V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И. КУБИЛЮС

Функция $f(m)$, определённая на множестве всех целых положительных чисел, называется аддитивной, если для всякой пары взаимно простых m и n

$$f(mn)=f(m)+f(n).$$

Через $\nu_n\{\ldots\}$ будем обозначать частоту целых положительных чисел $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям, которые будут выписываться в скобках вместо многоточия. Через p будем обозначать простые числа, причем будем предполагать, что они упорядочены по возрастающей величине.

В 1939 г. П. Эрдёш и А. Винтнер [1] доказали, что для любой вещественной аддитивной функции $f(m)$ сходимость рядов*

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1}\frac{1}{p},\quad \sum_{|f(p)|<1}\frac{f(p)}{p},\quad \sum_{|f(p)|<1}\frac{f^2(p)}{p}$$

является необходимым и достаточным условием для сходимости функции распределения $\nu_n\{f(m)<x\}$ при $n\to\infty$ к предельной функции распределения в каждой точке непрерывности последней.

Эта интересная теорема, являющаяся некоторым аналогом теоремы Колмогорова о трех рядах для последовательности независимых случайных величин, была доказана в основном при помощи элементарных соображений. Новое ее доказательство, основанное на свойствах производящих рядов Дирихле, предложил в 1961 г. Г. Делянж [2, 3, 5]. Простое доказательство достаточности этих условий дано Г. Делянжом в работе [4]. Еще одно доказательство достаточности условий, использующее топологические методы, указал Е. В. Новоселов [6]**.

Цель настоящей работы — показать, что теорему Эрдёша — Винтнера можно сравнительно просто доказать с помощью метода, развитого автором [7]. Из этого доказательства наглядно явствует ее теоретико-вероятностный характер. Мы докажем несколько более общую теорему.

Константы c, c_1, c_2, … — абсолютные или зависят лишь от функции $f(m)$; B — число, не всегда одно и то же, ограниченное по модулю константой; Θ — также не всегда одно и то же число, ограниченное по модулю числом 1.

---

* Некоторые из этих сумм могут быть и конечными. Для удобства мы и в этом случае говорим, что ряд сходится. Это замечание относится также и к подобным суммам в дальнейшем.

** Примечание. Ещё одно аналитическое доказательство предложил А. Реньи: A. Rényi. On the distribution of values of additive number — theoretical functions. Publs math., 1963, **10**, 264—273. РЖ Мат, 1964, 12A106.

Теорема 1. *Пусть $f(m)$ — вещественная аддитивная арифметическая функция, $A_n (n=1, 2, \ldots)$ — последовательность вещественных чисел. Необходимым и достаточным условием сходимости функции распределения*

$$\nu_n\{f(m)-A_n<x\} \tag{1}$$

при $n\to\infty$ к некоторой предельной функции распределения в каждой ее точке непрерывности является существование такой постоянной $c>0$, что ряды

$$\sum_{|f(p)|\geqslant c}\frac{1}{p}, \tag{2}$$

$$\sum_{|f(p)<c}\frac{f^2(p)}{p} \tag{3}$$

и последовательность

$$A_n-\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f(p)}{p}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{4}$$

сходятся. Характеристическая функция предельного закона в случае его существования равна

$$\lim_{n\to\infty} e^{-iA_n t}\prod_{p\leqslant n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}, \tag{5}$$

причем предел существует для всех t и сходимость к пределу равномерна при $|t|\leqslant T$ для всякого фиксированного T. Если ряд

$$\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}$$

сходится, то предельный закон является дискретным; если же этот ряд расходится, то — непрерывным: абсолютно непрерывным или сингулярным.

Доказательство. 1. Пусть предельный закон для (1) существует и равен $F(x)$.

Пользуясь некоторыми соображениями П. Эрдёша [1], восходящими к работе Ф. Беренда [8], покажем сначала, что существует такая константа $c>0$, что ряд (2) сходится. Предположим, что такой константы не существует, т. е. для любого $c>0$ ряд (2) расходится. Подберем c так, чтобы $c/2$ и $-c/2$ были точками непрерывности $F(x)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n\left\{|f(m)-A_n|\leqslant\frac{c}{2}\right\}=F\left(-\frac{c}{2}\right)+1-F\left(\frac{c}{2}\right)>\frac{4}{5}.$$

Тогда

$$\nu_n\left\{|f(m)-A_n|\leqslant\frac{c}{2}\right\}\geqslant\frac{3}{4} \tag{6}$$

при $n\geqslant n_0$, где n_0 — достаточно большое число. Из последовательности всех простых чисел, удовлетворяющих неравенству $|f(p)|\geqslant c$, выберем такую подпоследовательность $\{p_k\}$, чтобы

$$\sum_k\frac{1}{p_k}=\infty,\qquad \sum_k\frac{1}{p_k^2}<\frac{1}{4} \tag{7}$$

и числа $f(p_k)$ все были одинакового знака. Для определенности будем считать, что $f(p_k)\geqslant c$.

Введем три функции $d(m)$, $g(m)$, $h(m)$. Через $d(m)$ будем обозначать произведение всех различных простых p_k, делящих m:

$$d(m)=\prod_{p_k^\alpha \| m} p_k;$$

$h(m)$ равно произведению всех других простых чисел, делящих m и отличных от p_k, причем одинаковые простые делители входят в $h(m)$ столько раз, сколько раз они входят в m:

$$h(m)=\prod_{\substack{p^\alpha \| m\\ p\neq p_k}} p^\alpha;$$

наконец,

$$g(m)=\frac{m}{d(m)\,h(m)}=\prod_{\substack{p_k^\alpha \| m\\ \alpha\geqslant 2}} p_k^{\alpha-1}.$$

Пусть $\tau(m)$ равно числу всех делителей m.

Обозначим через Q_n множество всех целых положительных $m\leqslant n$, которые не делятся на квадраты чисел p_k и для которых $|f(m)-A_n|\leqslant c/2$. Каждое число множества Q_n имеет вид $m=d(m)h(m)$. Докажем, что при достаточно больших n в множестве Q_n всегда имеется хотя бы одна пара чисел m_1 и m_2, обладающих свойствами: $m_2>m_1$, $h(m_1)=h(m_2)$, $d(m_1)\mid d(m_2)$. Предположим противное, что такой пары нет, т. е. что для любых двух различных m_1, m_2 из множества Q_n с одинаковыми $h(m_1)=h(m_2)$ всегда $d(m_1)$ и $d(m_2)$ не делят одно другого. Докажем, что для достаточно больших n это предположение ведет к противоречию. Для этого рассмотрим сумму

$$\mu_n=\sum_{m\in Q_n}\frac{1}{m}.$$

Оценим μ_n снизу. Так как число целых положительных $m\leqslant n$, которые делятся хотя бы на одно из p_k^2, не превосходит

$$\sum_{p_k\leqslant n}\left[\frac{n}{p_k^2}\right]<n\sum_k\frac{1}{p_k^2}<\frac{n}{4}$$

согласно (7), то в силу (6)

$$\nu_n\{m\in Q_n\}\geqslant\nu_n\left\{|f(m)-A_n|\leqslant\frac{c}{2}\right\}-\frac{1}{4}>\frac{1}{2} \tag{8}$$

при $n\geqslant n_0$. Полагая

$$K=\left[\ln\frac{n}{n_0}\Big/\ln 4\right]$$

и учитывая (8), имеем:

$$\mu_n\geqslant\sum_{k=1}^{K}\sum_{\substack{4^{k-1}n_0\leqslant m<4^k n_0\\ m\in Q_n}}\frac{1}{m}\geqslant\sum_{k=1}^{K}\sum_{2\cdot4^{k-1}n_0\leqslant m<4^k n_0}\frac{1}{m}.$$

Из известной оценки

$$\sum_{m<n}\frac{1}{m}=\ln n+c_1+\frac{B}{n} \tag{9}$$

заключаем:

$$\mu_n \geqslant \sum_{k=1}^{K}\left(\ln 2+\frac{B}{4^k n_0}\right)=K\ln 2+\frac{B}{n_0}>$$

$$>\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ln n_0}{\ln n}\right)\ln n-\ln 2+\frac{B}{n_0}>\frac{1}{3}\ln n \tag{10}$$

для достаточно больших $n\geqslant n_1\geqslant n_0$.

Оценим теперь μ_n сверху. Имеем:

$$\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{m\in Q_n}\frac{n}{m}<\frac{1}{n}\left(\sum_{l\in Q_n}\left[\frac{n}{l}\right]+n\right)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{l|m\\ l\in Q_n}}1+1=\frac{1}{n}S+1. \tag{11}$$

Подберем большую положительную константу λ и $n_2\geqslant n_1$ так, чтобы при $n\geqslant n_2$

$$\sum_{p_k\leqslant n}\frac{1}{p_k}>\lambda. \tag{12}$$

Разобъем сумму S на две: S_1 и S_2, отнеся к S_1 те m, для которых $d(m)$ имеет меньше чем λ простых делителей, а к S_2 все остальные m. Ясно, что для каждого m, входящего в сумму S_1,

$$\sum_{\substack{l|m\\ l\in Q_n}}1\leqslant\tau\big(d(m)\big)\tau\big(h(m)\big)<2^\lambda\tau\big(h(m)\big).$$

Следовательно,

$$S_1<2^\lambda\sum_{m=1}^{n}\tau\big(h(m)\big)=2^\lambda{\sum_{a\leqslant n}}'\left[\frac{n}{a}\right],$$

где суммируется по всем $a\leqslant n$, не делящимся на простые числа p_k. Отсюда

$$S_1<2^\lambda n{\sum_{a\leqslant n}}'\frac{1}{a}<2^\lambda n\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\neq p_k}}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots\right)=2^\lambda n\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\neq p_k}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=$$

$$=2^\lambda n\prod_{p\leqslant n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{p_k\leqslant n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Как известно,

$$\prod_{p\leqslant n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\leqslant c_2\ln n.$$

В силу (12)

$$\prod_{p_k\leqslant n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=\exp\left\{\sum_{p_k\leqslant n}\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\right\}<\exp\left\{-\sum_{p_k\leqslant n}\frac{1}{p_k}+c_3\sum_{k}\frac{1}{p_k^2}\right\}<$$

$$<\exp\{-\lambda+c_4\}=c_5e^{-\lambda}.$$

Поэтому

$$S_1<c_6\left(\frac{2}{e}\right)^\lambda n\ln n. \tag{13}$$

Переходим к оценке S_2. Каждый делитель $l\in Q_n$ числа $m=d(m)g(m)h(m)$ имеет вид $d(l)h(l)$, где $d(l)\,|\,d(m)$, $h(l)\,|\,h(m)$. Согласно предположению для двух делителей $d(l_1)h(l_1)$ и $d(l_2)h(l_2)$ с $h(l_1)=h(l_2)$ всегда $d(l_1)$ и $d(l_2)$ не делят одно другого. Если $d(m)=p_{k_1}p_{k_2}\dots p_{k_s}$, то число всех допустимых делителей $d(m)$ равно числу подмножеств множества $\{p_{k_1}, p_{k_2}, \dots, p_{k_s}\}$, которые не являются подмножествами одно другого. Согласно одной теореме Шпернера [7] их число

$$u \leqslant \binom{s}{[s/2]}.$$

Из формулы Стирлинга

$$\ln\Gamma(y+\delta)=\left(y+\delta-\frac{1}{2}\right)\ln y-y+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{B}{y},$$

справедливой при $y+\delta>c_7$, имеем

$$\ln u\leqslant \ln\Gamma(s+1)-\ln\Gamma\left(\left[\frac{s}{2}\right]+1\right)-\ln\Gamma\left(s-\left[\frac{s}{2}\right]+1\right)=\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln s-$$

$$-\left(\left[\frac{s}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{s}{2}-\left(s-\left[\frac{s}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{B}{s}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln s+(s+1)\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{B}{s}.$$

Следовательно,

$$u\leqslant\frac{c_8 2^s}{\sqrt{s}}\leqslant\frac{c_8\tau(d(m))}{\sqrt{\lambda}}.$$

Все делители $l\in Q_n$ числа m получим, варьируя $d(l)\mid d(m)$ и $h(l)\mid h(m)$. Их число не превосходит

$$\frac{c_6}{\sqrt{\lambda}}\tau\left(d(m)\right)\tau\left(h(m)\right)\leqslant\frac{c_8}{\sqrt{\lambda}}\tau(m).$$

Таким образом, согласно (9)

$$S_2\leqslant\frac{c_8}{\sqrt{\lambda}}\sum_{m=1}^{n}\tau(m)=\frac{c_6}{\sqrt{\lambda}}\sum_{m=1}^{n}\left[\frac{n}{m}\right]\leqslant\frac{c_8 n}{\sqrt{\lambda}}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}<\frac{c_9 n}{\sqrt{\lambda}}\ln n.$$

Подставляя эту оценку и (13) в (11), получаем:

$$\mu_n<c_6\left(\frac{2}{e}\right)^{\lambda}\ln n+\frac{c_9}{\sqrt{\lambda}}\ln n+1<\frac{1}{3}\ln n$$

при достаточно большом λ и $n\geqslant n_3\geqslant n_2$, что противоречит (10).

Таким образом, в множестве Q_n имеется пара неравных чисел $m_1=d(m_1)h(m_1)$ и $m_2=d(m_2)h(m_2)$, удовлетворяющих условиям $h(m_1)=h(m_2)$, $d(m_1)\mid d(m_2)$. Так как

$$f(m_2)=f\left(d(m_2)\,h(m_2)\right)=f\left(d(m_1)\,\frac{d(m_2)}{d(m_1)}\,h(m_1)\right)=f(m_1)+f\left(\frac{d(m_2)}{d(m_1)}\right)$$

и

$$|f(m_1)-A_n|\leqslant\frac{c}{2},\quad |f(m_2)-A_n|\leqslant\frac{c}{2},$$

то

$$\left|f\left(\frac{d(m_2)}{d(m_1)}\right)\right|\leqslant c. \tag{14}$$

Но $d(m_2)/d(m_1)$ является непустым произведением чисел p_k, причем $f(p_k)>c$. Это противоречит (14). Следовательно, наше первоначальное предположение неверно, и существует такая константа c, что ряд (2) сходится.

2. Пусть опять предельный закон для (1) существует и равен $F(x)$. Докажем, что тогда и ряд (3) сходится. Предположим противное, что этот ряд расходится.

Рассмотрим закон
$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A^*(n)}{B^*(n)}<x\right\}, \tag{15}$$
где
$$A^*(n)=\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f(p)}{p},\quad B^*(n)=\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f^2(p)}{p}\Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$
Введем аддитивную функцию $f^*(m)$, полагая
$$f^*(p^\alpha)=\begin{cases}0, \text{ если } \alpha\geqslant 2,\\ 0, \text{ если } \alpha=1,\ |f(p)|\geqslant c,\\ f(p), \text{ если } \alpha=1,\ |f(p)|<c.\end{cases}$$
В силу доказанного в п. 1 и лемм 3.2, 4.1 из [7] предельные законы для (15) и
$$\nu_n\left\{\frac{f^*(m)-A^*(n)}{B^*(n)}<x\right\} \tag{16}$$
существуют лишь одновременно и в случае существования совпадают. Из теоремы 4.2 [7] имеем, что закон (16) сходится при $n\to\infty$ к нормальному закону
$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du,$$
следовательно, и закон (15) сходится к $G(x)$. Всегда можно выбрать такую последовательность целых положительных чисел $n_1<n_2<\ldots$, чтобы последовательность чисел
$$\frac{A_{n_k}-A^*(n_k)}{B^*(n_k)}$$
сходилась при $k\to\infty$ к пределу L, который может быть как конечным, так и бесконечным. Пусть v – любое фиксированное положительное число, причем v и $-v$ являются точками непрерывности $F(x)$. Положим
$$\Phi_k(v)=\nu_{n_k}\{-v\leqslant f(m)-A_{n_k}<v\}=$$
$$=\nu_{n_k}\left\{\frac{-v+A_{n_k}-A^*(n_k)}{B^*(n_k)}\leqslant\frac{f(m)-A^*(n_k)}{B^*(n_k)}\leqslant\frac{v+A_{n_k}-A^*(n_k)}{B^*(n_k)}\right\}.$$
Пусть L – конечно. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ при $k\geqslant k_0(\varepsilon)$
$$\left|\frac{-A^*(n_k)+A_{n_k}}{B^*(n_k)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \frac{v}{B^*(n_k)}<\frac{\varepsilon}{2}.$$
Следовательно, при $k\geqslant k_0(\varepsilon)$
$$\Phi_k(v)\leqslant\nu_{n_k}\left\{L-\varepsilon<\frac{f(m)-A^*(n_k)}{B^*(n_k)}<L+\varepsilon\right\},$$
откуда при $k\to\infty$ имеем:
$$F(v)-F(-v)\leqslant G(L+\varepsilon)-G(L-\varepsilon).$$
Устремив ε к нулю, получаем, что $F(v)-F(-v)=0$; это невозможно при достаточно большом v.

Пусть теперь L – бесконечное число. Тогда для всякого $M>0$ найдется такое k_1, что при $k\geqslant k_1$
$$\frac{|\pm v+A_{n_k}-A^*(n_k)|}{B^*(n_k)}>M.$$

В силу леммы 3.1 [7] при $k \geqslant k_1$

$$\Phi_k(v) \leqslant \nu_{n_k}\left\{\frac{|f(m)-A^*(n_k)|}{B^*(n_k)} > M\right\} = \frac{B}{M^2}.$$

Отсюда заключаем опять, что $F(v)-F(-v)=0$.

Таким образом, ряд (3) сходится.

3. Для завершения доказательства теоремы нам остается доказать, что в случае сходимости рядов (2), (3) необходимым и достаточным условием для сходимости закона (1) к предельному является сходимость последовательности (4) и что характеристическая функция предельного закона в случае его существования равна (5), причем характер закона имеет указанные в формулировке теоремы свойства.

Согласно известным теоремам теории вероятностей необходимым и достаточным условием сходимости закона (1) к предельному является равномерная сходимость его характеристической функции

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\nu_n\{f(m)-A_n<x\} = \frac{e^{-iA_n t}}{n}\sum_{m=1}^{n} e^{itf(m)} =$$

$$= \frac{e^{-iA_n t}}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp\left\{it\sum_p f(p^{\alpha_p(m)})\right\} \tag{17}$$

при $|t| \leqslant T$ для всякого фиксированного T, где $\alpha_p(m)$ означает наибольшее целое α, удовлетворяющее условию $p^\alpha \mid m$.

Все дальнейшие оценки будут равномерны по $t \in [-T, T]$.

Положим

$$\sum_{\substack{p>\ln n\\ |f(p)|<c}} \frac{f^2(p)}{p} = z^6(n). \tag{18}$$

В силу сходимости ряда (3) $z(n)$ стремится монотонно к нулю при $n \to \infty$. Пусть

$$r = r(n) = \begin{cases} \exp\left\{\exp\left(-z^{-3}(n)\right)\ln n\right\}, & \text{если } z^3(n) \geqslant \dfrac{2}{\ln\ln n}. \\ \ln n & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Очевидно, в первом случае

$$r(n) \geqslant \exp\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\ln n\right)\ln n\right\} = \exp\left(\sqrt{\ln n}\right) > \ln n.$$

Далее, $r(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\ln r(n) = o(\ln n)$.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma_p = \left[\frac{\ln r}{\ln p}\right], \quad \beta_p(m) = \min(\alpha_p(m), \gamma_p),$$

$$\pi(p^\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{p^\alpha}\left(1-\dfrac{1}{p}\right), & \text{если } \alpha<\gamma_p, \\ \dfrac{1}{p^\gamma}, & \text{если } \alpha=\gamma_p. \end{cases}$$

В последнем члене формулы (17) заменим $f(m)$ на

$$f_n(m) = \sum_{p \leqslant r} f(p^{\beta_p(m)}) + \sum_{\substack{p \| m\\ p>r\\ |f(p)|<c}} f(p).$$

Для $m=1, 2, \ldots, n$ функция $f(m)$ может отличаться от $f_n(m)$ для тех m, которые делятся хотя бы на одно из чисел: 1) p^α, $p\leqslant r$, $\alpha>\gamma_p$, 2) p^α, $p>r$, $\alpha\geqslant 2$, 3) $p>r$, $|f(p)|\geqslant c$. В силу сходимости ряда (2) и оценки

$$\sum_{p\leqslant r} 1=\frac{Br}{\ln r} \tag{19}$$

таких чисел не больше чем

$$\sum_{\substack{p\leqslant r\\ \alpha\geqslant\gamma_p+1}}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]+\sum_{\substack{p>r\\ \alpha\geqslant 2}}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]+\sum_{\substack{p>r\\ |f(p)|\geqslant c}}\left[\frac{n}{p}\right]=$$

$$=Bn\sum_{p\leqslant r}\frac{1}{p^{\gamma_p+1}}+Bn\sum_{p>r}\frac{1}{p^2}+Bn\sum_{\substack{p>r\\ |f(p)|\geqslant c}}\frac{1}{p}=\frac{Bn}{r}\sum_{p\leqslant r}1+o(n)=o(n).$$

Следовательно, ошибка от этой замены будет $o(1)$. Имеем:

$$\varphi_n(t)=\frac{e^{-iA_nt}}{n}\sum_{m=1}^{n}e^{itf_n(m)}+o(1). \tag{20}$$

Заменим теперь в (20) $f_n(m)$ на функцию

$$f(m)_r=\sum_{p\leqslant r}f\left(p^{\beta_p(m)}\right).$$

В силу леммы 3.1 [7] и (18)

$$\sum_{m=1}^{n}\left(f_n(m)-f(m)_r\right)^2\leqslant c_{10}n\sum_{\substack{r<p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f^2(p)}{p}\leqslant c_{10}nz^6(n).$$

Отсюда следует, что

$$\nu_n\{|f_n(m)-f(m)_r|\geqslant z^2(n)\}\leqslant c_{11}z^2(n). \tag{21}$$

Сумму в правой части (20) разобъем на две: по тем m, для которых $|f_n(m)-f(m)_r|\geqslant z^2(n)$, и тем m, для которых выполняется противоположное неравенство. В силу (21) первая сумма равна $Bz^2(n)$. Во второй сумме

$$e^{itf_n(m)}=e^{itf(m)_r+Bz^2(n)}=e^{itf(m)_r}+Bz^2(n).$$

Следовательно,

$$\varphi_n(t)=\frac{e^{-iA_nt}}{n}\sum_{m=1}^{n}e^{itf(m)_r}+o(1). \tag{22}$$

Рассмотрим два вероятностных пространства $\{E, \mathfrak{F}, \nu_n\}$ и $\{E, \mathfrak{F}, P\}$. Здесь множество элементарных событий $E=\{1, 2, \ldots, n\}$. Множество случайных событий $\mathfrak{F}$ является наименьшей алгеброй подмножеств множества E, содержащая все множества $E(p^\alpha)$, $p\leqslant r$, $\alpha=0,1, \ldots, \gamma_p$, где $E(p^\alpha)$ состоит из тех целых положительных $m\leqslant n$, для которых $\beta_p(m)=\alpha$. Множества алгебры $\mathfrak{F}$ можно представить в виде сумм множеств вида

$$\bigcap_{p\leqslant r}E\left(p^{\alpha_p(k)}\right),$$

где число k имеет вид

$$\prod_{p\leqslant r}p^{\alpha_p},\quad 0\leqslant\alpha_p\leqslant\gamma_p.$$

Таким образом, для всякого $A \in \mathfrak{F}$ существует набор различных между собой k, что

$$A = \bigcup_{k}{}^{*} \bigcap_{p \leqslant r} E(p^{\alpha_p(k)}),$$

причем объединение берется по этим k. Вероятностная мера

$$P(A) = \sum_{k} \prod_{p \leqslant r} \pi(p^{\alpha_p(k)}),$$

где сумма берется по тем же k, а мера $\nu_n(A)$ равна $\nu_n\{m \in A\}$.

Известно ([7], стр. 49—50), что равномерно по $A \in \mathfrak{F}$

$$\nu_n(A) - P(A) = o(1),$$

причем $f(p^{\beta_p(m)})$ являются независимыми случайными величинами относительно пространства $\{E, \mathfrak{F}, P\}$. Следовательно,

$$\varphi_n(t) = e^{-iA_n t} \prod_{p \leqslant r} \psi_{p,n}(t) + o(1), \tag{23}$$

где

$$\psi_{p,n}(t) = \sum_{\alpha=0}^{\gamma_p} \pi(p^\alpha)\, e^{itf(p^\alpha)}.$$

Заметим, что

$$\psi_{p,n}(t) - 1 - \frac{e^{itf(p)} - 1}{p} = \Theta\left(\frac{1}{p^2} + \sum_{\alpha=2}^{\gamma_p - 1} \frac{1}{p^\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p^\gamma}\right) = \frac{2\Theta}{p^2} \tag{24}$$

и

$$|\psi_{p,n}(t)| \geqslant \left|1 + \frac{e^{itf(p)} - 1}{p}\right| - \frac{2}{p^2} \geqslant 1 - \frac{2}{p} - \frac{2}{p^2} \geqslant 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9} > 0 \tag{25}$$

при $p > 2$. Таким образом, $\psi_{p,n}(t) \neq 0$ при $p > 2$. Из (23) и (24) заключаем, что

$$\varphi_n(t) = \psi_{2,n}(t) \exp\left\{-iA_n t + \sum_{2 < p \leqslant r} \ln \psi_{p,n}(t)\right\} + o(1) =$$

$$= \psi_{2,n}(t) \exp\left\{-iA_n t + \varkappa(t) + B \sum_{p \leqslant r} \frac{1}{p^2}\right\} + o(1), \tag{26}$$

где

$$\varkappa(t) = \sum_{2 < p \leqslant r} \frac{e^{itf(p)} - 1}{p}.$$

Разобъем эту сумму на две:

$$\varkappa(t) = K_1(t) + K_2(t), \tag{27}$$

отнеся к сумме $K_1(t)$ слагаемые, удовлетворяющие условиям $|f(p)| < c$, а к $K_2(t)$ — все остальные. Тривиальным образом

$$K_2(t) = B \sum_{\substack{p \leqslant r \\ |f(p)| \geqslant c}} \frac{1}{p}. \tag{28}$$

В силу неравенства

$$|e^{iy} - 1 - iy| \leqslant \frac{1}{2} y^2, \tag{29}$$

справедливого для всех вещественных y, имеем, что

$$K_1(t) = it \sum_{\substack{2 < p \leqslant r \\ |f(p)| < c}} \frac{f(p)}{p} + \frac{\Theta}{2} t^2 \sum_{\substack{p \leqslant r \\ |f(p)| < c}} \frac{f^2(p)}{p}.$$

В силу неравенства Коши, (18) и оценки

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}=\ln\ln y+B$$

имеем

$$\Bigl|\sum_{\substack{r<p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f(p)}{p}\Bigr|\leqslant\Bigl(\sum_{r<p\leqslant n}\frac{1}{p}\cdot\sum_{\substack{r<p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f^2(p)}{p}\Bigr)^{\frac{1}{2}}=B\left(\ln\frac{\ln n}{\ln r}\right)^{\frac{1}{2}}z^3(n). \tag{30}$$

При $z^3(n)\geqslant 2/\ln\ln n$ эта оценка равна $Bz^{\frac{3}{2}}(n)$, а при $z^3(n)<2/\ln\ln n$ она равна $B(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}z^3(n)=B(\ln\ln n)^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, в обоих случаях она равна $o(1)$ и

$$K_1(t)=it\Bigl(\sum_{\substack{2<p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f(p)}{p}+o(1)\Bigr)+Bt^2\sum_{\substack{p\leqslant r\\ |f(p)|<c}}\frac{f^2(p)}{p}. \tag{31}$$

Из (26), (27), (28), (31), учитывая сходимость рядов (2), (3), следует, что для равномерной сходимости при $t\in[-T,T]$ функции $\varphi_n(t)$ к предельной необходима и достаточна сходимость последовательности (4).

Подсчитаем характеристическую функцию предельного закона в случае его существования. Положим

$$\chi_p(t)=\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}.$$

Так как

$$\chi_p(t)-\psi_{p,n}(t)=-\frac{\exp\{itf(p^{\gamma_p})\}}{p^{\gamma_p+1}}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=\gamma_p+1}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}=\frac{2\Theta}{p^{\gamma_p+1}}=\frac{2\Theta}{r}, \tag{32}$$

то

$$\varphi_n(t)=e^{-iA_nt}\prod_{p\leqslant r}\left(\chi_p(t)+\frac{B}{r}\right)+o(1)=e^{-iA_nt}\prod_{p\leqslant r}\chi_p(t)+B\left|\left(1+\frac{B}{r}\right)^{\rho(r)}-1\right|+o(1),$$

где $\rho(r)$ — число простых чисел, не превосходящих r. В силу (19)

$$\left(1+\frac{B}{r}\right)^{\rho(r)}-1=\exp\left\{\rho(r)\ln\left(1+\frac{B}{r}\right)\right\}-1=\exp\left\{\frac{B}{\ln r}\right\}-1=\frac{B}{\ln r}.$$

Таким образом,

$$\varphi_n(t)=e^{-iA_nt}\prod_{p\leqslant r}\chi_p(t)+o(1).$$

Далее, в силу (24), (25), (32), (28), (29), (30) и сходимости рядов (2), (3)

$$\prod_{r<p\leqslant n}\chi_p(t)=\exp\Bigl\{\sum_{r<p\leqslant n}\frac{e^{itf(p)}-1}{p}+B\sum_{p>r}\frac{1}{p^2}\Bigr\}=$$

$$=\exp\Bigl\{B\sum_{\substack{p>r\\ |f(p)|\geqslant c}}\frac{1}{p}+it\sum_{\substack{r<p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f(p)}{p}-\frac{1}{2}t^2\sum_{\substack{p>r\\ |f(p)|<c}}\frac{f^2(p)}{p}+o(1)\Bigr\}=$$

$$=\exp\{o(1)\}=1+o(1).$$

Окончательно мы получаем, что

$$\varphi_n(t)=e^{-iA_nt}\prod_{p\leqslant n}\chi_p(t)+o(1).$$

Указанные в формулировке теоремы свойства предельного закона следуют из приведенной выше теоретико-вероятностной интерпретации функции $f(m)$ и теорем Б. Йессена – А. Винтнера и П. Леви ([10], стр. 28).

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что для сходимости $\nu_n\{f(m)-A_n<x\}$ к предельному закону необходимым и достаточным условием является равномерная сходимость для $|t|\leqslant T$ выражения

$$-iA_nt+\sum_{p\leqslant n}\frac{e^{itf(p)}-1}{p},$$

а это равносильно, как нетрудно убедиться, сходимости (2), (3), (4) при любом c, в частности, при $c=1$.

Подбирая величины A_n равные нулю, мы получаем теорему П. Эрдёша и А. Винтнера:

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием сходимости закона* $\nu_n\{f(m)<x\}$ *к предельному является существование такой константы* c, *что ряды* (2), (3) *и*

$$\sum_{|f(p)|<c}\frac{f(p)}{p}$$

сходятся. Характеристическая функция предельного закона равна

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}.$$

О характере предельного закона можно сказать то же самое, что и в теореме 1.

Подбирая величины

$$A_n=\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f(p)}{p},$$

где c – любая положительная константа, имеем следующую теорему.

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием сходимости закона*

$$\nu_n\left\{f(m)-\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|<c}}\frac{f(p)}{p}<x\right\}$$

к предельному является сходимость рядов (2) *и* (3). *Характер предельного закона определяется указанным в теореме* 1 *способом.*

Достаточность условия этой теоремы высказал П. Эрдёш ([11], стр. 2). Ее доказал аналитически Г. Делянж [5].

Изложенный здесь метод применим к рассмотрению условий сходимости к предельному закону законов

$$\nu_n\{f_1(m)-f_2(m+a)<x\},$$
$$\nu_n\{f_1(m)-A_n<x,\ f_2(m)-A'_n<y\},$$
$$\nu_n\{f_1(m)-A_n<x,\ f_2(m+a)-A'_n<y\},$$
$$\nu_n\left\{f\Big(R(m)\Big)<x\right\}$$

и т. д., где $f(m)$, $f_1(m)$, $f_2(m)$ — вещественные аддитивные арифметические функции, a — целое положительное число, A_n и A'_n — вещественные числа, $R(m)$ — полином, принимающий целые положительные значения, когда m пробегает целые положительные числа.

Поступило в редакцию
13.10.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Erdös, A. Wintner. Additive arithmetical functions and statistical independence. Amer. J. Math., 1939, **61**, 713–721.
2. H. Delange. Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives. Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, 1961, **78**, 273–304.
3. H. Delange. Distribution des valeurs de certaines fonctions arithmétiques. Séminaire Delange-Pisot (Théorie des nombres), 2e année, 1960/61, № 2, 2-01–2-25.
4. H. Delange. Application de la méthode du crible à l'étude des valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques. Séminaire Delange-Pisot (Théorie des nombres), 3e année, 1961/62, № 16, 16-01–16-10.
5. H. Delange. On a class of multiplicative arithmetical functions. Scripta math., 1963, **26**, 121–141.
6. Е. В. Новоселов. Новый метод в вероятностной теории чисел. Изв. АН СССР, сер. матем., 1964, 28, 307–364.
7. Й. Кубилюс. Вероятностные методы в теории чисел. Вильнюс, Гос. издат. полит. и научн. лит., 1962.
8. F. Behrend. On sequences of numbers not divisible one by another. Journ. London Math. Soc., 1935, **10**, 42–44.
9. E. Sperner. Ein Satz über Untermengen einer unendlichen Menge. Math. Zeitschr., 1928, **27**, 544–548.
10. C. G. Esseen. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. Acta math., 1945, **77**, 1–125.
11. P. Erdös. On the distribution of additive functions. An. Math., 1946, **47**, 1–20.

ADITYVINIŲ ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ ASIMPTOTINIŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ KLAUSIMU

J. KUBILIUS

(Reziumė)

Įrodoma ši teorema.

Sakykime, kad $f(m)$ yra reali aritmetinė adityvinė funkcija, A_n $(n=1, 2, \ldots)$ – realiųjų skaičių seka. Pažymėsime $\nu_n(x)$ dažnumą sveikų teigiamų skaičių $m \leqslant n$, kuriems $f(m)-A_n<x$. Raidė p reiškia pirminį skaičių.

$\nu_n(x)$ konverguoja į ribinį pasiskirstymo dėsnį kiekviename jo tolydumo taške tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia teigiama konstanta c, kad eilutės

$$\sum_{|f(p)|\geqslant c} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)|<c} \frac{f^2(p)}{p}$$

ir seka

$$A_n - \sum_{\substack{p\leqslant n \\ |f(p)|<c}} \frac{f(p)}{p} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

konverguoja. Ribinio dėsnio $F(x)$, jei jis egzistuoja, charakteringoji funkcija $\varphi(t)$ yra lygi ribai

$$\lim_{n\to\infty} e^{-iA_n t} \prod_{p\leq n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}.$$

Ši riba egzistuoja visiems realiems t, ir konvergavimas yra tolygus kiekviename fiksuotame intervale. Būtina ir pakankama sąlyga, kad ribinis dėsnis būtų diskretinis, yra eilutės

$$\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}$$

konvergavimas.

Įrodymas yra pagrįstas darbo [7] idėjomis.

Žinomoji Erdiošo ir Vintnerio teorema yra šio rezultato išvada.

SUR LES LOIS ASYMPTOTIQUES DE DISTRIBUTION DES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES ADDITIVES

PAR J. KUBILIUS

(Résumé)

On établit le théorème suivant.

Soit $f(m)$ une fonction arithmétique réelle additive, et soit A_n $(n=1, 2, \ldots)$ une suite des nombres réels. Désignons par $\nu_n(x)$ la fréquence des nombres entiers positifs m au plus égaux à n pour lesquels on a $f(m)-A_n<x$. La lettre p est employée comme symbole générique d'un nombre premier.

Pour que $\nu_n(x)$ tende vers une loi de distribution $F(x)$ dans chaque son point de continuité, il faut et il suffit que, pour une certaine positive constante c, les séries

$$\sum_{|f(p)|\geq c}\frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)|<c}\frac{f^2(p)}{p}$$

et la suite

$$A_n-\sum_{\substack{p\leq n\\ |f(p)|<c}}\frac{f(p)}{p} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

soient convergentes. La fonction caractéristique $\varphi(t)$ de la loi limite $F(x)$, si elle existe, est égale à la limite

$$\lim_{n\to\infty} e^{-iA_n t} \prod_{p\leq n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}.$$

Cette limite existe pour tout t réel et la convergence est uniforme dans chaque intervalle fixé. La condition nécessaire et suffisante, pour que la loi limite soit discrète, est la convergence de la série

$$\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}.$$

La démonstration est fondée sur les idées du travail [7].

Le théorème connu d'Erdös et Wintner [1] est une conséquence de ce résultat.