V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3

1965

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ k-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. В. ПЕТРОВ

§ 1. Введение

Пусть k — произвольное фиксированное натуральное число.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве, будем называть *k-последовательностью* случайных величин, если число различных функций распределения в соответствующей последовательности функций распределения $V_1(x), V_2(x), \ldots$ равно k.

Понятие k-последовательности случайных величин является естественным и наиболее простым обобщением понятия последовательности одинаково распределенных случайных величин, для которой $V_j(x) \equiv V(x)$ $(j=1, 2, \ldots)$ и $k=1$. Среди последовательностей неодинаково распределенных случайных величин k-последовательности образуют достаточно интересный класс. В частности, формулировки предельных теорем для сумм неодинаково распределенных случайных величин становятся значительно более простыми и прозрачными, если ограничиться рассмотрением k-последовательностей.

В настоящей работе содержится ряд предельных теорем для сумм независимых случайных величин, образующих k-последовательность и обладающих конечными дисперсиями.

Пусть

$$X_1, X_2, \ldots \tag{1}$$

k-последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что последовательность (1) содержит бесконечную подпоследовательность случайных величин с невырожденными распределениями. Таким образом, мы исключаем из рассмотрения тот случай, когда последовательность (1) содержит лишь конечное число случайных величин с невырожденными распределениями.

Введем следующие обозначения:

$$V_j(x)=P(X_j<x),\ v_j(t)=Ee^{itX_j},\ \sigma_j^2=E(X_j^2)-(EX_j)^2\ (j=1, 2, \ldots),$$

$$s_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2,\ Z_n=\frac{1}{s_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-EX_j),\ F_n(x)=P(Z_n<x).$$

В силу сделанных предположений имеем

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \tag{2}$$

Из (2) и теоремы Линдеберга получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left| F_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right| = 0. \tag{3}$$

Для любой k-последовательности независимых случайных величин с конечными дисперсиями имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{s_n^2}{n} < \infty. \tag{4}$$

Содержащиеся в последовательности функций распределения (ф.р.)

$$V_1(x),\ V_2(x),\ \ldots \tag{5}$$

k различных ф.р. будем обозначать через

$$W_1(x),\ \ldots,\ W_k(x).$$

Через n_q обозначим число ф.р., равных $W_q(x)$, среди n первых членов $V_1(x), \ldots, V_n(x)$ последовательности (5). Здесь $q=1, \ldots, k$. Далее, через $w_q(t)$ будет обозначена характеристическая функция (х.ф.), соответствующая ф. р. $W_q(x)$.

Через

$$W_1^*(x),\ \ldots,\ W_l^*(x)$$

обозначим те из ф.р. $W_1(x), \ldots, W_k(x)$, которые не вырождены и встречаются в последовательности (5) бесконечное число раз. Очевидно, имеем $1 \leqslant l \leqslant k$.

Буквы $c, c_1, c_2, \ldots$ означают некоторые положительные постоянные.

Введенными здесь обозначениями мы будем пользоваться на всем протяжении статьи.

§ 2. Локальная предельная теорема для решетчатых распределений

Рассмотрим k-последовательность (1) независимых случайных величин, принимающих лишь целочисленные значения и имеющих конечные дисперсии. В дополнение к введенным ранее обозначениям положим

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} EX_j, \quad P_n(N) = P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j = N\right).$$

Через H_r обозначим максимальный шаг распределения $W_r^*(x)$ $(r=1, \ldots, l)$.

Будем говорить, что последовательность (1) *удовлетворяет локальной теореме в усиленной форме* (*л.т.у.*), если соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup_N \left| s_n P_n(N) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(N-A_n)^2}{2s_n^2}\right\} \right| = 0 \tag{6}$$

имеет место как для исходной последовательности, так и для любой последовательности, полученной из исходной изменением распределений конечного числа членов (с сохранением условия целочисленности и условия конечности дисперсий).

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* (1) *удовлетворяла л.т.у., необходимо и достаточно условие**)

$$\text{о. н. д. } (H_1, \ldots, H_l)=1. \tag{7}$$

При доказательстве этой теоремы мы можем без ограничения общности считать, что

$$P(X_j=0)\geqslant P(X_j=m) \text{ для всех } j \text{ и } m. \tag{8}$$

Доказательство необходимости. Предположим, что рассматриваемая последовательность случайных величин удовлетворяет л.т.у. Пусть о.н.д. $(H_1, \ldots, H_l)=d$. Случайная величина с ф.р. $W_r^*(x)$ принимает лишь значения a_r+mH_r ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Поскольку значению, равному нулю, соответствует положительная вероятность, имеем $a_r=m_r H_r$, где m_r — некоторое целое число. Таким образом, все возможные значения случайной величины с ф.р. $W_r^*(x)$ ($r=1, \ldots, l$) можно записать в виде sH_r, где $s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В силу л.т.у. соотношение (6) выполнено для суммы Σ_n случайных величин с конечными дисперсиями, полученной из $X_1+\ldots+X_n$ при таком изменении распределений конечного числа слагаемых, что Σ_n принимает лишь значения вида sd, где s целое. С другой стороны, при $d\geqslant 2$ соотношение (6) для такой суммы случайных величин не может выполняться, так как $P(\Sigma_n=N)=0$ для всякого $N=md+1$, где m целое. Поэтому $d=1$.

Доказательство достаточности. Обозначим через $f_n(t)$ характеристическую функцию случайной величины Z_n, определенной в § 1. Имеем

$$f_n(t)=\exp\left\{-\frac{itA_n}{s_n}\right\}\prod_{j=1}^{n} v_j\left(\frac{t}{s_n}\right).$$

Положим $z=\dfrac{N-A_n}{s_n}$. По формуле обращения

$$s_nP_n(N)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}\left\{s_n\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itN}\prod_{j=1}^{n}v_j(t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itz-\frac{t^2}{2}}\,dt\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi s_n}^{\pi s_n}e^{-itz}f_n(t)\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itz-\frac{t^2}{2}}\,dt\right\}.$$

Отсюда

$$\sup_N\left|s_nP_n(N)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\right|\leqslant I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где

$$I_1=\int_{|t|<L}\left|f_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|dt,$$

$$I_2=\int_{L<|t|<\varepsilon s_n}|f_n(t)|\,dt,\quad I_3=\int_{\varepsilon s_n<|t|<\pi s_n}|f_n(t)|\,dt,\quad I_4=\int_{|t|>L}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

L и ε — некоторые положительные постоянные. За счет выбора достаточно большого L интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым. Из (3) и прямой предельной теоремы для характеристических функций следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_1=0$ при любом фиксированном L.

*) Символ о. н. д. $(H_1, \ldots, H_l)$ означает общий наибольший делитель чисел $H_1, \ldots, H_l$.

Оценим интеграл I_2. Имеем

$$|f_n(t)|=\prod_{q=1}^{k}\left|w_q\left(\frac{t}{s_n}\right)\right|^{n_q}.$$

Из формулы Тейлора вытекает, что при $|t|<\varepsilon s_n$ и достаточно малом $\varepsilon>0$

$$\left|w_q\left(\frac{t}{s_n}\right)\right|\leqslant 1-\frac{b_q^2t^2}{4s_n^2}\leqslant\exp\left\{-\frac{b_q^2t^2}{4s_n^2}\right\}$$

для каждого $q\,(q=1,\ \ldots,\ k)$. Здесь b_q^2 — дисперсия распределения $W_q(x)$, а ε можно выбрать не зависящим от q, поскольку множество значений q конечно. Итак, существует такое $\varepsilon>0$, что

$$|f_n(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{t^2}{4s_n^2}\sum_{q=1}^{k}n_qb_q^2\right\}=e^{-\frac{t^2}{4}} \tag{9}$$

при $|t|<\varepsilon s_n$. Поэтому

$$I_2\leqslant\int\limits_{|t|>L}e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt,$$

так что интеграл I_2 может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого значения L.

Осталось оценить интеграл I_3. Обозначим через d общий наибольший делитель всех целых значений m, которым соответствует положительная вероятность хотя бы в одном из распределений $W_1^*(x),\ \ldots,\ W_l^*(x)$. Общий наибольший делитель значений, принимаемых с положительными вероятностями случайной величиной с ф. р. $W_r^*(x)$, очевидно, кратен d при каждом r $(r=1,\ \ldots,\ l)$. Так как H_r — максимальный шаг распределения, в котором значению, равному нулю, соответствует положительная вероятность, то каждое из чисел $H_1,\ \ldots,\ H_l$ делится на d. Отсюда и из (7) следует, что $d=1$. Поэтому общий наибольший делитель всех целых m, для которых

$$\sum_{j=1}^{\infty}P(X_j=m)=\infty, \tag{10}$$

равен единице.

Из последнего утверждения вытекает существование такого положительного числа M_0, что общий наибольший делитель всех целых m, $|m|<M_0$, для которых выполнено условие (10), равен 1. Положим $M=\max\left(M_0,\frac{1}{2\varepsilon}\right)$, где ε — та же положительная постоянная, что и в интеграле I_2. Имеем

$$I_3=s_n\int\limits_{\varepsilon<|t|<\pi}\prod_{j=1}^{n}|v_j(t)|\,dt\leqslant s_n(R_1+R_2),$$

где

$$R_1=\int\limits_{\frac{1}{2M}}^{\pi}\prod_{j=1}^{n}|v_j(t)|\,dt,$$

а R_2 отличается от интеграла R_1 лишь заменой области интегрирования $\left[\frac{1}{2M},\ \pi\right]$ на $\left[-\pi,\ -\frac{1}{2M}\right]$.

Интеграл R_1 оценим с помощью метода, использованного в [1]. Из неравенства $x \leqslant e^{x-1}$, справедливого при всех действительных x, получаем

$$\prod_{j=1}^{n} |v_j(t)| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(|v_j(t)|^2 - 1\right)\right\}.$$

Далее, положим

$$p_{jm} = P(X_j = m), \quad \tilde{p}_{jm} = \sum_{s} p_{j,\, m+s}\, p_{j,\, s}.$$

Имеем

$$|v_j(t)|^2 - 1 = \sum_{m} \tilde{p}_{jm} (\cos mt - 1).$$

Обозначим лежащие на сегменте $\left[\frac{1}{2M}, \pi\right]$ точки вида $\frac{2\pi r}{m}$ $\left(r \text{ и } m \text{ взаимно простых}, 1 \leqslant r \leqslant \left[\frac{m}{2}\right], 2 \leqslant m < M\right)$, взятые в порядке возрастания абсцисс, через $t_1, \ldots, t_\nu$. Очевидно, $t_\nu = \pi$, $t_1 > \frac{1}{2M}$. Полагая

$$\Delta_1 = \left[\frac{1}{2M}, \frac{t_1 + t_2}{2}\right], \quad \Delta_\mu = \left[\frac{t_{\mu-1} + t_\mu}{2}, \frac{t_\mu + t_{\mu+1}}{2}\right]$$

при $\mu = 2, \ldots, \nu - 1$

$$\Delta_\nu = \left[\frac{t_{\nu-1} + t_\nu}{2}, \pi\right]$$

представим интеграл R_1 в виде суммы интегралов по Δ_μ.

Рассмотрим фиксированный сегмент Δ_μ, содержащий точку t_μ. Пусть $t_\mu = \frac{2\pi r_0}{m_0}$. Очевидно,

$$|v_j(t)|^2 - 1 \leqslant -2 \sum{}' \tilde{p}_{jm} \sin^2 \frac{mt}{2} - 2 \sum{}'' \tilde{p}_{jm} \sin^2 \frac{mt}{2},$$

где Σ' — сумма по всем целым m, $|m| < M$, $m \not\equiv 0 \pmod{m_0}$, а Σ'' — сумма по всем целым m, $|m| < M$, $m \equiv 0 \pmod{m_0}$, $m \neq 0$. Минимальное расстояние между точками t_μ не меньше $\frac{2\pi}{M^2}$, поэтому при любом $t \in \Delta_\mu$, $m \not\equiv 0 \pmod{m_0}$, $|m| < M$ и любом целом s имеем $|mt - 2\pi s| > \varepsilon_1$; отсюда $\sin^2 \frac{mt}{2} > \varepsilon_2$ (постоянные $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ положительны и зависят только от M). При $t \in \Delta_\mu$, $m \equiv 0 \pmod{m_0}$, $|m| < M$, $m \neq 0$ получаем $\sin^2 \frac{mt}{2} \geqslant \varepsilon_3 (t - t_\mu)^2$. Поэтому

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (|v_j(t)|^2 - 1) \leqslant -g_n - h_n (t - t_\mu)^2,$$

где

$$g_n = \varepsilon_2 \sum_{j=1}^{n} \sum{}' \tilde{p}_{jm}, \quad h_n = \varepsilon_3 \sum_{j=1}^{n} \sum{}'' \tilde{p}_{jm}.$$

Для рассматриваемой последовательности случайных величин имеем $p_{j0} \geqslant c > 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Отсюда и из замечания, сделанного в связи с (10), следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \infty$. Из (4) получаем $s_n^2 = O(g_n + h_n)$. Для тех n, для которых $g_n \geqslant h_n$, находим

$$s_n \int_{\Delta_\mu} \prod_{j=1}^{n} |v_j(t)|\, dt \leqslant e^{-g_n} s_n \int_{\Delta_\mu} \exp\{-h_n (t - t_\mu)^2\}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant e^{-g_n} O(\sqrt{g_n}) = o(1) \qquad (n \to \infty).$$

Если же $g_n < h_n$, то

$$s_n \int\limits_{\Delta_\mu} \prod_{j=1}^{n} |v_j(t)|\, dt \leqslant e^{-g_n} s_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-h_n(t-t_\mu)^2\}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant e^{-g_n} O(\sqrt{h_n}) \sqrt{\frac{\pi}{h_n}} = o(1) \qquad (n \to \infty).$$

Интеграл R_2, очевидно, допускает такую же оценку, что и R_1. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} I_3 = 0$. Теорема 1 доказана.

Замечания. 1. Как было обнаружено автором уже после получения теоремы 1, эту теорему можно получить также из одного общего результата Ю. А. Розанова [2].

2. Условия применимости локальной предельной теоремы для k-последовательности ранее изучались по предложению автора в дипломной работе Чэнь Хань-фу (ЛГУ, 1961); в этой работе предполагалось выполненным дополнительное условие $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{n_q}{n^\delta} > 0$ ($q=1, \ldots, k$) для некоторого $\delta > 0$.

3. Условие (7) не является необходимым для применимости к последовательности (1) локальной теоремы в слабой форме, т. е. для выполнения соотношения (6) для этой последовательности. В справедливости сделанного утверждения легко убедиться с помощью рассмотренного в [3] примера последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, таких, что X_1 принимает значения 0 и 1 с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$, а X_j при $j \geqslant 2$ принимает значения 0 и 2 с вероятностями, также равными $\frac{1}{2}$. Для этой последовательности, не удовлетворяющей л.т.у., соотношение (6) имеет место, а условие (7) не выполнено.

§ 3. Локальная предельная теорема для плотностей

Если ф. р. $F_n(x)$ абсолютно непрерывна, то ее производная будет обозначаться через $p_n(x)$. Таким образом, $p_n(x)$ есть плотность распределения нормированной суммы случайных величин Z_n.

Условие A. Существует такое N, что плотность распределения $p_N(x)$ ограничена.

Теорема 2. *Для того чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| = 0, \tag{11}$$

необходимо условие А. Если

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n_q}{s_n^\delta} > 0 \qquad (q=1, \ldots, k) \text{ для некоторого } \delta > 0, \tag{12}$$

то условие А достаточно для (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия A для соотношения (11) очевидна. Покажем, что это условие и условие (12) достаточны для (11).

Обозначив через $f_n(t)$ х.ф. случайной величины Z_n, покажем, что $f_n(t)$ абсолютно интегрируема на действительной прямой при всех достаточно больших n. Случайная величина $S_N = \sum_{j=1}^{N} X_j$ имеет х.ф.

$$\prod_{j=1}^{N} v_j(t) = \prod_{q=1}^{k} w_q^{N_q}(t), \tag{13}$$

где N_q — число случайных величин с ф.р. $W_q(x)$ среди $X_1, \ldots, X_N$. Разность $S_N - \tilde{S}_N$ двух независимых одинаково распределенных случайных величин S_N и $\tilde{S}_N$ имеет х.ф. $\prod_{j=1}^{N} |v_j(t)|^2 \geqslant 0$ и ограниченную плотность распределения. По одной теореме о преобразованиях Фурье (см., например, [4], стр. 20—21) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N} |v_j(t)|^2 \, dt < \infty. \tag{14}$$

Любому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $c > 0$, что при $|t| > \varepsilon$ имеем

$$\prod_{q=1}^{k} |w_q(t)|^{2N_q} \leqslant e^{-c}.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $c_1 > 0$, что в области $|t| > \varepsilon$ справедливы неравенства

$$\prod_{q=1}^{k} |w_q(t)|^{n_q} \leqslant \prod_{q=1}^{k} \left(|w_q(t)|^{2N_q}\right)^{\frac{n_q}{2 \max\limits_q N_q}} \leqslant e^{-c_1 s_n^{\delta}} \prod_{q=1}^{k} |w_q(t)|^{2N_q} \tag{15}$$

при достаточно больших n. (При этом мы использовали условие (12).) Из (13)—(15) находим

$$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |v_j(t)| \, dt = O\left(e^{-c_1 s_n^{\delta}}\right) \qquad (n \to \infty). \tag{16}$$

В ходе доказательства теоремы 1 было установлено (см. (9)), что из условия конечности дисперсий вытекает существование такого $\varepsilon > 0$, что $|f_n(t)| \leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}$ при $|t| < \varepsilon s_n$. Полагая $I = \int_{|t|>\varepsilon s_n} |f_n(t)| \, dt$, получаем $\lim_{n\to\infty} I = 0$ в силу (16). Поэтому $f_n(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ при всех достаточно больших n.

Из доказанного следует, что ф.р. $F_n(x)$ имеет при всех достаточно больших n непрерывную при всех x производную $F'_n(x) = p_n(x)$ и что при всех x имеет место формула обращения

$$p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left[f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right] dt.$$

Отсюда

$$\sup_x \left| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leqslant I_1 + I_2 + I_4 + I.$$

Здесь I_1, I_2 и I_4 — интегралы, определенные в § 2. Мы можем использовать полученные в § 2 оценки этих интегралов. Из них и равенства $\lim\limits_{n\to\infty} I=0$ вытекает (11). Теорема 4 доказана.

Укажем более общие, чем в теореме 2, достаточные условия для соотношения (11).

Теорема 3. *Пусть существуют целые положительные числа* p, $m_1, \ldots, m_p$, *удовлетворяющие условиям*

$$1\leqslant p\leqslant k, \quad 1\leqslant m_1<\ldots<m_p\leqslant k, \tag{17}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n_{m_i}}{s_n^\delta}>0 \quad (i=1, \ldots, p) \text{ для некоторого } \delta>0, \tag{18}$$

и такие целые положительные числа $M_1, \ldots, M_p$, *что свертка*

$$\underbrace{W_{m_1}(x) * \ldots * W_{m_1}(x)}_{M_1} * \ldots * \underbrace{W_{m_p}(x) * \ldots * W_{m_p}(x)}_{M_p}$$

абсолютно непрерывна и ее производная ограничена. Тогда имеет место соотношение (11).

Доказательство. Тем же способом, который был использован для доказательства (14), получаем в силу условий теоремы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{p} |w_{m_i}(t)|^{2M_i} dt<\infty.$$

Далее, с помощью (18) находим

$$\prod_{j=1}^{n} |v_j(t)|\leqslant \prod_{i=1}^{p} |w_{m_i}(t)|^{n_{m_i}}\leqslant c_2 e^{-c_3 s_n^\delta} \prod_{i=1}^{p} |w_{m_i}(t)|^{2M_i}$$

при достаточно больших n и $|t|>\varepsilon>0$. Поэтому выполнено соотношение (16). Оставшаяся часть доказательства такова же, что и для теоремы 2.

Если k-последовательность (1) удовлетворяет условию (12), то условие A равносильно любому из следующих условий:

$$A_1) \prod_{j=1}^{M} v_j(t)\in L_1(-\infty, \infty) \text{ при некотором } M;$$

$$A_2) \int\limits_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |v_j(t)|\, dt=o\left(\frac{1}{s_n}\right) \qquad (n\to\infty)$$

при любом фиксированном $\varepsilon>0$.

В ходе доказательства теоремы 2 уже было установлено утверждение о том, что из (12) и условия A вытекают условия A_1 и A_2 (и даже более сильное условие (16)). Тот факт, что при выполнении какого-либо из условий A_1 и A_2 будет выполнено и условие A, легко обнаружить с помощью формулы обращения.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: *если выполнено условие* (12), *то любое из условий* A, A_1 и A_2 *является необходимым и достаточным для выполнения соотношения* (11).

Условие типа A_2 было введено в статье [5]; там было показано, что при выполнении некоторых ограничений на поведение моментов подобное условие является достаточным для применимости к последовательности неодинаково распределенных независимых случайных величин локальной теоремы для плотностей и ряда ее уточнений. Для k-последовательности, удовлетворяющей условию (12), такое условие оказывается необходимым и достаточным для выполнения (11).

§ 4. Уточнение локальной предельной теоремы для решетчатых распределений

Рассмотрим k-последовательность (1) независимых случайных величин, принимающих лишь целочисленные значения и удовлетворяющих условию (8). Обозначим через n_r^* $(r=1, \ldots, l)$ число случайных величин с ф. р. $W_r^*(x)$ среди n первых величин $X_1, \ldots, X_n$ последовательности (1).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (7),

$$E|X_j|^{\mu}<\infty \quad (j=1,\ 2,\ \ldots) \text{ при некотором целом } \mu\geqslant 3, \tag{19}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{s_n^2}{n}>0, \tag{20}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n_r^*}{s_n^{\delta}}>0 \qquad (r=1,\ \ldots,\ l) \text{ для некоторого } \delta>0. \tag{21}$$

Тогда

$$s_n P_n(N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}+\sum_{\nu=1}^{\mu-2}\frac{P_{\nu n}(-\varphi(z))}{n^{\frac{\nu}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{\mu-2}{2}}}\right)$$

при $n\to\infty$ равномерно относительно $N(-\infty<N<\infty)$.

Здесь

$$z=\frac{N-A_n}{s_n},$$

A_n и $P_n(N)$ — те же, что и в § 2,

$$P_{\nu n}\left(-\varphi(z)\right)=\frac{d}{dz}P_{\nu n}\left(-\Phi(z)\right)=u_{3\nu,n}(z)\,e^{-\frac{z^2}{2}},$$

$u_{3\nu,n}(z)$ — известный полином*) степени 3ν относительно z с коэффициентами, зависящими только от моментов случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ до порядка $\nu+2$ включительно. Коэффициенты полинома $u_{3\nu,n}(z)$ в силу условий (19) и (20) ограничены равномерно по всем достаточно большим значениям n.

Для доказательства теоремы 4 достаточно обнаружить, что при выполнении условий этой теоремы будут выполнены условия теоремы из работы [7]. Условия (19) и (20) вместе с тем фактом, что последовательность (1) есть k-последовательность, обеспечивают выполнение условий B_1 и B_2 последней теоремы. Поэтому нам достаточно показать, что выполнено условие A из [7], состоящее в том, что общий наибольший делитель всех целых m, для которых

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{j=1}^{n}P(X_j=0)\,P(X_j=m)=\infty,$$

*) В работе [6] указаны явные формулы для функций $P_{\nu n}(-\varphi)$ и $P_{\nu n}(-\Phi)$ при любом ν.

равен 1. Из (4) и (20) вытекает, что условие (21) равносильно условию

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n_r^*}{n^\delta} > 0 \qquad (r=1, \ldots, l) \text{ для некоторого } \delta>0. \tag{22}$$

(В общем случае, когда условие (20) не предполагается выполненным, условие (21) может выполняться и при невыполнении (22).) В ходе доказательства теоремы 1 было установлено, в качестве следствия условия (7), что общий наибольший делитель всех целых значений m, которым соответствует положительная вероятность хотя бы в одном из распределений $W_1^*(x), \ldots, W_l^*(x)$, равен единице. Отсюда и из (22) вытекает требуемое утверждение. Теорема 4 доказана.

§ 5. Уточнения локальной предельной теоремы для плотностей

Мы будем пользоваться здесь обозначениями §§ 1 и 3. Введем наряду с условием A следующее более сильное условие:

Условие B. Существует такое N, что случайная величина $X_1+\ldots+X_N$ имеет плотность распределения с ограниченной полной вариацией.

Теорема 5. *Пусть k-последовательность независимых случайных величин* (1) *удовлетворяет условиям* (19), (20) *и* (12). *Тогда*

1) *если выполнено условие A, то*

$$p_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\sum_{\nu=1}^{\mu-2}\frac{P_{\nu n}(-\varphi)}{n^{\frac{\nu}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{\mu-2}{2}}}\right) \tag{23}$$

при $n\to\infty$ равномерно относительно $x\,(-\infty<x<\infty)$;

2) *если выполнено условие B, то*

$$\frac{d^s}{dx^s}p_n(x)=\frac{d^s}{dx^s}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\sum_{\nu=1}^{\mu-2}\frac{P_{\nu n}(-\varphi)}{n^{\frac{\nu}{2}}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{\frac{\mu-2}{2}}}\right) \tag{24}$$

для любого целого $s\geqslant 1$ при $n\to\infty$ равномерно относительно $x\,(-\infty<x<\infty)$.

Здесь $P_{\nu n}(-\varphi)=P_{\nu n}\big(-\varphi(x)\big)$ — те же функции, что и в теореме 4.

Доказательство. В силу результатов работы [8] достаточно показать, что справедливы следующие два утверждения: (α) из (12) и условия A вытекает соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma \int\limits_{|t|>\varepsilon} |t|^{m-1}\prod_{j=1}^{n}|v_j(t)|\,dt=0 \tag{25}$$

при $m=1$ для любых фиксированных $\gamma>0$ и $\varepsilon>0$; (β) из (12) и условия B следует соотношение (25) при любом $m\geqslant 2$ и любых фиксированных $\gamma>0$ и $\varepsilon>0$. Утверждение (α) представляет собой следствие (4), (20) и полученного при доказательстве теоремы 2 соотношения (16). Утверждение (β) нетрудно получить, заметив, что если $f(t)$ — х.ф. случайной величины с плотностью распределения, имеющей ограниченную полную вариацию, то для любого $\varepsilon>0$ имеем $|f(t)|\leqslant\frac{c}{|t|}$ при $|t|>\varepsilon$.

Замечания 1. Соотношение (23) имеет место (с равномерной по x оценкой остаточного члена), если выполнены условия теоремы 3 и условия (19), (20).

2. В том же направлении можно ослабить условие (12) при получении соотношения (24).

§ 6. Интегральные и локальные предельные теоремы для больших уклонений

Будем говорить, что ф.р. $F(x)$ удовлетворяет условию Крамера, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{hx}\, dF(x) < \infty$$

при $|h| < a$ и некотором $a > 0$.

Теорема 6. *Пусть функции распределения $W_1(x), \ldots, W_k(x)$ удовлетворяют условию Крамера. Пусть, далее, выполнено условие* (20). *Тогда при $x \geqslant 0$, $x = o(\sqrt{n})$ и $n \to \infty$ имеем*

$$1 - F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \cdot \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\, \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

$$F_n(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \cdot \exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\, \lambda_n\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Здесь $\lambda_n(t)$ — степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях t равномерно относительно n.

Теорема 6 является непосредственным следствием одного результата автора [9], [10].

Теорема 7. *Пусть функции распределения $W_1(x), \ldots, W_k(x)$ удовлетворяют условию Крамера и пусть выполнены условие A из § 3 и условия* (12) *и* (20). *Тогда при $x = o(\sqrt{n})$ и $n \to \infty$ имеем*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}}\, \lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1 + O\left(\frac{|x|+1}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\lambda_n(t)$ — тот же степенной ряд, что и в теореме 6.

Эта теорема представляет собой обобщение локальной теоремы В. Рихтера ([11], теорема 2), относящейся к случаю одинаковых распределений величин из последовательности (1). Как и результаты работы В. Рихтера [11], теоремы 7 может быть получена из более общего результата, доказанного для последовательности неодинаково распределенных случайных величин в [10] ([10], теорема 2).

В теореме 7 условия A и (12) можно заменить условиями теоремы 3, сохраняя остальные условия теоремы 7; при этом утверждение теоремы 7 останется в силе.

Сформулируем одну интегральную теорему для больших уклонений типа, введенного Ю. В. Линником [12].

Теорема 8. *Пусть выполнено условие* (20). *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\alpha<\frac{1}{2}$ *и* β, *что*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\beta|x|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right\} dW_q(x)<\infty \qquad (q=1,\ \ldots,\ k). \tag{26}$$

Тогда

$$1-F_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\cdot\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\,\lambda_n^{[s]}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+o(1)\right],$$

$$F_n(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\cdot\exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\,\lambda_n^{[s]}\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+o(1)\right]$$

при $n\to\infty$ *равномерно относительно* x *в области* $0\leqslant x\leqslant\frac{n^\alpha}{\rho(n)}$, *какова бы ни была функция* $\rho(n)$, *удовлетворяющая условию* $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(n)=+\infty$. *Здесь* s *есть целое неотрицательное число, определяемое неравенствами*

$$\frac{s}{2(s+2)}<\alpha\leqslant\frac{s+1}{2(s+3)},$$

а $\lambda_n^{[s]}(t)$ *есть отрезок ряда* $\lambda_n(t)$, *состоящий из первых его* s *членов* $\left(\text{при этом полагаем } \lambda_n^{[0]}(t)\equiv 0\right)$.

Эта теорема вытекает из теоремы 17 работы [13]. Из других результатов последней работы можно получить информацию о необходимости условия (26) для утверждений теоремы 8.

В заключение заметим, что из приведенных здесь предельных теорем для k-последовательностей независимых случайных величин непосредственно следует ряд результатов, известных для последовательностей независимых одинаково распределенных величин (см., в частности, [14]).

Ленинград

Поступило в редакцию
10.II.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Прохоров, О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, Доклады АН СССР, 98, № 4, 535–538 (1954).
2. Ю. А. Розанов, О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, Теория вероятн. и ее прим., 2, 2 (1957), 275–281.
3. Б. В. Гнеденко, О локальной предельной теореме для одинаково распределенных независимых слагаемых, Wiss. Zeitschrift der Humboldt-Univ. zu Berlin, Math.-Naturwiss. Reihe, № 4 (1953/54), 287–293.
4. S. Bochner, K. Chandrasekharan, Fourier transforms, Princeton, 1949.
5. В. В. Петров, Локальная теорема для плотностей сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее прим., I, 3 (1956), 349–357.
6. В. В. Петров, О некоторых полиномах, встречающихся в теории вероятностей, Вестник Ленинград. унив., № 19 (1962), 150–153.
7. В. В. Петров, Уточнение локальной предельной теоремы для неодинаковых решетчатых распределений, Теория вероятн. и ее прим., 7, 3 (1962), 344–346.
8. В. В. Петров, Асимптотические разложения для производных функции распределения суммы независимых слагаемых, Вестник Ленинград. унив., № 19 (1960), 9–18.
9. В. В. Петров, Обобщение предельной теоремы Крамера, Успехи матем. наук, 9, 4 (1954), 195–202.

10. В. В. Петров, О больших уклонениях сумм случайных величин, Вестник Ленинград. унив., № 1 (1961), 25–37.
11. В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее прим., 2, 2 (1957), 214–229.
12. Ю. В. Линник, Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений, I–III, Теория вероятностей и ее прим., 6, 2 и 4 (1961), 145–163, 377–390; 7, 2 (1962), 121–134.
13. В. В. Петров, Предельные теоремы для больших уклонений при нарушении условия Крамера, II, Вестник Ленинград. унив., № 1 (1964) 58–75.
14. B. W. Gnedenko, A. N. Kolmogorov, Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrössen, Berlin, Akademie-Verlag, 1959.

RIBINĖS TEOREMOS NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ *k*-SEKOMS

V. PETROVAS

(*Reziumė*)

Seka (1) vadinama *k*-seka, jei atitinkama pasiskirstymo funkcijų seka (5) turi skirtingų pasiskirstymo funkcijų. Įrodytos tokioms sekoms kai kurios ribinės teoremos baigtinių dispersijų atveju. Rastos būtinos ir parenkamos sąlygos lokalinei teoremai. Išnagrinėti dideli atsilenkimai ir asimptotiniai išdėstymai.

LIMIT THEOREMS FOR *k*-SEQUENCES OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

V. V. PETROV

(*Summary*)

By definition, the sequence (1) of random variables is *k*-sequence if the corresponding sequence (5) of distribution functions consists of *k* different distribution functions. Some limit theorems are proved for *k*-sequences of independent random variables having the finite variances. The necessary and sufficient conditions for the applicability of local limit theorem are established. The asymptotic expansions and big deviations for sums of independent summands are also discussed.