого требования в момент t осталось количество работы, меньшее $x+f(x)\,h$ $\Big($так как из уравнения (4) $\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h} \approx -f\big(\xi(t)\big)$, то отсюда $\frac{x-\xi(t)}{h} >$ $> -f(x)$, что и означает $\xi(t) < x+f(x)\,h\Big)$, но большее $f(0)\,h$ $\Big($иначе обслуживание этого требования закончилось бы до момента $t+h$, как видно из вывода уравнения $(1)\Big)$.

2. В момент времени t в системе находилось два требования, но для одного из них, которое находилось на обслуживании, осталось выполнить работы не больше, чем $f(0)\,h$, чтобы оно покинуло систему; для обслуживания требования, которое, в момент t находилось в состоянии ожидания, необходимо выполнить работу, меньшую $x+f(0)\;(h-\Theta)$ (Θ обозначает время с момента t до ухода вышеуказанного требования).

3. В момент времени t в системе не было требований, в интервале $(t,\ t+h)$ поступило требование, для обслуживания которого нужно выполнить работу, меньшую $x+f(0)\,(h-\Theta_1)$ (Θ_1 обозначает время с момента t до момента поступления указанного требования).

Если x — точка, в которой $H(x)$ дифференцируема, то

$$H\big(x+f(0)\;(h-\Theta)\big) = H(x) + o(h),$$

$$H\big(x+f(0)\;(h-\Theta_1)\big) = H(x) + o(h).$$

По формуле полной вероятности

$$\varphi_1(x) = (1-\lambda h)\Big[\varphi_1\big(x+f(x)\,h\big) - \varphi_1\big(f(0)\,h\big)\Big] + \varphi_2\big(f(0)\,h\big)H(x) +$$
$$+\lambda h\varphi_0\,H(x) + o(h)$$

или

$$\frac{\varphi_1\big(x+f(x)\,h\big)-\varphi_1(x)}{h} - \lambda\varphi_1\big(x+f(x)\,h\big) - \frac{\varphi_1\big(f(0)\,h\big)}{h} +$$
$$+\frac{\varphi_2\big(f(0)\,h\big)}{h}\;H(x) + \lambda\varphi_0\,H(x) = o(1).$$

Очевидно, что можно переходить к пределу при $h \to 0$. В пределе получаем (2). Аналогичным путем доказываются соотношения (3) при $i \geqslant 2$. Теорема доказана.

В нашем случае
$$f(x) = \alpha + \varepsilon f_1(x),$$
где
$$f_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1.$$
Система дифференциальных уравнений (1—3) перепишется в виде:
$$\left.\begin{aligned} &\lambda\varphi_0 = \alpha\varphi_1'(0), \\ &\left(\alpha + \varepsilon f_1(x)\right)\ \varphi_1'(x) - \lambda\varphi_1(x) - \alpha\varphi_1'(0) + \alpha\varphi_2'(0)\ H(x) + \lambda\varphi_0\ H(x) = 0, \\ &\left(\alpha + \varepsilon f_1(x)\right)\ \varphi_i'(x) - \lambda\varphi_i(x) - \alpha\varphi_i'(0) + \alpha\varphi_{i+1}'(0)\ H(x) + \lambda\varphi_{i-1}(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Введем производящую функцию
$$A(z,\ x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x)\, z^i.$$

Умножая i-тое уравнение на z^i и суммируя, получаем следующее уравнение для $A(z,\ x)$:
$$\begin{aligned} &\alpha \frac{\partial A(z,\ x)}{\partial x} + \varepsilon\,(a_n x^n + \cdots + a_1 x)\, \frac{\partial A(z,\ x)}{\partial x} - \lambda\,(1-z)\, A(z,\ x) = \\ &= \alpha \cdot \frac{\partial A(z,\ 0)}{\partial x} \left[1 - \frac{H(x)}{z}\right] - \lambda\,(1-z)\,\varphi_0\,[1 - H(x)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Применяя к этому уравнению преобразование Лапласа—Стильтьеса, имеем:
$$\left.\begin{aligned} &[\alpha s - \lambda\,(1-z)]\, \tilde{a}(z,\ s) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i \frac{\partial^{(i)} s\tilde{a}(z,\ s)}{\partial s^i} = \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \alpha \frac{\partial A(z,\ 0)}{\partial x} \left[1 - \frac{\tilde{h}(s)}{z}\right] - \lambda\,(1-z)\,\varphi_0\,[1 - \tilde{h}(s)] \right\} + \varphi_0\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$
где
$$\tilde{a}(z,\ s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} A(z,\ x)\, dx, \quad \tilde{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dH(x).$$

При этом мы воспользовались следующим свойством преобразования Лапласа—Стильтьеса:
$$\int_0^{\infty} e^{-sx} x^n f'(x)\, dx = (-1)^n \frac{\partial^{(n)} s\tilde{\varphi}(s)}{\partial s^n}, \quad \text{где} \quad \tilde{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx. \tag{7'}$$

Действительно,
$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x)\, dx = s\,\tilde{\varphi}(s) - f(0).$$

Дифференцируя обе части этого равенства по s, приходим к (7′). Все условия для возможности дифференцирования интеграла по параметру в нашем случае выполнены. Мы получили относительно $\tilde{a}(z,\ s)$ дифференциальное уравнение в частных производных n-ого порядка с малым параметром при производных. Естественно искать решение этого уравнения в виде ряда по малому параметру ε

$$\tilde{a}(z,\ s),\quad \varphi_0,\quad \frac{\partial A(z,\ 0)}{\partial x},$$

представляем рядами

$$\tilde{a}(z,\ s)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\tilde{a}_i(z,\ s);\quad \varphi_0=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\varphi_0^{(i)};\quad \frac{\partial A(z,\ 0)}{\partial x}=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\,\frac{\partial A_i(z,\ 0)}{\partial x}$$

и подставляем в уравнение (7). Тогда для $\tilde{a}_i(z,\ s)$ получаем уравнение:

$$\left.\begin{aligned}&[\alpha s-\lambda(1-z)]\,\tilde{a}_i(z,\ s)=\frac{1}{s}\left\{\alpha\,\frac{\partial A_i(z,\ 0)}{\partial x}\left[1-\frac{\tilde{h}(s)}{z}\right]-\lambda(1-z)\,\varphi_0^{(i)}[1-\tilde{h}(s)]+\right.\\&\qquad\left.+\alpha s\varphi_0^{(i)}-s\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\,a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,\ s)}{\partial s^j}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

В левой части стоит произведение $\alpha s-\lambda(1-z)$ на функцию, аналитическую в правой полуплоскости, т. е. при $\mathrm{Re}\ \{s\}>0$. Следовательно, при $s=\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}$ левая часть обращается в нуль. Записав условие равенства нулю для правой части этого равенства, будем иметь:

$$\alpha\,\frac{\partial A_i(z,\ 0)}{\partial x}\left[1-\frac{\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)}{z}\right]-\lambda(1-z)\,\varphi_0^{(i)}\left[1-\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)\right]+\lambda(1-z)\,\varphi_0^{(i)}-$$

$$-\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\,a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,\ s)}{\partial s^j}\Bigg|_{s=\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}}=0,$$

откуда

$$\alpha\,\frac{\partial A_i(z,\ 0)}{\partial x}=\frac{\lambda z(1-z)\varphi_0^{(i)}\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)-\frac{\lambda z(1-z)}{\alpha}\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^j\,a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,\ s)}{\partial s^j}\Bigg|_{s=\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}}}{\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)-z}.\quad(9)$$

Подстановка в равенство (8) дает

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{a}_i(z,\ s)=\frac{1}{s\left(\alpha s-\lambda(1-z)\right)}\left\{\frac{\lambda(1-z)\varphi_0^{(i)}\left[z\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)-\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)+z-\tilde{h}(s)z\right]}{\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)-z}-\right.\\&\qquad-\frac{\left(z-\tilde{h}(s)\right)\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)\,a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,\ s)}{\partial s^j}\Bigg|_{s=\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}}}{\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)-z}+\\&\qquad\left.+\alpha s\varphi_0^{(i)}-s\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\,a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,\ s)}{\partial s^j}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(9')$$

$\psi(z)$ также представляем в виде

$$\psi(z)=\psi_0(z)+\varepsilon\psi_1(z)+\cdots+\varepsilon^i\psi_i(z)+\cdots$$

Тогда для $\psi_i(z)$ из (8) получаем следующее выражение:

$$\psi_i(z)=\frac{\alpha}{\lambda z}\,\frac{\partial A_i(z,0)}{\partial x}-\frac{1}{\lambda(1-z)}\lim_{s\to 0} s\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,s)}{\partial s^j}.$$

При условии существования определенного числа моментов у случайной величины — времени обслуживания — (порядка $i+n$) выражение

$$\frac{1}{\lambda(1-z)}\lim_{s\to 0} s\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,s)}{\partial s^j}$$

равно нулю. Следовательно,

$$\psi_i(z)=\frac{\alpha}{\lambda z}\,\frac{\partial A_i(z,0)}{\partial x}\quad\text{или}\quad\psi(z)=\frac{\alpha}{\lambda z}\,\frac{\partial A(z,0)}{\partial x}. \tag{10}$$

Так как $\psi(1)=1$ и $\psi_0(1)=1$, то отсюда следует, что $\psi_i(1)=0$ для $i\geqslant 1$. Таким образом,

$$\frac{\partial A_i(1,0)}{\partial x}=0. \tag{11}$$

Устремляя в (9) $z\to 1$, получаем выражение для $\varphi_0^{(i)}$:

$$\varphi_0^{(i)}=\frac{1}{\alpha}\lim_{z\to 1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,s)}{\partial s^j}\Bigg|_{s=\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}}.$$

Теперь предположим, что выражение

$$\frac{1}{\lambda(1-z)}\lim_{s\to 0} s\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,s)}{\partial s^j}$$

не равно нулю. Тогда вместо (11) будем иметь

$$\frac{\alpha}{\lambda}\,\frac{\partial A_i(1,0)}{\partial x}-\frac{1}{\lambda}\lim_{z\to 1}\frac{1}{1-z}\lim_{s\to 0} s\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,s)}{\partial s^j}=0.$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi_0^{(i)}=\lim_{z\to 1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,s)}{\partial s^j}\Bigg|_{s=\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}}-$$

$$-\frac{1-\frac{\lambda\tau}{\alpha}}{\lambda}\lim_{z\to 1}\frac{1}{1-z}\lim_{s\to 0} s\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\,\frac{\partial^j s\tilde{a}_{i-1}(z,s)}{\partial s^j}. \tag{13}$$

Если в этом выражении первая сумма конечна, то есть, асимптотическое разложение имеет место до членов i-того порядка включительно, то это значит, что вторая сумма равна нулю, что непосредственно видно из (13).

Таким образом, $\psi(z)$ разлагается в ряд по малому параметру ε и коэффициенты разложения определяются по рекуррентным формулам. Легко видеть, что

$$\psi_0(z) = \frac{\left(1-\frac{\lambda\tau}{\alpha}\right)(1-z)\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)}{\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)-z},$$

$$\tilde{a}_0(z,s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dA_0(z,x) = \frac{\lambda(1-z)\left(1-\frac{\lambda\tau}{\alpha}\right)}{s\left(\alpha s-\lambda(1-z)\right)}\left\{\frac{z\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)}{\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)-z}\left[1-\frac{\tilde{h}(s)}{z}\right]-1+\tilde{h}(s)\right\}+$$
$$+\frac{\alpha-\lambda\tau}{\alpha s-\lambda(1-z)}. \tag{14}$$

Например, найдем первый член разложения в случае $n=1$.

$$\varphi_0^{(1)} = \frac{\lambda\tau_2}{2\alpha^2}, \quad \text{где} \quad \tau_2 = \int_0^\infty x^2\,dH(x),$$

$$\psi_1(z) = \frac{(1-z)\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)\left.\left[\frac{\lambda\tau_2}{2\alpha^2}+\frac{1-z}{\alpha}a_1\frac{\partial s\tilde{a}_0(z,s)}{\partial s}\right]\right|_{s=\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}}}{\tilde{h}\left(\frac{\lambda(1-z)}{\alpha}\right)-z}. \tag{15}$$

В рассматриваемой задаче представляет интерес также исследование стационарного распределения времени ожидания в случае, когда скорость обслуживания $f(x)$ зависит от x — количества работы, необходимой для выполнения всех требований, находящихся в системе, если новые требования не поступают. Также, как и для длины очереди рассмотрим слабую зависимость, то есть $f(x)$ представляется в виде:

$$f(x) = \alpha + \varepsilon(a_1 x + \cdots + a_n x^n).$$

Построение случайного процесса. Обозначим через $\gamma(t)$ случайный процесс, равный в каждый момент времени t количеству работы, которое нужно выполнить с момента t до полного освобождения системы от требований, поступивших в очередь до момента t включительно. Если в момент t система свободна, то $\gamma(t)=0$. Для любого момента t по определению $\gamma(t-0)$ равно сумме оставшейся работы и работы по обслуживанию требований, прибывших до момента t. В промежутках между поступлениями требований $\gamma(t)$ изменяется по детерминированному закону, описываемому дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -f\left(\gamma(t)\right). \tag{15'}$$

В моменты поступления требований $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$

$$\gamma(t_n+0) = \gamma(t_n-0) + \gamma_n,$$

где γ_n обозначает количество работы по обслуживанию требования, поступившего в момент t_n. Процесс $\gamma(t)$ скачком изменяет свою величину в моменты прибытия требований, остается неизменным до прибытия очередного требования, когда он достиг нулевого значения, убывает в соответствии с дифференциальным уравнением (15′), пока $\gamma(t)>0$. Процесс $\gamma(t)$ является марковским. Действительно, сколько требований появится от момента t до момента $t+s$, не зависит от того, как много требований поступило до момента t. Значение же $\gamma(t+s)$ определяется, во-первых, величиной $\gamma(t)$, во-вторых, числом требований, которые поступили в промежутке $(t, t+s)$ и, в-третьих, суммарным количеством работы по обслуживанию этих вновь поступивших требований. Все эти три величины не изменяются от того, что станут известными значения $\gamma(\tau)$ в моменты, предшествующие t.

Интегро-дифференциальное уравнение процесса

Введем функцию распределения

$$\mathbf{F}(x, t)=\mathbf{P}\{\gamma(t)<x\}.$$

$F(x, t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t}=f(x)\frac{\partial F(x, t)}{\partial x}-\lambda F(x, t)+\lambda\int_0^x H(x-y)\,d_yF(y, t). \qquad (16)$$

Доказательство. Рассмотрим событие $\gamma(t+h)<x$. Оно может произойти несколькими несовместимыми способами. Укажем только те из них, которые имеют вероятности не выше порядка $O(h)$.

1. $\gamma(t)<x+f(x)h$, в отрезке $(t, t+h)$ не поступило ни одного требования. Вероятность этого события равна $(1-\lambda h)F(x+f(x)h, t)$.

2. $\gamma(t)=y\ (0<y<x)$, в отрезке $(t, t+h)$ поступило новое требование, которое для своего обслуживания требует времени $\gamma<x-y$. Вероятность этого события равна по формуле полной вероятности

$$\lambda h\int_0^x H(x-y)\,d_yF(y, t).$$

Так как остальные возможности имеют вероятность $o(h)$, то

$$F(x, t+h)=(1-\lambda h)F(x+f(x)h, t)+\lambda h\int_0^x H(x-y)\,d_yF(y, t)+o(h). \qquad (17)$$

Легко доказать, что $F(x, t)$ имеет производные справа по второму аргументу. Тогда из (17) непосредственно следует интегро-дифференциальное уравнение. В стационарном случае имеем

$$f(x)\frac{dF(x)}{dx}-\lambda F(x)+\lambda\int_0^x H(x-y)\,dF(y)=0. \qquad (18)$$

В общем случае произвольной функции $f(x)$ исследование этого уравнения (являющегося уравнением Вольтера) встречается с определенными трудностями. Во многих практически важных задачах, аналогично предыдущему, зависимость $f(x)$ от x является небольшой и может быть представлена в виде:

$$f(x)=\alpha+\varepsilon(a_1x+\cdots+a_nx^n),$$

ε здесь по-прежнему является малым параметром. Уравнение (18) перепишется в виде:

$$[\alpha+\varepsilon(a_1x+\cdots+a_nx^n)]\frac{dF(x)}{dx}-\lambda F(x)+\lambda\int_0^x H(x-y)\,dF(y)=0. \qquad (19)$$

Обозначим

$$\tilde{a}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x),\qquad \tilde{h}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x).$$

Применяя к уравнению (19) преобразование Лапласа—Стильтьеса, получаем

$$\alpha s\tilde{a}(s)+s\varepsilon\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\frac{\partial^j\tilde{a}(s)}{\partial s^j}-\lambda\tilde{a}(s)+\lambda\tilde{a}(s)\tilde{h}(s)-\alpha sF(0)=0. \qquad (20)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε:

$$\tilde{a}(s)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\tilde{a}_i(s),\quad F(0)=P_0=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iP_{0i},\quad F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iF_i(x), \qquad (21)$$

где $\tilde{a}_0(s)$ есть известная формула Хинчина для преобразования Лапласа—Стильтьеса стационарного распределения времени ожидания

$$\tilde{a}_0(s)=\frac{1-\frac{\lambda\tau}{\alpha}}{1-\frac{\lambda}{\alpha}\cdot\frac{1-\tilde{h}(s)}{s}}\quad\text{и}\quad P_{00}=1-\frac{\lambda\tau}{\alpha},\ \tilde{a}_0(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF_0(x). \qquad (21')$$

Подставляя (21) в (20), для $a_i(s)$ получаем следующее уравнение:

$$[\alpha s-\lambda+\lambda\tilde{h}(s)]\,\tilde{a}_i(s)=\alpha sP_{0i}-s\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\frac{d^j\tilde{a}_{i-1}(s)}{ds^j}. \qquad (22)$$

Отсюда для $\tilde{a}_i(s)$ получается рекуррентная формула

$$\tilde{a}_i(s)=\frac{\alpha sP_{0i}-s\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\frac{d^j\tilde{a}_{i-1}(s)}{ds^j}}{\alpha s-\lambda+\lambda\tilde{h}(s)}. \qquad (23)$$

Остается определить P_{0i}. Разделим обе части (22) на s и устремим s к нулю. Тогда имеем равенство

$$(\alpha-\lambda\tau)\,\tilde{a}_i(0)=\alpha P_{0i}-\lim_{s\to0}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\frac{d^j\tilde{a}_{i-1}(s)}{ds^j}.$$

Но, так как $\tilde{a}(0)=1$ и $\tilde{a}_0(0)=1$, то $\tilde{a}_i(0)=0$ для $i\geqslant1$. Отсюда

$$P_{0i}=\frac{1}{\alpha}\lim_{s\to0}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\frac{d^j\tilde{a}_{i-1}(s)}{ds^j}. \qquad (24)$$

Например,

$$P_{01}=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}a_j\mu_j,\quad\text{где}\quad \mu_j=\int_0^\infty x^j\,dF_0(x),$$

$$\tilde{a}_1(s)=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_j\mu_j-\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\frac{d^j\tilde{a}_0(s)}{ds^j}}{1-\frac{\lambda}{\alpha}\cdot\frac{1-\tilde{h}(s)}{s}}. \qquad (25)$$

Полученная рекуррентная формула позволяет определить $a(s)$, а следовательно, и $F(x)$.

Замечание. Для первой задачи время ожидания находится несложным способом. А именно, время обслуживания будет уже не случайной величиной η, а случайной величиной ζ, определяемой по формуле

$$\zeta = \int_0^{\eta} \frac{dx}{f(x)}.$$

Все остальное остается без изменений и имеет место формула Хинчина (21′), в которую вместо $\tilde{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x)$ нужно подставить

$$\tilde{\Omega}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dP\{\zeta < x\}.$$

Таким образом, в случае слабой зависимости скорости обслуживания от количества оставшейся работы для производящей функции стационарного распределения длины очереди и характеристической функции времени ожидания можно определять асимптотические разложения по малому параметру ε, причем коэффициенты разложения определяются по рекуррентным формулам.

Автор выражает глубокую благодарность И. Н. Коваленко, под непосредственным руководством которого была выполнена эта работа.

Москва

Поступило в редакцию 26.VII.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Работы по математической теории массового обслуживания, Физматгиз, 1963.
2. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Лекции по теории массового обслуживания, Киев, 1963.
3. L. Takács, Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes, Acta Mathematica Acad. Sci. Hung., VI, 1—2 101—130, 1955.

APIBENDRINTOS VIENOS LINIJOS SISTEMOS TIKIMYBINIŲ CHARAKTERISTIKŲ ASIMPTOTINIS TYRIMAS

V. A. IVNICKIS

(*Reziumė*)

Nagrinėjama masinio aptarnavimo sistema $M|G|1$ (Kendolo pažymėjimas) su eile, kur aptarnavimo greitis $f(x)=\alpha+\varepsilon f_1(x)$ (ε – mažas parametras, x – darbo kiekis, likęs aptarnavimui duotu momentu, $f_1(x)$ – tos eilės polinomas).

Gauta eilės ilgio stacionaraus pasiskirstymo generuojančios funkcijos bei laukimo laiko pasiskirstymo charakteringosios funkcijos asimptotiniai išdėstymai eilute parametro ε laipsniais.

ASYMPTOTIC INVESTIGATION OF PROBABILITY CHARACTERISTICS OF A GENERALIZED ONE-LINE SYSTEM

V. A. IVNITSKI

(*Summary*)

The queuing service system $M|G|1$ (in Kendall's notations) with the service speed $f(x)=\alpha+\varepsilon f_1(x)$ (ε – small parameter, x – amount of work left for service $f_1(x)$ an n-degree polynomial) is viewed.

Asymptotic expansion with respect to the degrees of ε of the generating function of stationary distribution of the length of the queue and the characteristic function of the time of waiting are found.