V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1965

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ В ВЕРОЯТНОСТНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Г. МИСЯВИЧЮС

1. В работе будем пользоваться обозначениями, принятыми в [1] с незначительными изменениями, смысл которых очевиден.

Аддитивная арифметическая функция $f(m)$ называется сильно аддитивной, если для любого простого p и для любого целого положительного k удовлетворяется условие

$$f(p^k)=f(p).$$

Как известно, при изучении предельного поведения функции распределения

$$F_n(x)=\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(f,\ n)}{B(f,\ n)}<x\right\} \tag{1}$$

часто можно ограничиться лишь рассмотрением сильно аддитивных функций, что мы и будем делать. Будем также считать, что рассматриваемые функции принадлежат классу H, введенному И. Кубилюсом [1]. Через $r=r(n)$ будем обозначать функцию от n, удовлетворяющую условиям $r(n)\to\infty$ $(n\to\infty)$ и $\ln r(n)=o(\ln n)$.

Помимо методов, изложенных в [1], для изучения предельного поведения распределения можно применить метод моментов, который до сих пор применялся лишь в случае нормального предельного закона. Этот метод применяли Г. Делянж, Г. Гальберстам, Э. Вилкас. Последнему принадлежит наиболее общий результат – доказательство теоремы 4.2 из [1] методом моментов. В 1957 г. Г. Делянж [5] сообщил, что он доказал теорему 4.1 И. Кубилюса [1] методом моментов. Доказательство до сих пор не было опубликованно. И. Кубилюс предложил нам, пользуясь идеями упомянутых выше работ Г. Делянжа и Г. Галберстама, доказать эту теорему, что и делается в настоящей работе. Этим же методом получено предельное распределение значений разности $f(m)-f(m+a)$ сильно аддитивных арифметических функций.

2. Сформулируем наши теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы законы распределения*

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(f,\ n)}{B(f,\ n)}<x\right\},$$

где $f(m)$ – сильно аддитивная функция из класса H, сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функ-

ция $K(u)$ с вариацией единица, что при $n\to\infty$ во всех её точках непрерывности

$$\frac{1}{B^2(f,\ n)} \sum_{\substack{p\leqslant n \\ f(p)<B(f,\ n)}} \frac{f^2(p)}{p} \to K(u). \tag{1*}$$

Логарифм характеристической функции предельного распределения вычисляется по формуле Колмогорова

$$\ln \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu) \frac{1}{u^2}\, dK(u). \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $f(m)$ — сильно аддитивная арифметическая функция из класса H, a — фиксированнсе целое положительное число. Для того, чтобы закон распределения*

$$\nu_n \left\{ \frac{f(m) - f(m+a)}{B(f,\ n)} < x \right\} \tag{3}$$

сходился при $n\to\infty$ к предельному, необходимо и достаточно, чтобы существовала неубывающая функция $K(u)$ такая, что при $n\to\infty$ во всех ее точках непрерывности

$$\frac{1}{B^2(f,\ n)} \left(\sum_{\substack{p\leqslant n \\ f(p)<uB(f,\ n)}} \frac{f^2(p)}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant n \\ -f(p)<uB(f,\ n)}} \frac{f^2(p)}{p} \right) \to K(u). \tag{3*}$$

Логарифм предельного закона вычисляется по формуле (2).

3. Нам понадобятся некоторые леммы. Обозначим через P множество тех простых p, для которых $|f(p)| \geqslant \sqrt{\ln p}$.

Лемма 1. *Для любой сильно аддитивной арифметической функции класса H ряд*

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p} \tag{4}$$

сходится.

Доказательство. Имеем, пользуясь оценкой для $B(f,\ n)$ И. Кубилюса ([1], стр. 94),

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} \frac{\ln p}{p} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} \frac{f^2(p)}{p} = o(\ln^\varepsilon n),$$

где $\varepsilon > 0$-любое фиксированное число.

Воспользуемся трансформацией Абеля. Обозначим

$$a_j = \begin{cases} \dfrac{\ln j}{j}, & \text{если } j\in P, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$b_j = \frac{1}{\ln j}, \quad A_n = \sum_{\substack{p\in P \\ p\leqslant n}} \frac{\ln p}{p}.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n-1} A_j (b_j - b_{j+1}) + A_n b_n,$$

или

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{1}{p} = \sum_{j=1}^{n-1} A_j\left(\frac{1}{\ln j} - \frac{1}{\ln(j+1)}\right) + \frac{A_n}{\ln n}.$$

Очевидно, что правый член последнего равенства ограничен некоторой абсолютной константой, не зависящей от n. Отсюда заключаем, что ряд (4) сходится.

Из этой леммы, а также из лемм 3.2 и 4.1 в [1] получаем важное для нас

Следствие. *Если ограничиться собственными предельными законами распределения, то для функций $f(m)\in H$ и $f^*(m)$, где $f^*(m)$ сильно аддитивная арифметическая функция, определенная равенством*

$$f^*(p) = \begin{cases} f(p) & \text{для } |f(p)| \leqslant \sqrt{\ln p}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

предельные законы распределения

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(f,n)}{B(f,n)} < x\right\} \text{ и } \nu_n\left\{\frac{f^*(m)-A(f^*,n)}{B(f^*,n)} < x\right\}$$

существуют одновременно и в случае существования совпадают. Поэтому, рассматривая распределения функций класса H, можем ограничиться функциями, удовлетворяющими условию

$$f(p) = B\sqrt{\ln p}. \qquad (H_1)$$

Здесь и дальше B означает число, не всегда одно и то же, ограниченное по модулю константой.

Приведем еще несколько лемм.

Лемма 2. *Пусть имеем последовательность функций распределения $F_n(x)$ со следующими свойствами:*

1. *Для любого n существуют моменты любого порядка*

$$m_s^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s\, dF_n(x) \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots).$$

2. *При любом s выполняются неравенства*

$$c_s \leqslant m_s^{(n)} \leqslant C_s,$$

причем c_s, C_s не зависят от n.

Тогда из последовательности $F_n(x)$ можем выделить подпоследовательность $F_{n_k}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots;\ n_1<n_2<\ldots;\ n_k\to\infty)$ такую, что

(α) *существуют пределы*

$$\lim_{k\to\infty} \int x^s\, dF_{n_k}(x) = m_s \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots),$$

(β) *последовательность $F_{n_k}(x)$ сходится к некоторой функции распределения $\psi(x)$ в любой ее точке непрерывности,*

(γ) *существует предел $\int x^s\, d\psi(x)$ и равен $m_s (s=0,\ 1,\ \ldots)$.*

Лемма 3. *Пусть для каждой функции последовательности $F_n(x)$ существуют моменты любого порядка $m_s^{(n)}$. Если для всех s $m_s^{(n)}\to m_s$, то m_s*

являются моментами некоторой функции распределения $F(x)$. Если, кроме того, функция распределения определяется своими моментами однозначно, то $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ в каждой точке непрерывности последней.

Доказательство см. в [6].

Следствие. *Пусть имеется последовательность функций распределения, удовлетворяющих условиям леммы 2. Если $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ в каждой ее точке непрерывности, то $m_s^{(n)}$ сходятся к $m_s (s=1, 2 \ldots)$, где m_s — s-ый момент функции $F(x)$.*

Лемма 4. *Пусть $m_1, m_2, \ldots$ — суть моменты некоторой функции распределения $F(x)$, каждый из которых предполагается конечным. Предположим, что ряд*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_s}{s!} \tau^s$$

абсолютно сходится при некотором $\tau > 0$. Тогда $F(x)$ есть единственная функция распределения, обладающая моментами $m_1 \ldots$, а ее характеристическая ф-я $f(t)$ для $|t| < \tau$ выражается рядом

$$f(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{m_s}{s!} (it)^s.$$

Доказательство см. в [2].

4. Переходим к доказательству теоремы 1. В первой части доказательства рассмотрим сильно аддитивные функции $g(m)$, удовлетворяющие условию

$$\max_{p \leqslant n} |g(p)| = O\Big(B(g, n)\Big). \tag{5}$$

Следуя Делянжу [4], введем обозначения

$$F_0(n) = n,$$

$$F_k(n) = \sum_{m \leqslant n} \Big(g(m)_r\Big)^k,$$

$$M(r) = \sum_{p < r} |g(p)|.$$

По формуле мультинома будем иметь

$$F_k(n) = \sum_{s=1}^{k} \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_s = k \\ k_1 \geqslant \ldots k_s \geqslant 1}} \frac{k!}{k_1! \ldots k_s!} \sum_{p_1 \ldots p_s}{}' \left[\frac{n}{p_1 \ldots p_s}\right] g^{k_1}(p_1) \ldots g^{k_s}(p_s),$$

где последняя сумма берется по различным простым числам, не превосходящим r. Опуская квадратные скобки, сделаем ошибку, не превосходящую

$$\frac{k!}{k_1! \ldots k_s!} |g(p_1)|^{k_1} \ldots |g(p_s)|^{k_s}.$$

Вся погрешность не превосходит $M^k(r)$.

Таким образом получаем, что (при $k \geqslant 1$)

$$F_k(n) = n \sum_{s=1}^{k} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_s=k \\ k_1 \geqslant \ldots k_s \geqslant 1}} \frac{k!}{k_1! \ldots k_s!} \sum_{p_1 \ldots p_s} \frac{g(p_1)^{k_1} \ldots g(p_s)^{k_s}}{p_1 \ldots p_s} + \Theta_k(n) M^k(r), \quad (6)$$

где $|\Theta_k(n)| \leqslant 1$.

Введем целую функцию

$$G_n(z) = \prod_{p<r} \left(1 + \frac{e^{z \frac{g(p)}{B(g,\, r)}} - 1}{p}\right).$$

Пусть

$$G_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} z^j.$$

Нетрудно убедиться, что первый член правой части формулы (6) равняется коэффициенту разложения $G_n(z)$, умноженному на $k!n$ и на $B^k(g,\, r)$, т. е.:

$$F_k(n) = k!\, n a_k^{(n)} B^k(g,\, r) + \Theta_k(n) M^k(r).$$

При $k=0$ формула очевидна.

Имеем

$$\sum_{m \leqslant n} \left(g(m)_r - A(g,\, r)\right)^k = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \binom{k}{n} A(g,\, r)^h F_{k-n}{}^{(n)}.$$

После некоторых выкладок получаем

$$\frac{1}{k!\, n} \sum_{m \leqslant n} \left(\frac{g(m)_r - A(g,\, r)}{B(g,\, r)}\right)^k = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \frac{A(g,\, r)^h a_{k-h}^{(n)}}{h!\, B^h(g,\, r)} +$$

$$+ \frac{1}{k!\, nB(g,\, r)^k} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} A(g,\, r)^h \Theta_{k-h} M(r)^{k-h}.$$

Первая сумма правой части равенства является коэффициентом при z^k в разложении целой функции

$$\psi_n(z) = G_n(z) \exp\left\{-\frac{A(g,\, r)}{B(g,\, r)} z\right\},$$

а второй не превосходит по модулю

$$\frac{\left(M(r) + A(g,\, r)\right)^k}{k!\, nB(g,\, r)^k} \leqslant \frac{2^k M^k(r)}{k!\, nB(g,\, r)^k}.$$

Из оценки

$$\sum_{p \leqslant x} \ln p = Bx$$

и условия (H_1) при любом фиксированном k:

$$M^k(r) \leqslant \left(\sum_{p<r} \ln p\right)^k = Br^k(n) = o(n).$$

Пусть

$$\psi_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j^{(n)} z^j}{j!},$$

тогда можно записать

$$\frac{1}{n}\sum_{m\leq n}\left(\frac{g(m)_r-A(g,r)}{B(g,r)}\right)^k=b_k^{(n)}+o(1). \tag{7}$$

Введем характеристическую функцию $\psi_n(it)$. Соответствующий ей закон распределения обозначим через $\psi_n(x)$. Тогда $\psi_n(z)$ представляет собой производящую функцию этого закона, $b_k^{(n)}$ – k-ый момент.

Левая часть уравнения (7) представляет собою k-ый момент функции распределения

$$\nu_n\left\{\frac{g(m)_r-A(g,r)}{B(g,r)}<x\right\},$$

который обозначим через $m_k^{(n)}$. Таким образом выполняется соотношение

$$m_k^{(n)}=b_k^{(n)}+o(1).$$

Введем, аналогично [4], целую функцию

$$H_n(z)=\prod_{p<r}\left(1+\frac{e^{zg(p)}-1}{p}\right)\exp\left(-\frac{e^{zg(p)}-1}{p}\right).$$

Положим

$$H_n(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j^{(n)}z^j.$$

Очевидно $c_0^{(n)}=1$, ибо $H_n(0)=1$. Далее, из условия (H_1) будем иметь

$$\left|\frac{e^{zf(p)}-1}{p}\right|\leq\frac{p^{(z)}\frac{1}{\sqrt{\ln p}+1}}{p}.$$

Воспользовавшись соотношением

$$\exp\left\{-\frac{e^{zg(p)}-1}{p}\right\}=1-\frac{e^{zg(p)}-1}{p}+B\left|\frac{e^{zg(p)}-1}{p}\right|^2,$$

которое справедливо для $|z|\leq c$, заключаем, что члены нашего произведения имеют вид:

$$1+B\left|\frac{e^{zg(p)}-1}{p}\right|^2.$$

Отсюда имеем, что $H_n(z)$ сходится равномерно в каждом круге $|z|\leq c$, где c – любое положительное число к некоторой функции $H(z)$. Значит, по теореме Вейерштрасса, $H(z)$ является аналитической функцией и $c_j^{(n)}$ сходятся к коэффициентам разложения функции $H(z)$.

Нетрудно видеть, что выполняется соотношение

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_j^{(n)}}{j!}z^j=\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c_j^{(n)}}{B^j(g,r)}z^j\right\}\exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_k(g,r)}{k!\,B^k(g,r)}z^k\right\},$$

где

$$A_k(g,r)=\sum_{p<r}\frac{g^k(p)}{p}.$$

Из этого соотношения видно, что $\frac{b_j^{(n)}}{j!}$ является полиномом относительно $\frac{A^k}{B^k}$ и линейным относительно $\frac{c_j^{(n)}}{B^j}$. Положим

$$\frac{b_k^{(n)}}{k!}=P_k\left(\frac{c_j}{B^j};\ \frac{A_i(g,r)}{B^i(g,r)}\right),\qquad i\leq\left[\frac{k}{2}\right].$$

Рассмотрим два случая. Члены полинома, соответствующие $j\neq 0$, выглядят так:

$$\frac{c_j}{B^j}\left(\frac{A_2(g,r)}{B^2(g,r)}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{A_3(g,r)}{B^3(g,r)}\right)^{\alpha_3}\dots \tag{9}$$

Вспомнив ограничение для функции $g(m)$, будем иметь

$$A_k(g,r)=\sum_{p\leqslant r}\frac{g^k(p)}{p}\leqslant c_3^{k-2}B^{k-2}(g,r)\sum_{p\leqslant r}\frac{g^2(p)}{p}\leqslant c_3^k B^k(g,r).$$

Таким образом, при $j\neq 0$ выражение (9) стремится к нулю.

Во втором случае выпишем члены полинома, соответствующие $j=0$. Для них выполнено неравенство

$$\frac{A_k(g,r)}{B^k k!}+\frac{1}{2!}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_i\geqslant 2}}\frac{A_{k_1}A_{k_2}}{k_1!\,k_2!\,B^k}+\dots+$$

$$+\frac{1}{\left[\frac{k}{2}\right]!}\sum_{\substack{k_1+\dots+k_{\left[\frac{k}{2}\right]}=k\\ k_i\geqslant 2}}\frac{A_{k_1}\dots A_{k_{\left[\frac{k}{2}\right]}}}{k_1!\dots k_{\left[\frac{k}{2}\right]}}\leqslant c_4^k.$$

Действительно, число решений уравнения

$$k_1+\dots+k_l=k$$

в целых неотрицательных числах не превосходит $\binom{k}{l}$, что не превосходит $\binom{k}{\left[\frac{k}{2}\right]}$ $\left(\text{при } l\leqslant\left[\frac{k}{2}\right]\right)$ или, по формуле Стирлинга, c_5^k. Так как в левой части соотношения (10) всего k членов, то справедливость неравенства доказано.

Из этих случаев вытекает, что моменты закона распределения $\Psi_n(x)$ при любом n выполняют соотношение

$$|b_j^{(n)}|<j!\,c_6^j. \tag{11}$$

Заметим еще, что в книге [1] (стр. 97) выведено соотношение:

$$\ln\psi_n(it)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\,\frac{1}{u^2}\,dK_n^*(u)+o(1), \tag{12}$$

где

$$K_n^*(u)=\frac{1}{B^2(g,r)}\sum_{\substack{p<r\\ g(p)<uB(g,r)}}\frac{g^2(p)}{p}.$$

Теперь можем перейти к доказательству д о с т а т о ч н о с т и. Пусть

$$K_n(u)\to K(u)$$

в каждой точке непрерывности $K(u)$. Вспомнив, что $g(m)\in H$ и применив предельные теоремы для безгранично делимых законов, получаем, что и

$$\psi_n(it)\to\psi(t)\qquad(n\to\infty).$$

Предельный закон, соответствующий характеристической функции распределения, обозначим $\Psi(x)$, его моменты b_j $(j=1,2\dots)$.

Из следствия лемм 2, 3 заключаем, что для всех j

$$b_j^{(n)} \to b_j.$$

Из (8) следует, что моменты закона распределения

$$\nu_n \left\{ \frac{g(m)_r - A(g, r)}{B(g, r)} < x \right\} \tag{13}$$

сходятся к b_j.

Как видно из формулы (11), b_j удовлетворяют условию леммы 4, значит, определяют однозначно функцию распределения. Отсюда следует (лемма 3), что характеристические функции закона распределения (13) сходятся к $\psi(t)$ равномерно для всех $|t| < T$.

Характеристическая функция закона (13), как нетрудно видеть, выражается

$$\varphi_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp\left\{ it \frac{g(m)_r - A(g, r)}{B(g, r)} \right\}.$$

Так как $g(m) \in H$, то и функции распределения

$$\nu_n \left\{ \frac{g(m) - A(g, n)}{B(g, n)} < x \right\} \to \Psi(x),$$

а последовательность характеристических функций

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp\left\{ it \frac{g(m) - A(g, n)}{B(g, n)} \right\} \to \psi(t).$$

Докажем необходимость. Имеем, что последовательность

$$\nu_n \left\{ \frac{g(m) - A(g, n)}{B(g, n)} < x \right\},$$

значит, и последовательность

$$\nu_n \left\{ \frac{g(m) - A(g, r)}{B(g, r)} < x \right\}$$

сходятся к предельному закону $\Psi(x)$ с характеристической функцией $\psi(t)$. Из соотношений (8) и (11) имеем, что

$$|m_k^{(n)}| \leqslant c_7^k k!$$

и по следствию лемм 2, 3 заключаем о существовании моментов всех порядков функции $\Psi(x)$ и о сходимости $m_k^{(n)}$ к $m_k (n \to \infty,\ k = 1, \ldots)$.

По соотношению (8) имеем, что моменты функций $\Psi_n(x)$ сходятся к $m_j (j = 1, \ldots)$, значит, по лемме 3,

$$\psi_n(it) \to \psi(t)$$

равномерно для всех $|t| \leqslant T$. Наконец, из (12) получается

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu) \frac{1}{u^2} dK_n^*(u) \to \psi(t)$$

или

$$K_n^*(u) \to K(u),$$

где $K(u)$ неубывающая функция ограниченной вариации.

5. Рассмотрим теперь любую сильно аддитивную функцию $f(m)$ класса H.

Введем сильно аддитивные функции $g_n(m)$:

$$g_n(p)=\begin{cases} f(p), & \text{если } |f(p)|<TB(f,\ n),\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $g_n(m)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в первой части доказательства рассмотренные функции.

Положим:

$$J_n(t;\ T)=\frac{1}{B^2(g_n,\ n)}\sum_{\substack{p<n\\ g_n(p)<tB(g_n,\ n)}}\frac{g_n^2(p)}{p}.$$

Связь между $J_n(t;\ T)$ и $K_n(t)$ выражается формулой

$$J_n(t;\ T)=\begin{cases} 0, & \text{если } t<-\tau(T)^{-1}T,\\ \dfrac{1}{\tau(T)} & \Big(K_n\big(t\tau(T)\big)-K_n(-T+0)\Big),\ |t|\leqslant\tau(T)^{-1}T,\\ 1, & \text{если } t>\tau^{-1}(T),\end{cases} \tag{15}$$

где $\tau(T)=K_n(T)-K_n(-T+0)$.

Заметим также, что по определению $g_n(p)$ и соотношению

$$\frac{B^2(g_n,\ n)}{B^2(f,\ n)}=K_n(T)-K_n(-T+0) \tag{16}$$

справедлива оценка

$$\max_{p\leqslant n}|g_n(p)|=O\big(B(g_n,\ n)\big).$$

Введем „урезанные" функции, положив

$$g_n(m)_r=\sum_{\substack{p<r\\ p\setminus m}}g_n(p).$$

Из

$$\frac{B^2(g_n,\ r)}{B^2(f,\ r)}=K_r\left(T\,\frac{B(f,\ n)}{B(f,\ r)}\right)-K_r\left(-T\,\frac{B(f,\ n)}{B(f,\ r)}+0\right)$$

вытекает соотношение

$$\frac{B(g_n,\ r)}{B(g_n,\ n)}\to 1 \qquad (n\to\infty)$$

в силу которого предельные законы функций распределения

$$\Phi_n(x;\ T)=\nu_n\left\{\frac{g_n(m)-A(g_n,\ n)}{B(g_n,\ n)}<x\right\}$$

и

$$\nu_n\left\{\frac{g_n(m)-A(g_n,\ r)}{B(g_n,\ n)}<x\right\}$$

существуют одновременно и в случае существования совпадают.

Через $\varphi_n(t;\ T)$ обозначим характеристическую функцию закона $\Phi_n(x;\ T)$. Применяя результаты правой части доказательства, будем иметь для любого фиксированного T:

$$\varphi_n(t;\ T)=\exp\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\,\frac{1}{u^2}\,dJ_n(u;\ T)+\rho_T(n), \tag{17}$$

где $\rho_T(n)\to 0$ для любого фиксированного T при $n\to\infty$.

Подбираем две последовательности $T_j\to\infty$ и $\varepsilon_j\to 0$ при $j\to\infty$. Для любого T_j подбираем такое n, что $\rho_{T_j}(n)<\varepsilon_j$. Наименьшее n, для которого выполняется это неравенство, обозначим через n_j. Определим $T(n)=T_j$ для $n_j \leqslant n \leqslant n_{j+1}-1$. Тогда, очевидно, $T(n) \to \infty$ и $\rho_{T_{(n)}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть в равенстве (14) $T=T(n)$. В этом случае из соотношения (16) вытекает

$$\frac{B^2(g_n, n)}{B^2(f, n)} \to 1$$

при $n \to \infty$.

По аналогу закона больших чисел для арифметических функций получаем, что

$$\nu_n \left\{ \left| \frac{\left(f(m)-A(f, n)-\left(g_n(m)-A(g_n, m)\right)\right.}{B(f, n)} \right| > \varepsilon \right\} =$$

$$= B \frac{1}{\varepsilon^2 B^2(f, n)} \sum_{\substack{|f(p)|>T(n)B(f,n) \\ p<n}} \frac{f^2(p)}{p} \to 0.$$

Наконец, по лемме 4.1 в [1] и последнему соотношению заключаем, что предельные законы функций распределения

$$\Phi_n\left(x;\ T(n)\right) \text{ и } F_n(x)=\nu_n \left\{ \frac{f(m)-A(f, n)}{B(f, n)} < x \right\}$$

существуют одновременно и совпадают в случае существования.

Теперь уже нетрудно показать д о с т а т о ч н о с т ь. Действительно, из $K_n(u) \to K(u)$ по формуле (15) следует $J_n\left(t;\ T(n)\right) \to K(u)$. По формуле (17) видно, что

$$\varphi_n\left(t;\ T(n)\right) \to \exp \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu}-1-itu) \frac{1}{u^2}\, dK(u).$$

Обозначив через $\varphi_n(t)$ характеристическую функцию закона распределения $F_n(x)$, будем иметь

$$\varphi_n(t) \to \exp \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu}-1-itu) \frac{1}{u^2}\, dK(u).$$

Для доказательства н е о б х о д и м о с т и заметим, что из $F_n(x) \to F(x)$ следует $\Phi_n\left(x;\ T(n)\right) \to F(x)$, значит $\varphi\left(t; T(n)\right) \to \varphi(t)$. По определению $\rho_{T_{(n)}}(n)$ левая часть равенства (17) тоже стремится к $\varphi(t)$, поэтому

$$J_n\left(u;\ T(n)\right) \to J(u)$$

в каждой точке непрерывности $J(u)$. Наконец, по формуле (15) заключаем, что

$$K_n(u) \to J(u).$$

Теорема доказана.

6. Приступим к доказательству теоремы 2. Оно во многом аналогично доказательству теоремы 1.

Для простоты будем рассматривать функции, удовлетворяющие условию

$$f(p)=0 \text{ для } p \backslash a.$$

Так как число делителей a является конечным, наше ограничение не умаляет общности.

Обозначим через $\varphi(t)$ характеристическую функцию закона распределения (3). Как и выше, сперва рассмотрим функции, подчиненые условию (5).

Характеристическая функция $\varphi^*(t)$ закона распределения „урезанных" функций

$$\varphi^*(t)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp\left\{\frac{g(m)_r-g(m+a)_r}{B(g,\ r)}\,it\right\},$$

а ее моменты

$$m_k^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{g(m)_r-g(m+a)_r}{B(g,\ r)}\right)^k.$$

Обозначим

$$F_0(n)=n,$$

$$F_k(n)=\sum_{m\leqslant n}\left(g(m)_r-g(m+a)_r\right)^k$$

и

$$M(r)=\sum_{p<r}|g(p)|.$$

По формуле бинома

$$F_k(n)=\sum_{m\leqslant n}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-1)^l g(m)_r^{k-l}g(m+a)_r^l,$$

и дальше, по формуле мультинома

$$F_k(n)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\sum_{s=1}^{k-l}\sum_{t=1}^{l}\sum_{\substack{k_1+\ldots k_s=k-l\\ k_1\geqslant\ldots k_s\geqslant 1}}\ \sum_{\substack{k_{s+1}+\ldots+k_{s+t}=l\\ k_{s+1}\geqslant\ldots\geqslant k_{s+t}\geqslant 1}}\binom{k}{l}\times$$

$$\times\frac{(k-l)!}{k_1!\ldots k_s!}\,\frac{l!}{k_{s+1}!\ldots k_{s+t}!}\sum_{\substack{p_1\ldots p_{s+t}\\ (p_1\ldots p_{s+t})=1}}g^{k_1}(p_1)\ldots g^{k_s}(p_s)\ldots g^{k_{s+t}}(p_{s+t})\,q(n),$$

где последняя сумма берется по простым $p_i<r$, а через $q(n)$ обозначено

$$N_n\{p_1\ldots p_s\,|\,m,\ p_{s+1}\ldots p_{s+t}\,|\,m+a\}.$$

Так как система сравнений

$$m\equiv 0 \bmod p_1\ldots p_s,$$

$$m\equiv a \bmod p_{s+1}\ldots p_{s+t}$$

имеет

$$\frac{n}{p_1\ldots p_s p_{s+1}\ldots p_{s+t}}+B$$

решений в $m\leqslant n$, можем написать:

$$F_k(n)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\sum_{s=1}^{k-l}\sum_{t=1}^{l}\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_s=k-l\\ k_1\geqslant\ldots k_s\geqslant 1}}\ \sum_{\substack{k_{s+1}+\ldots k_{s+t}=l\\ k_{s+1}\geqslant\ldots k_{s+t}\geqslant 1}}\times$$

$$\times\frac{k!\,n}{k_1!\ldots k_s!\,k_{s+1}!\ldots k_{s+t}!}\sum_{\substack{p_1\ldots p_{s+t}\\ (p_1\ldots p_{s+t})=1}}{}'\ \frac{g^{k_1}(p_1)\ldots g^{k_s}(p_s)\ldots g^{k_{s+t}}(p_{s+t})}{p_1\ldots p_s\ldots p_{s+t}}+BM^k(r).$$

Введем функцию

$$\psi_n(z)=\prod_{p<r}\left(1+\frac{e^{z\frac{g(p)}{B(g,\,n)}}-1}{p}\right)\left(1+\frac{e^{-z\frac{g(p)}{B(g,\,n)}}-1}{p-1}\right).$$

Коэффициенты разложения в ряд Тейлора, как нетрудно видеть, равняются

$$a_k^{(n)}=\frac{1}{B^k(g,\,n)}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\sum_{s=1}^{k-l}\sum_{t=1}^{l}\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_s=k-l\\ k_1\geqslant\ldots k_s\geqslant 1}}\sum_{\substack{k_{s+1}+\ldots+k_{s+t}=l\\ k_{s+1}\geqslant\ldots k_{s+t}\geqslant 1}}\times$$

$$\times\frac{1}{k_1!\ldots k_{s+t}!}\sum_{\substack{p_1\ldots p_s\\ (p_1\ldots p_s)=1}}\sum_{\substack{p_{s+1}\ldots p_{s+t}\\ (p_{s+1}\ldots p_{s+t})=1}}\frac{g^{k_1}(p_1)\ldots g^{k_{s+t}}(p_{s+t})}{p_1\ldots p_{s+t}}.$$

Фиксируем $k_1\ldots k_{s+t}$, s, t. Оценим ошибку, которую совершим заменив в сумме

$$\sum_{\substack{p_1\ldots p_{s+t}\\ (p_1\ldots p_{s+t})=1}}\frac{g^{k_1}(p_1)\ldots g^{k_{s+t}}(p_{s+t})}{p_1\ldots p_{s+t}}$$

условие $(p_1\ldots p_{s+t})=1$ условиями $(p_1\ldots p_s)=1$ и $(p_{s+1}\ldots p_{s+t})=1$. Ошибка не превосходит

$$\sum_{\substack{p_1\ldots p_s\\ (p_1\ldots p_s)=1}}\sum_{\substack{p_{s+1}\ldots p_{s+t}\\ (p_{s+1}\ldots p_{s+t})=1\\ p_1=p_{s+1}}}\frac{|g^{k_1}(p_1)|\ldots|g^{k_{s+t}}(p_{s+t})|}{p_1\ldots p_{s+t}}+\ldots+$$

$$+\sum_{\substack{p_1\ldots p_s\\ (p_1\ldots p_s)=1}}\sum_{\substack{p_{s+1}\ldots p_{s+t}\\ (p_{s+1}\ldots p_{s+t})=1\\ p_s=p_{s+t}}}\frac{|g^{k_1}(p_1)|\ldots|g^{k_{s+t}}(p_{s+t})|}{p_1\ldots p_{s+t}}.$$

Рассмотрим для примера первый член. Он не превосходит

$$\sum_{p_1=p_{s+t}}\frac{|g(p_1)|^{k_1}\ldots|g(p_{s+t})|^{k_{s+t}}}{p_1\ldots p_{s+t}}\sum_{p_2}\frac{|g^{k_2}(p_2)|}{p_2}\cdots\sum_{p_{s+t-1}}\frac{|g(p_{s+t-1})|^{k_{s+t-1}}}{p_{s+t-1}}.$$

Используя оценку в [1]:

$$\sum_{p<r}\frac{|g^2(p)|}{p^2}=o\left(B^2(g,\,r)\right),$$

будем иметь

$$\sum_{p}\frac{|g(p)|^{k_1+k_{s+t}}}{p^2}=O\left(B(g,\,r)^{k_1+k_{s+t}-2}\sum_{p}\frac{|g^2(p)|}{p^2}\right)=o\left(B(g,\,r)^{k_1+k_{s+t}}\right).$$

Любой другой член рассматриваемого выражения не превосходит соответственно с $B(g,\,r)^{k_i}(i=2,\ \ldots k+s-1)$, поэтому все произведение есть порядка

$$o\left(B(g,\,r)^k\right).$$

Искомая ошибка есть того же порядка, ибо в сумму входит лишь конечное число членов.

Разложив функцию $\psi_n(z)$ в ряд

$$\psi_n(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_j}{j!}z^j,$$

из последнего результата будем иметь

$$m_k^{(n)}=b_k^{(n)}+o(1).$$

Подсчитав аналогично [1] (97 стр.), получим

$$\ln\psi(it)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\frac{1}{u^2}\,dK_n^*(u)+o(1),$$

где $o(1)$ равномерно при $|t|<T$ и

$$K_n^*(u)=\frac{1}{B^2(g,r)}\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant n\\ f(p)<uB(g,n)}}\frac{g^2(p)}{p}+\sum_{\substack{p\leqslant n\\ -f(p)<uB(g,n)}}\frac{g^2(p)}{p}\Bigg).$$

Аналогично теореме 1 уже нетрудно показать, что сходимость $\varphi^*(t)$ к предельному закону влечет за собой сходимость $\psi(it)$, и наоборот, откуда следует утверждение теоремы.

Аналогичным образом можно избавиться от ограничения (5).

7. Заметим наконец, что упомянутый выше результат Э. Вилкаса [3] весьма просто следует из работы Г. Делянжа и Г. Гальберстама [6], если воспользоваться одним замечанием И. Кубилюса. В работе [6] показано, что для сильно аддитивных арифметических функций, при соблюдении условий

$$f(p)=O\Big(B(f,p)\Big) \tag{18}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B(f,n)}\sum_{\substack{p<n\\ |f(p)|>\varepsilon B(f,n)}}\frac{f^2(p)}{p}\to 0 \tag{19}$$

при любом $\varepsilon>0$ будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\Big(f(m)-A(f,n)\Big)^k}{nB(f,n)^k}=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^k e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,d\omega.$$

В левой части последнего равенства имеем k-ый момент функции распределения (1). По лемме Чебышева отсюда следует, что $F_n(x)$ стремится к нормальному закону. Мы избавимся от условия (18) и тем самым получим результат Э. Вилкаса [3].

Предположим, что наша функция удовлетворяет условию (19). Имеем, очевидно, при любом фиксированном T

$$\frac{1}{B^2(f,n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|\geqslant TB(f,n)}}\frac{f^2(p)}{p}\geqslant\frac{T^2B^2(f,n)}{B^2(f,n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|\geqslant TB(f,n)}}\frac{1}{p}.$$

Левая часть этого неравенства в силу условия (19) стремится к нулю, поэтому будем иметь

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|\geqslant TB(f,n)}}\frac{1}{p}\to 0.$$

Введем теперь сильно аддитивные арифметические функции $f_n^*(m)$, определив

$$f_n^*(p)=\begin{cases} f(p), & \text{если } |f(p)|<TB(f,\ n), \\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $f_n^*(m)$ тоже удовлетворяют условию (19). Действительно,

$$\frac{B(f_n,\ n)}{B(f,\ n)}\to 1 \qquad (n\to\infty)$$

и

$$\frac{1}{B^2(f_n,\ n)}\sum_{\substack{f_n(p)>\varepsilon B(f_n,\ n)\\ p\leqslant n}}\frac{f_n^2(p)}{p}\to 0.$$

Но

$$N_n\{f(m)\neq f_n^*(m)\}\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|\geqslant TB(f,\ n)}}\left[\frac{n}{p}\right]\leqslant n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|\geqslant TB(f,\ n)}}\frac{1}{p},$$

откуда

$$\nu_n\{f(m)\neq f_n^*(m)\}\to 0.$$

Отсюда, применив лемму 4.1 из [1], заключаем, что предельные распределения для функций $f_n^*(m)$ и $f(m)$ существуют одновременно и в случае существования совпадают. Тем самым наше замечание доказано.

Автор выражает глубокую благодарность проф. И. Кубилюсу за указание настоящей задачи и ценные советы при ее решении.

Вильнюсский гос. университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
20.X.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Кубилюс. Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
2. Г. Крамер. Математические методы статистики, Москва, 1948.
3. Э. Вилкас. О нормальном распределении аддитивных арифметических функций, Уч. тр. Вильнюсского Гос. у-та, 1957, **16**, 23–31.
4. H. Delange. Sur un théorème d'Erdös et Kac, Acad. roy. Belg., Bull.. cl. sci., 1956, **42**, 130–144.
5. H. Delange. Sur les fonctions arithmętiques fortement additives, C. r. Acad. sci., 1957, **244**, 1604–1606.
6. H. Delange, H. Halberstam. A note on additive functions, Pacif. J. math., 1957, **7**, 1551–1556.
7. M. Frechet and J. Shohat. A proof of the generalized second limit theorem in the theory of probability, Trans. Amer. Math. Soc., **33**, 1931.

MOMENTŲ METODO PANAUDOJIMAS TIKIMYBINĖJE SKAIČIŲ TEORIJOJE

G. MISEVIČIUS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama stipriai adityvinių *H* klasės funkcijų reikšmių pasiskirstymo funkcijų konvergavimas į ribinį dėsnį.

1957 m. H. Delianžas paskelbė įrodęs J. Kubiliaus [1] 4.1 teoremą momentų metodu, tačiau įrodymo iki šiol nepublikavo. Šiame darbe, nenaudojant V. Bruno rėčio, įrodoma minėtoji teorema ir 5.1 teoremos atskiras atvejis.

1 teorema. *Stipriai adityvinių H klasės funkcijų pasiskirstymo funkcija* (1) *konverguoja į ribinį dėsnį tuomet ir tik tuomet, kai egzistuoja nemažėjanti funkcija* $K(u)$, *kurios variacija* 1 *ir kuriai galioja pareinamybė* (1*) *kiekviename jos tolydumo taške.*

2 teorema. *Sakysime,* $f(m)$ — *stipriai adityvinė H klasės funkcija,* a—*fiksuotas sveikas skaičius. Pasiskirstymo dėsnis* (3) *konverguoja į ribinį dėsnį tuomet ir tik tuomet, kai egzistuoja nemažėjanti funkcija* $K(u)$, *kurios variacija* 2 *ir kuriai galioja pareinamybė* (3*).

Abiem atvejais ribinio dėsnio charakteringųjų funkcijų logaritmai nusakomi Kolmogorovo formule (2).

APPLICATION OF THE METHOD OF MOMENTS IN THE PROBABILISTIC THEORY OF NUMBERS

G. MISEVIČIUS

(*S u m m a r y*)

In this paper it is examined the limit behaviour of distribution function of strongly additive number-theretical functions.

In 1957 H. Delange reported he had proved the theorem 4.1 of J. Kubilius [1] by the use of method of moments, but the proof had not been published till this time. We proved the theorem 4.1 and special case of the theorem 5.1 of J. Kubilius [1] without using the sieve of V. Brun.

Theorem 1. *Let we have the strongly additive function, belonging to the class H. For convergence of the distribution function* (1) *to the limit distribution it is necessary and sufficient the existence of non decreasing function* $K(u)$ *with unit variacion, subjected to* (1) *at each point of continuity of* $K(u)$.

Theorem 2. *Let we have the strongly additive function, belonging to the class H and* a—*any fixed integer. For convergence of the distribution function* (3) *to the limit distribution it is necessary and sufficient the existence of non decreasing function* $K(u)$ *subjected to* (3*) *at each point of continuity of* $K(u)$.

In both cases the logarithm of characteristic function of limit distribution is computed by Kolmogorov's formula (2).