V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СИСТЕМАХ ЧЕБЫШЕВА

А. Г. НАФТАЛЕВИЧ

Систему функций $u_k(z)(k=0, 1, 2, \ldots, n$; z – комплексное переменное) принято называть (см. [1] стр. 85) системой Чебышева в области G, если любой многочлен вида

$$P(z;\ u)=c_0u_0(z)+c_1u_1(z)+\ldots+c_nu_n(z), \tag{1}$$

где c_k, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, не все равные нулю комплексные числа, имеет в G не более n нулей. Система Чебышева может быть определена и следующим образом: функции $u_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, образуют в области G систему Чебышева, если для произвольных различных $z_0, z_1, \ldots, z_n \in G$ детерминант

$$D(z_0, z_1, \ldots, z_n)=|u_k(z_l)|, \quad k, l=0, 1, 2, \ldots, n,$$

не равен нулю. Условимся еще, что система $u_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, является локально чебышевой в области G, если для любой точки z, $z\in G$, существует окрестность O, в которой функции $u_k(z)$, $k=0, 1, \ldots, n$, образуют систему Чебышева.

Предоположим, что однозначные и регулярные в области G функции $u_0(z)\equiv 1$ и $u_1(z)=f(z)$ образуют в этой области G систему Чебышева. Тогда, по определению, многочлен

$$c_0+c_1f(z)$$

имеет в области G не более одного нуля. Другими словами, функция $f(z)$ однолистна в области G. Очевидно, что верно и обратное: функции $u_0(z)\equiv 1$ и $u_1(z)=f(z)$ образуют систему Чебышева в области G, если $f(z)$ однолистна в этой области.

Как хорошо известно, соотношение $f'(z)\neq 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция $f(z)$ была локально однолистной в области G. Из сказанного выше следует, что это же соотношение $f'(z)\neq 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы система функций $u_0(z)\equiv 1$ и $u_1(z)=f(z)$ была локально чебышевой в области G.

Как будет показано, имеет место следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы система однозначных и регулярных в области G функций $u_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, была локально чебышевой в этой области, необходимо и достаточно, чтобы детерминант Вронского*

$$W(z;\ u_0,\ u_1,\ \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} u_0(z) & u_1(z) & & u_n(z) \\ u_0'(z) & u_1'(z) & & u_n'(z) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_0^{(n)}(z) & u_1^{(n)} z & & u_n^{(n)}(z) \end{vmatrix}$$

не равнялся нулю ни в одной точке области G.

В заметке рассматриваем также линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка с аналитическими коэффициентами и изучаем вопрос о существовании и единственности решения, принимающего в n фиксированных точках заданные значения. Этот же вопрос в действительной области изучался Валле-Пуссеном.

1. Доказательство теоремы 1. Достаточность. Для простоты изложения ограничимся случаем системы, состоящей из трех функций $u_0(z)$ $u_1(z)$ $u_2(z)$, и рассмотрим отношение двух детерминантов

$$\Delta(z_0,\ z_1,\ z_2) = 2!\ \frac{D(z_0,\ z_1,\ z_2)}{V(z_0,\ z_1,\ z_2)},$$

где

$$D(z_0,\ z_1,\ z_2) = \begin{vmatrix} u_0(z_0) & u_1(z_0) & u_2(z_0) \\ u_0(z_1) & u_1(z_1) & u_2(z_1) \\ u_0(z_2) & u_1(z_2) & u_2(z_2) \end{vmatrix}$$

и $V(z_0,\ z_1\ z_2)$ — детерминант Вандермонда:

$$V(z_0,\ z_1,\ z_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 \\ z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 \end{vmatrix} = (z_1-z_0)(z_2-z_0)(z_2-z_1).$$

Проделав со строчками детерминанта $D(z_0,\ z_1,\ z_2)$ следующие символически записанные операции

$$1 \text{ стр.} : (z_0-z_1) + 2 \text{ стр.} : (z_1-z_0),$$

$$1 \text{ стр.} : [(z_0-z_1)(z_0-z_2)] + 2 \text{ стр.} : [(z_1-z_0)(z_1-z_2)] + 3 \text{ стр.} : [(z_2-z_0)(z_2-z_1)],$$

получим

$$\Delta(z_0,\ z_1,\ z_2) = 2!\begin{vmatrix} u_0(z_0) & u_1(z_0) & u_2(z_0) \\ u_0[z_0 z_1] & u_1[z_0 z_1] & u_2[z_0 z_1] \\ u_0[z_0 z_1 z_2] & u_1[z_0 z_1 z_2] & u_2[z_0 z_1 z_2] \end{vmatrix},$$

где $u[z_0 z_1]$ и $u[z_0 z_1 z_2]$ означают разделенные разности первого и второго порядка функции $u(z)$:

$$u[z_0 z_1] = \frac{u(z_0)}{z_0-z_1} + \frac{u(z_1)}{z_1-z_0},$$

$$u[z_0 z_1 z_2] = \frac{u(z_0)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} + \frac{u(z_1)}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)} + \frac{u(z_2)}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)}.$$

Как хорошо известно, при z_0, z_1, $z_2 \to z$ разделенные разности $u[z_0 z_1]$ и $u[z_0 z_1 z_2]$ стремятся к производным $u'(z)$ и $u''(z):2!$. Следовательно, отношение $\Delta(z_0, z_1, z_2)$ стремится к детерминанту Вронского $W(z; u_0, u_1, u_2)$:

$$\lim_{z_0, z_1, z_2 \to z} \Delta(z_0, z_1, z_2) = W(z; u_0, u_1, u_2), \tag{2}$$

$$W(z; u_0, u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_0(z) & u_1(z) & u_2(z) \\ u_0'(z) & u_1'(z) & u_2'(z) \\ u_0''(z) & u_1''(z) & u_2''(z) \end{vmatrix}.$$

Предположим теперь, что в точке $z = \alpha$

$$W(\alpha; u_0, u_1, u_2) \neq 0.$$

Из (2) следует, что имеется окрестность O точки α, в которой

$$\Delta(z_0, z_1, z_2) \neq 0$$

при z_0, z_1, $z_2 \in O$. Тем самым и

$$D(z_0, z_1, z_2) \neq 0$$

при z_0, z_1, $z_2 \in O$. Другими словами, функции $u_0(z)$, $u_1(z)$, $u_2(z)$ образуют систему Чебышева в окрестности O.

Необходимость. Предположим, что функции $u_0(z)$, $u_1(z)$ и $u_2(z)$ образуют систему Чебышева в окрестности O точки $z = \alpha$, и заметим, что все три функции $u_0(z)$, $u_1(z)$ и $u_2(z)$ не могут обращаться в нуль в точке $z = \alpha$. В самом деле, допустим противное и возьмем две различные точки β, $\gamma \in O$, $\beta \neq \alpha$, $\gamma \neq \alpha$. Найдем нетривиальное решение c_0^*, c_1^*, c_2^* системы двух уравнений

$$\begin{cases} c_0 u_0(\beta) + c_1 u_1(\beta) + c_2 u_2(\beta) = 0, \\ c_0 u_0(\gamma) + c_1 u_1(\gamma) + c_2 u_2(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Многочлен

$$P(z; u) = c_0^* u_0(z) + c_1^* u_1(z) + c_2^* u_2(z)$$

равен нулю в трех точках α, β и γ, что противоречит предположению о том, что $u_k(z)$, $k = 0, 1, 2,$ – система Чебышева в окрестности O. Таким образом, мы можем предположить, что $u_0(z) \neq 0$ при $z \in O$.

Рассмотрим теперь детерминант Вронского

$$W(\alpha; u_0, u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_0(\alpha) & u_1(\alpha) & u_2(\alpha) \\ u_0'(\alpha) & u_1'(\alpha) & u_2'(\alpha) \\ u_0''(\alpha) & u_1''(\alpha) & u_2''(\alpha) \end{vmatrix}$$

и, рассуждая от противного, предположим, что

$$W(\alpha; u_0, u_1, u_2) = 0.$$

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} c_0 u_0(\alpha) + c_1 u_1(\alpha) + c_2 u_2(\alpha) = 0, \\ c_0 u_0'(\alpha) + c_1 u_1'(\alpha) + c_2 u_2'(\alpha) = 0, \\ c_0 u_0''(\alpha) + c_1 u_1''(\alpha) + c_2 u_2''(\alpha) = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение $\tilde{c}_0$, $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ и многочлен

$$P(z; u) = \tilde{c}_0 u_0(z) + \tilde{c}_1 u_1(z) + \tilde{c}_2 u_2(z)$$

имеет в точке $z=\alpha$ нуль кратности $3+s$, $s\geqslant 0$. Нуль такой же кратности имеет в точке $z=\alpha$ и функция

$$\varphi(z)=\frac{P(z;\ u)}{u_0(z)}=\tilde{c}_0+\tilde{c}_1\frac{u_1(z)}{u_0(z)}+\tilde{c}_2\frac{u_2(z)}{u_0(z)}.$$

Следовательно, функция $\varphi(z)$ принимает каждое достаточно малое по модулю значение η в $3+s$ различных точках $z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{2+s}\in O$. Таким образом, многочлен

$$P_\eta(z;\ u)=(\tilde{c}_0-\eta)\,u_0(z)+\tilde{c}_1u_1(z)+\tilde{c}_2u_2(z)$$

имеет в окрестности O нули в точках $z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{2+s}$, и система $u_0(z)$, $u_1(z)$, $u_2(z)$ не является чебышевой в окрестности O. Но это противоречит сделанному ранее предположению.

Замечание 1. Теорема 1 частично переносится и на действительные системы Чебышева. Действительно, рассуждая как при доказательстве теоремы 1, легко усмотреть, что *условие*

$$W(x;\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)\neq 0,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

является достаточным для того, чтобы n раз непрерывно дифференцируемые функции $u_k(x)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, образовали локально чебышевую систему в промежутке $a\leqslant x\leqslant b$. Заметим еще, что условия

$$u_0(x)>0,\ W(x;\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_s)>0,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ a\leqslant x\leqslant b$$

достаточны, как показал А. А. Марков (см. [2], стр. 147), *для того, чтобы система функций $u_k(x)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, была чебышевой в целом промежутке $a\leqslant x\leqslant b$.*

С другой стороны, функции $u_0(x)\equiv 1$ и $u_1(x)\equiv x^3$ образуют систему Чебышева на действительной прямой, но детерминант Вронского от этих функций исчезает в точке $x=0$.

Замечание 2. Обозначим через $h(z)$ радиус наибольшего круга K, $K\subset G$, с центром в точке z, внутри которого система функций $u_k(z)$, $k=0,1,2,\ldots,n$, является чебышевой. Из очевидного неравенства

$$|h(z)-h(\xi)|\leqslant|z-\xi|,\quad z,\quad \xi\in G,$$

следует, что $h(z)$ непрерывная функция. Пользуясь этим замечанием и теоремой 1, выводим следующее предложение:

Если

$$W(z;\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)\neq 0,\quad z\in G,$$

и F — замкнутое ограниченное множество, лежащее в G, то существует такое положительное число h, $h=h(F)$, что система функций $u_k(z)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, является чебышевой в h-окрестности любой точки множества F.

2. Пусть $u_k(z)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ — система*) Чебышева в области G и $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ — не все равные нулю постоянные. Из теоремы 1 следует, что кратность любого нуля многочлена (1) не может быть больше n. Имеет место более общая

---

*) Предполагаем, что $u_k(z)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n$, — регулярные и однозначные в области G функции.

Теорема 2. *Если $u_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, — система Чебышева в области G и c_k, $k=0, 1, 2, \ldots, n$ — не все равные нулю постоянные, то многочлен*

$$P(z;\ u)=c_0u_0(z)+c_1u_1(z)+\ldots+c_nu_n(z) \tag{1}$$

имеет в области G не более n нулей.

Доказательсто. Предположим, что многочлен (1) имеет в области G нули в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ кратности $k_1, k_2, \ldots, k_s$. Так как $u_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, — система Чебышева, то $s\leqslant n$. Нам надо показать, что $k_1+k_2+\ldots+k_n=k\leqslant n$. Для этого предположим, рассуждая от противного, что $k>n$. Тогда хотя бы один из нулей является кратным. Для определенности предположим, что $k_1>1$. Как было отмечено в доказательстве теоремы 1, хотя бы одна из функций $u_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, не равна нулю в точке $z=\alpha_1$. Пусть $u_0(\alpha_1)\neq 0$.

Нули $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ окружим достаточно малыми непересекающимися окрестностями $O_1, O_2, \ldots, O_s$ и рассмотрим многочлен

$$P_\eta(z;\ u)=(c_0+\eta)\,u_0(z)+c_1u_1(z)+\ldots+c_nu_n(z).$$

Пользуясь теоремой Руше, убедимся, что многочлен $P_\eta(z;\ u)$ имеет в окрестности O_l, $l=0, 1, 2, \ldots, s$, точно k_l нулей, если η достаточно малое по модулю число. При этом, как покажем, все k_1 нулей многочлена $P_\eta(z;\ u)$, лежащие в окрестности O_1, являются простыми.

Из наших предположений (в частности из предположения $u_0(\alpha_1)\neq 0$) следует, что функция

$$\varphi(z)=\frac{P(z;\ u)}{u_0(u)}=c_0+c_1\frac{u_1(z)}{u_0(z)}+\ldots+c_n\frac{u_n(z)}{u_0(z)}$$

имеет в точке α_1 нуль кратности k_1. Поэтому для достаточно малого по модулю числа η функция $\varphi(z)+\eta$ имеет в окрестности O_1 ровно k_1 простых нулей. То же самое верно и для многочлена $P_\eta(z;\ u)$. Таким образом, мы показали, что многочлен $P_\eta(z;\ u)$ имеет в области G хотя бы $k_1+k_2+\ldots+k_s$ нулей. При этом, число различных нулей многочлена $P_\eta(z;\ u)$ не меньше $s+k_1-1$, т. е. оно больше числа различных нулей многочлена $P(z;\ u)$. Если предположим, что и среди нулей многочлена $P_\eta(z;\ u)$ имеются кратные, то, повторяя приведенное рассуждение можно построить многочлен $P_{\eta^*}(z;\ u)$, число различных нулей которого превышает число различных нулей многочлена $P_\eta(z;\ u)$. В итоге получим многочлен

$$P^*(z;\ u)=c_0^*u_0(z)+c_1^*u_1(z)+\ldots+c_n^*u_n(z),$$

имеющий в области G хотя бы $k_1+k_2+\ldots+k_n=k>n$ различных нулей. Но это противоречит допущению, что $u_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, — система Чебышева.

Следствие 1. *Пусть $u_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, — система Чебышева в области G и $k_0\geqslant 0$, $k_1\geqslant 0, \ldots, k_s\geqslant 0$ — целые числа, сумма которых равна $n-s$:*

$$(k_0+1)+(k_1+1)+\ldots+(k_s+1)=n+1.$$

Для любых различных точек $z_0, z_1, \ldots, z_s\in G$ детерминант

$$\Delta=|u_i^{t_j}(z_j)|,$$

$$i=0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$j=0, 1, 2, \ldots, s;\quad t_j=0, 1, 2, \ldots, k_j,$$

не равен нулю. В самом деле, допустим противное и обозначим попрежнему через $P(z;\ u)$ многочлен вида (1). Тогда система уравнений (относительно неизвестных $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$)

$$P^{(t_l)}(z_l;\ u)=0,\quad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s;\quad t_l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k_l,$$

имела бы нетривиальное решение и многочлен $P(z;\ u)$ удовлетворяющий этим уравнениям имел бы в точке z_l, $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s$, нуль кратности k_l+1. В области G этот многочлен имел бы не менее $k_0+k_1+k_2+\ldots+ +k_s+s+1=n+1$ нулей.

Следствие 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Для любого натурального l функции $u_{kl}(z)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, образуют систему Чебышева в области G;*

2. *Последовательность функций $u_{kl}(z)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, равномерно сходится внутри области G к функции $u_k(z)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.*

Если система предельных функций $u_k(z)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, не является линейно зависимой, то она является чебышевой в области G.

Доказательство. Рассмотрим многочлены

$$P(z;\ u)=\sum_{k=0}^{n} c_k u_k(z),\quad P_l(z,\ u)=\sum_{k=0}^{n} c_k u_{kl}(z),\quad l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где c_k, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ — не все равные нулю постоянные. Из сделанных предположений и теоремы 2 следует, что:

1. Многочлен $P(z;\ u)$ не равен тождественно нулю;

2. Многочлен $P_l(z;\ u)$, $l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, имеет в области G не более n нулей;

3. Последовательность многочленов $P_l(z;\ u)$ сходится равномерно внутри области G к многочлену $P(z;\ u)$.

Из теоремы Гурвица следует, что многочлен $P(z;\ u)$ имеет в области G не более n нулей. Значит, система функций $u_k(z)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, является чебышевой в области G.

3. Для дифференциального уравнения

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)} \tag{3}$$

с действительными переменными и коэффициентами известна теорема Валле—Пуссена (см. [3], стр. 154) о существовании и единственности решения, принимающего в заданных достаточно близких точках заданные значения. Эта теорема может быть перенесена и в комплексную плоскость на дифференциальное уравнение

$$w^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)\, w^{(k)}. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения (4) — регулярные и однозначные в области G функции, $F\subset G$ — замкнутое ограниченное множество и $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ — произвольные (не обязательно различные) точки, лежащие в множестве F. Существует единственное аналитическое в области G решение, принимающее в точках $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ наперед заданные значения (в кратной* *точке задаются значение решения и значения соответствующих производных в этой точке), если только*

$$|z_i - z_j| \leqslant h, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k, \tag{5}$$

где положительное число h зависит только от множества F.

Доказательство. Пусть $u_k(z)$, $k=1, 2, \ldots, n$, – фундаментальная система аналитических в области G решений и A_k, $k=1, 2, \ldots, n$, – заданные значения в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n \in F$ (для простоты считаем, что точки z_k, $k=1, 2, \ldots, n$, – различные). Общее решение уравнения (5) представимо в виде

$$w = c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z) + \ldots + c_n u_n(z).$$

Кроме того, детерминант Вронского $W(z; u_1, u_2, \ldots u_n)$ не равен нулю в области G. Из замечания 2 (см. стр. 70) следует, что детерминант

$$D(z_1, z_2, \ldots, z_n) = |u_k(z_l)|, \quad k, l = 1, 2, \ldots, n,$$

не равен нулю, если $h > 0$ – достаточно малое число и выполнены неравенства (5). Следовательно, система уравнений

$$c_1 u_1(z_k) + c_2 u_2(z_k) + \ldots + c_n u_n(z_k) = A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

имеет единственное решение $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Но это равносильно утверждению теоремы.

Замечание. Как видно, теорема 3 дает чисто качественный результат, так как в этой теореме устанавливается только существование числа $h > 0$, но не указывается никакой положительной нижней грани для числа h. В теореме же Валле—Пуссена (в действительной области) дается нижняя граница для числа h, зависящая от максимальных значений коэффициентов уравнения (3). Количественные оценки числа h для дифференциального уравнения второго порядка (в комплексной области) имеются в работах [4] и [5].

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 10.II.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М.,—Л., 1947.
2. А. А. Марков, Избранные труды, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
3. Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, ИЛ., Москва, 1954.
4. Z. Nehari, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 545–551 (1949).
5. В. В. Покорный, ДАН СССР, 79, 743–746 (1951).

KAI KURIOS PASTABOS ČEBYŠEVO SISTEMŲ KLAUSIMU

A. NAFTALEVIČIUS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjamos Čebyševo sistemos kompleksinėje srityje.

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER TSCHEBYSCHEFFSCHE SYSTEME

A. NAFTALEWITSCH

(Zusammenfassung)

Tschebyscheffsche Systeme werden im komplexen Gebiete behandelt.