ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РЕКУРРЕНТНЫХ СОБЫТИЙ

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

Рассматривается схема рекуррентных событий, связанных с некоторой последовательностью испытаний (см., например, [4]). Пусть $\mathscr{E}$ – какое либо рекуррентное событие, а p_k – вероятность того, что $\mathscr{E}$ впервые произойдет при k-том испытании.

Событие $\mathscr{E}$ называется регулярным, если в бесконечной последовательности испытаний оно осуществляется с вероятностью 1, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Если $\mathscr{E}$ – регулярное событие, то можно ввести случайные величины X_r, $r=1, 2, \ldots$, означающие число испытаний между $r-1$-м и r-м осуществлениями события $\mathscr{E}$, и для которых, очевидно,

$$\mathbf{P}\{X_r=k\}=p_k, \qquad r=1, 2, \ldots$$

Случайные величины X_r принято называть временем возвращения, так как в действительности они имеют смысл времен ожидания (времен возвращения) между последовательными наступлениями события $\mathscr{E}$.

В дальнейшем речь будет идти только о регулярных рекуррентных событиях.

Событие $\mathscr{E}$ называется периодическим с периодом h, если общий наибольший делитель тех ν, для которых $p_\nu>0$, равен числу $h>1$, и непериодическим в противном случае.

Пусть, далее, N_n – число появлений события $\mathscr{E}$ в первых n испытаниях. Нас будет интересовать асимптотическое поведение величины N_n при больших n.

В. Феллером [1] была доказана интегральная предельная теорема для случайной величины N_n, т. е. им было показано, что если время возвращения рекуррентного события $\mathscr{E}$ имеет конечную дисперсию σ^2, то при любом фиксированном x и $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\left\{N_n \geqslant \frac{n}{\mu} - \frac{x\sigma}{\mu^{\frac{3}{2}}}\sqrt{n}\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \tag{1}$$

где $\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k p_k$.

В настоящей заметке доказывается локальная предельная теорема для величины N_n.

Пусть

$$x_{nk}=\frac{k-\frac{n}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{n}{\mu^3}}}=\frac{k-A_n}{B_n}, \tag{2}$$

где $A_n=\frac{n}{\mu}$ и $B_n=\sigma\sqrt{\frac{n}{\mu^3}}$.

Теорема. 1. *Если рекуррентное событие $\mathscr{E}$ непериодическое и его время возвращения имеет конечную дисперсию σ^2, то при $n\to\infty$ равномерно относительно k имеет место соотношение*

$$B_n\mathbf{P}\{N_n=k\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}\to 0. \tag{3}$$

2. *Если $\mathscr{E}$ имеет период h и $\sigma^2<\infty$, то равномерно относительно k*

$$\frac{B_n}{h}\mathbf{P}\{N_n=k\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}\to 0, \qquad n\to\infty. \tag{4}$$

Заметим, что аналогичная локальная предельная теорема была доказана З. И. Шарагиной [3] в предположении, что время возвращения имеет третий конечный момент.

Доказательство. Пусть $f_n(t)$ — характеристическая функция величины N_n, т. е.

$$f_n(t)=\mathbf{M}e^{itN_n}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\mathbf{P}\{N_n=k\}.$$

Следовательно, $\mathbf{P}\{N_n=k\}$ можно вычислять по формуле для коэффициентов ряда Фурье:

$$2\pi\mathbf{P}\{N_n=k\}=\int_{-\pi}^{\pi}f_n(t)e^{-itk}dt.$$

Из (2) имеем

$$k=x_{nk}B_n+A_n=xB_n+A_n$$

(в дальнейшем мы будем писать x вместо x_{nk}, опуская индексы). Тогда

$$2\pi\mathbf{P}\{N_n=k\}=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itB_nx-itA_n}f_n(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itB_nx}f_n^*(t)\,dt,$$

где

$$f_n^*(t)=e^{-itA_n}f_n(t),$$

или

$$2\pi B_n\mathbf{P}\{N_n=k\}=\int_{-\pi B_n}^{\pi B_n}e^{-itx}f_n^*\left(\frac{t}{B_n}\right)dt.$$

Кроме того, известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{5}$$

Наша задача состоит в доказательстве того, что при $n\to\infty$, разность

$$R_n=2\pi\left[B_n\mathbf{P}\{N_n=k\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

в интервале $(-\infty<k<\infty)$ равномерно относительно k стремится к нулю. С этой целью представим R_n в виде суммы четырех интегралов

$$R_n=I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{6}$$

где

$$I_1=\int_{-A}^{A} e^{-ixt}\left[f_n^*\left(\frac{t}{B_n}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]dt,$$

$$I_2=\int_{A<|t|<\varepsilon B_n} e^{-ixt}f_n^*\left(\frac{t}{B_n}\right)dt,\quad I_3=\int_{\varepsilon B_n\le|t|\le\pi B_n} e^{-ixt}f_n^*\left(\frac{t}{B_n}\right)dt,$$

$$I_4=-\int_{|t|>A} e^{-ixt-\frac{t^2}{2}}\,dt;$$

здесь A и ε — положительные числа, которые будут выбраны позднее.

Каждый интеграл оценим отдельно.

Из соотношения (1) получаем, что при $n\to\infty$ и достаточно большом A равномерно относительно x $I_1\to 0$. Нетрудно видеть, что, выбрав достаточно большое A, и интеграл I_4 можем сделать сколь угодно малым.

Перейдем к оценке интеграла I_3. С этой целью введем производящую функцию

$$P(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} s^\nu p_\nu.$$

Тогда, если

$$q_k=\sum_{\nu=k+1}^{\infty} p_\nu$$

и

$$Q(s)=\sum_{k=0}^{\infty} s^k q_k,$$

то известно (см. [1]), что

$$1-\mathbf{P}(s)=(1-s)\,Q(s),$$

$$\mu=P'(1)=Q(1)=\sum_{k=0}^{\infty} q_k$$

и

$$\mathbf{P}''(1)=2Q'(1)=\sigma^2-\mu+\mu^2.$$

В дальнейшем нам будет нужна следующая теорема В. Феллера (см. [1]): производящая функция величины N_n есть коэффициент при s^n в разложении

$$\frac{1-P(s)}{(1-s)\left(1-zP(s)\right)}$$

по степеням s.

Как следствие из этой теоремы получаем, что характеристическая функция величины N_n есть коэффициент при s^n в

$$\frac{1-P(s)}{(1-s)\left(1-e^{it}P(s)\right)}=\frac{Q(s)}{1-e^{it}P(s)}.$$

Тогда

$$f_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{Q(s)\,s^{-n-1}}{1-e^{it}P(s)}\,ds, \tag{7}$$

где L — окружность единичного радиуса с центром в начале координат, если $e^{it}P(s)\neq 1$ для $s\in L$.

Лемма. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует постоянная* $c(\varepsilon)$ *такая, что*

$$|f_n(t)|<\frac{c(\varepsilon)}{n},$$

если $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant 2\pi-\varepsilon$.

Доказательство леммы. В (7), интегрируя по частям, получаем

$$f_n(t)=\frac{1}{2\pi in}\int\limits_L \frac{s^{-n}Q'(s)\,ds}{1-e^{it}P(s)}+\frac{1}{2\pi in}\int\limits_L \frac{e^{it}Q(s)P(s)\,s^{-n}}{\left(1-e^{it}P(s)\right)^2}\,ds.$$

Отсюда

$$|f_n(t)|\leqslant\frac{1}{n}\max_{s\in L}\left|\frac{Q'(s)}{1-e^{it}P(s)}\right|+\frac{1}{n}\max_{s\in L}\left|\frac{Q(s)P(s)}{\left(1-e^{it}P(s)\right)^2}\right|. \tag{8}$$

Далее имеем

$$\max_{s\in L}|Q'(s)|\leqslant\max_{s\in L}Q'(|s|)=Q'(1) \tag{9}$$

и

$$\max_{s\in L}|Q(s)P(s)|\leqslant\max_{s\in L}Q(|s|)P(|s|)=\mu. \tag{10}$$

Теперь покажем, что при $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant 2\pi-\varepsilon$ и $s\in L$ $e^{it}P(s)\neq 1$. Так как $|s|=1$ то $s=e^{i\varphi}$, где $0\leqslant\varphi<2\pi$. Тогда равенство

$$e^{it}\mathbf{P}(s)=1 \tag{11}$$

будет иметь место только тогда, когда

$$e^{it+i\nu_r\varphi}=1$$

для всех целых чисел ν_r, $r=1,\ 2,\ \ldots$, для которых $p_{\nu_r}>0$. Но это эквивалентно системе равенств

$$t+\nu_r\varphi\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi),\qquad r=1,\ 2,\ \ldots,$$

или

$$t\equiv-\nu_r\varphi\,(\mathrm{mod}\,2\pi),\qquad r=1,\ 2,\ \ldots$$

Отсюда

$$\varphi(\nu_r-\nu_l)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi),\qquad r,\ l=1,\ 2,\ \ldots$$

А так как по предположению общий наибольший делитель всех разностей $\nu_r-\nu_l$ равен 1, то равенство (11) имеет место только при $\varphi\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$ и t, имеющих вид

$$t=2\pi l,\ l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

а для $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant 2\pi-\varepsilon$, каковы бы ни были $\varepsilon>0$ и $s\in L$, можно найти такое $c_1>0\left(c_1=c_1(\varepsilon)\right)$, что

$$|1-e^{it}P(s)|\geqslant c_1. \tag{12}$$

Из соотношений (8)—(10) и (12) следует утверждение леммы.

В силу леммы имеем

$$I_3=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{13}$$

Оценим интеграл I_2. Пусть

$$I_2=I_2'+I_2'',$$

где

$$I_2' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\arg s| < \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{Q(s)}{1 - e^{it}P(s)}\, s^{-n-1}\, ds$$

и

$$I_2'' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\arg s| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{Q(s)}{1 - e^{it}P(s)}\, s^{-n-1}\, ds.$$

Далее имеем

$$I_2' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\arg s| < \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{Q(s) - Q(1)}{1 - e^{it}P(s)}\, s^{-n-1}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\arg s| < \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\mu e^{it}[P(s) - P(1) - P'(1)(s-1)]\, s^{-n-1}}{\left(1 - e^{it}P(s)\right)\left(1 - e^{it} - \mu(s-1)\right)}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\arg s| < \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\mu^2 (s-1)(e^{it} - 1)\, s^{-n-1}}{\left(1 - e^{it}P(s)\right)\left(1 - e^{it} - \mu(s-1)\right)}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\arg s| < \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\mu s^{-n-1}}{1 - e^{it} - \mu(s-1)}\, ds = J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \tag{15}$$

где J_1, J_2, J_3 и J_4 означают первое, второе, третье и четвертое слагаемые, соответственно.

С другой стороны,

$$|Q(s) - Q(1)| = \left| Q'\left(1 + \vartheta(s-1)\right)\right| \leq P'(1)\,|s-1|, 0 < \vartheta < 1, \tag{16}$$

и

$$|P(s) - P(1) - P'(1)(s-1)| = \left| \frac{1}{2} P''\left(1 + \vartheta_1(s-1)\right)(s-1)^2 \right| \leq P''(1)\,|s-1|^2,$$
$$0 < \vartheta_1 < 1. \tag{17}$$

Теперь оценим снизу величины $|1 - e^{it}P(s)|$ и $|1 - e^{it} - \mu(s-1)|$ для всех $\frac{A}{\sqrt{n}} < |t| < \varepsilon$ и $s \in \left(|s| = 1,\ |\arg s| < \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Имеем

$$1 - e^{it}P(s) = 1 - e^{it} + (1-s)\, e^{it} Q(s).$$

Тогда

$$|1 - e^{it}P(s)| \geq |1 - e^{it}| - |1-s|\,|Q(s)|.$$

А отсюда заключаем, что при достаточно малом ε и достаточно больших A и n

$$|1 - e^{it}P(s)| > \frac{1}{4}\,|t|. \tag{18}$$

Аналогично получаем, что для всех $|t| \in \left(\frac{A}{\sqrt{n}}, \varepsilon\right)$ и $s \in \left(|s| = 1,\right.$ $\left.|\arg s| < \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$|1 - e^{it} - \mu(s-1)| \geq |1 - e^{it}| - \mu\,|s-1| > \frac{1}{2}\,|t|, \tag{19}$$

если только подберем ε достаточно малым, а A и n достаточно большими.

Из соотношений (15)—(19) окончательно получаем, что

$$J_i = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{20}$$

равномерно относительно t, $|t| \in \left(\frac{A}{\sqrt{n}},\ \varepsilon\right)$.

Перейдем к оценке интеграла J_3. Имеем

$$J_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L;\ |\arg s| < \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\mu s^{-n-1}\, ds}{1 - e^{it} - \mu (s-1)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L;\ |\arg s| < \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{s^{-n-1}\, ds}{\frac{1-e^{it}}{\mu} - (s-1)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{s^{-n-1}\, ds}{s - \left(1 + \frac{1-e^{it}}{\mu}\right)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L;\ |\arg s| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{s^{-n-1}\, ds}{s - \left(1 + \frac{1-e^{it}}{\mu}\right)} =$$

$$= \left[1 + \frac{1-e^{it}}{\mu}\right]^{-n-1} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L;\ |\arg s| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{s^{-n-1}\, ds}{s - \left(1 + \frac{1-e^{it}}{\mu}\right)}. \tag{21}$$

Поскольку

$$\left|1 + \frac{1-e^{it}}{\mu}\right|^2 = 1 + \frac{4 \sin^2 \frac{t}{2}}{\mu^2} (\mu + 1)$$

и, следовательно, для достаточно малых $|t|$

$$\left|1 + \frac{1-e^{it}}{\mu}\right|^2 \geqslant 1 + \frac{t^2}{2\mu^2} (\mu+1) > e^{\frac{t^2}{4\mu^2}(\mu+1)},$$

то

$$\left|1 + \frac{1-e^{it}}{\mu}\right|^{-n-1} < e^{-\frac{t^2 n}{8\mu^2}(\mu+1)} < e^{-\frac{t^2 n}{8\mu}}. \tag{22}$$

Чтобы оценить второе слагаемое правой части соотношения (21), произведем трехкратное интегрирование по частям и, так как

$$\left|s - \left(1 + \frac{1-e^{it}}{\mu}\right)\right|^2 = 2\left[1 - \cos\varphi + \frac{(1-\cos t)(1-\cos\varphi)}{\mu} + \frac{1-\cos t}{\mu^2}\right],$$

то, аналогично выводу (18) и (19), получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L;\ |\arg s| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{s^{-n-1}\, ds}{s - \left(1 + \frac{1-e^{it}}{\mu}\right)}\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{23}$$

Из соотношений (21)—(23) заключаем, что

$$|J_4| < e^{-\frac{t^2 n}{8\mu}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{24}$$

Наконец, в силу (14), (15), (20) и (24) имеем

$$I_2' = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{25}$$

Еще осталось оценить интеграл

$$I_2'' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\arg s| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{Q(s)\, s^{-n-1}}{1 - e^{it} P(s)}\, ds$$

для $\frac{A}{\sqrt{n}} \leqslant |t| < \varepsilon$. Имеем

$$|1-e^{it}P(s)|^2 = 2(1-\cos t) + 2(1-\cos\varphi)[\operatorname{Re} Q(s)]^2 + \\ + 2(1-\cos\varphi)[\operatorname{Im} Q(s)]^2 + 2[(\cos t - 1)(1-\cos\varphi) + \sin t \sin\varphi] \operatorname{Re} Q(s) + \\ + 2[(1-\cos t)\sin\varphi + (1-\cos\varphi)\sin t] \cdot \operatorname{Im} Q(s). \qquad (26)$$

Далее заметим, что при достаточно малом ε для $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant |\varphi| \leqslant 4\varepsilon$ $|\operatorname{Im} Q(s)| > c_2|\varphi|$ и для $\pi - 4\varepsilon \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ $|\operatorname{Im} Q(s)| > c_2|\pi - \varphi|$, где $c_2 = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$ и m определяется неравенствами $m\varphi < \pi$ и $(m+1)\varphi \geqslant \pi$, и для тех же самых φ $\operatorname{sign} \operatorname{Im} Q(s) = \operatorname{sign} \varphi$.

Тогда для всех $\frac{A}{\sqrt{n}} < t < \varepsilon$ и $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \varphi \leqslant \pi$ имеет место соотношение

$$|1-e^{it}P(s)|^2 > (1-\cos t) + (1-\cos\varphi)|Q(s)|^2.$$

Пусть теперь $\frac{A}{\sqrt{n}} \leqslant t < \varepsilon$ и $-4\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant -\frac{1}{\sqrt{n}}$. Тогда из (26) получаем

$$|1-e^{it}P(s)|^2 \geqslant \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos t) + \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)|Q(s)|^2 & \text{при} -\varphi \leqslant \frac{t}{4\mu} \\ \frac{1}{8}(1-\cos t) + \frac{1}{8}(1-\cos\varphi)|Q(s)|^2 & \text{при} -\varphi \geqslant 4t. \end{cases}$$

Если же $-\frac{t}{4\mu} \geqslant \varphi \geqslant -\frac{t}{2\mu}$, то

$$|1-e^{it}P(s)|^2 \geqslant \frac{1}{4}(1-\cos\varphi)|Q(s)|^2,$$

а если $-2t \leqslant \varphi \leqslant -4t$, то

$$|1-e^{it}P(s)|^2 \geqslant \frac{1}{4}(1-\cos t).$$

Наконец,

$$|1-e^{it}P(s)|^2 \geqslant \begin{cases} 2(1-\cos t)[\operatorname{Im} Q(s)]^2 & \text{при } -2t < \varphi \leqslant -t, \\ 2(1-\cos t)\sin\varphi \operatorname{Im} Q(s) & \text{при } -t < \varphi < -\frac{t}{2\mu}. \end{cases} \qquad (27)$$

Из (27) заключаем, что если $-2t < \varphi < -\frac{t}{2\mu}$, то

$$|1-e^{it}P(s)|^2 \geqslant 2c_2^2(1-\cos t)\varphi^2.$$

Для $\frac{A}{\sqrt{n}} \leqslant t < \varepsilon$ и $-(\pi - 4\varepsilon) < \varphi < -4\varepsilon$ всегда

$$|1-e^{it}P(s)|^2 > \frac{1}{4}(1-\cos t) + \frac{1}{4}(1-\cos\varphi)|Q(s)|^2.$$

Аналогично $|1-e^{it}P(s)|^2$ оценивается и во всех других случаях. Следовательно, окончательно получаем

$$|I_2''| \leqslant \frac{16\left[2-\frac{1}{2\mu}\right]}{c_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (28)$$

равномерно для всех $\frac{A}{\sqrt{n}} \leqslant |t| < \varepsilon$.

Из (14), (25) и (28) следует, что при достаточно малом ε и достаточно больших A и n интеграл I_2 будет сколь угодно малым.

Этим завершается доказательство теоремы для непериодичных рекуррентных событий. Когда рекуррентные события имеют период h, теорема доказывается совсем аналогично.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
8.I.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., 67, 1 (1949), 98–119.
2. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1964.
3. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
4. З. И. Шарагина, Локальные предельные теоремы для некоторых схем циклических процессов, Кандидатская диссертация.
5. С. В. Нагаев, Локальная предельная теорема для счетных цепей Маркова, Предельные теоремы теории вероятностей, Ташкент, 1963.

LOKALINĖ RIBINĖ TEOREMA REKURENTINIAMS ĮVYKIAMS

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Reziumė)

Sakysime, kad $\mathscr{E}$ – reguliarus neperiodinis rekurentinis įvykis, p_k – tikimybė, jog įvykis $\mathscr{E}$ pirmą kartą įvyks k-jame bandyme, ir

$$\mu=\sum_{k=1}^{\infty} kp_k \text{ ir } \sigma^2=\sum_{k=1}^{\infty} k^2p_k-\mu^2.$$

Toliau tegul N_n reiškia įvykio $\mathscr{E}$ pasirodymo skaičių per n pirmųjų bandymų.

Šiame darbe įrodoma sekanti teorema.

Jei $\sigma^2<\infty$, tai, kai $n\to\infty$, tolygiai atžvilgiu k galioja priklausomybė

$$\sigma\sqrt{\frac{n}{\mu^3}}\,\mathbf{P}\{N_n=k\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}\to 0,$$

kur

$$x_{nk}=\frac{k-\frac{n}{\mu}}{\sigma\sqrt{n}}\,\mu^{\frac{3}{2}}.$$

THE LOCAL LIMIT THEOREM FOR RECURRENT EVENTS

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Summary)

Let $\mathscr{E}$ be certain and not periodic recurrent event, p_k – the probability of the first realization of $\mathscr{E}$ in the k-th trial, and N_n let be the number of realizations of $\mathscr{E}$ in the first n trials.

Let

$$\mu=\sum_{k=1}^{\infty} kp_k \text{ and } \sigma^2=\sum_{k=1}^{\infty} k^2p_k-\mu^2.$$

The following theorem is proved: if $\sigma^2<\infty$, then with $n\to\infty$ uniformly in respect to k the following relation is valid

$$\sigma\sqrt{\frac{n}{\mu^3}}\,\mathbf{P}\{N_n=k\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}\to 0,$$

where

$$x_{nk}=\frac{k-\frac{n}{\mu}}{\sigma\sqrt{n}}\,\mu^{\frac{3}{2}}.$$