V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УПРАВЛЕНИЙ ПУАССОНОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

1. Постановка задачи. В работе будет рассматриваться частный случай следующей задачи, ставившейся И. Н Коваленко. Пусть $\xi(t)$ $(t \geqslant 0)$ – процесс рождения, т. е. однородный марковский процесс с непрерывным временем, принимающий лишь целые неотрицательные значения, переходная функция вероятностей которого удовлетворяет соотношениям:

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)=0 \mid \xi(t)=k\}=1-\lambda_k \Delta t+o(\Delta t)$$

и

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)=1 \mid \xi(t)=k\}=\lambda_k \Delta t+o(\Delta t).$$

Предполагаем, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-1}=\infty$ (условие необрыва процесса [1]) и $\mathbf{P}\{\xi(0)=0\}=1$.

Управление процессом задаётся выбором натурального числа m и положительных действительных чисел $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}$. В момент времени τ_0 процесс контролируется. Если контроль обнаруживает, что в этот момент процесс $\xi(t)$ принимает значение $k \leqslant m-1$, то следующий контроль назначается через время τ_k. Таким способом контролирование повторяется до тех пор, пока не обнаружится, что процесс принимает значение $k \geqslant m$. В последнем случае назначается ремонт, после которого процесс $\xi(t)$ переводится в нулевое состояние и вся процедура, независимо от прошлого, начинается с начала. Далее будем предполагать, что время контроля η_Q и время ремонта η_R не зависят от процесса $\xi(t)$ и имеют конечные математические ожидания соответственно α и β.

Случайный процесс $\eta(t)$ определяем следующим образом: $\eta(t)=k$, если $\xi(t)=k$ и $\xi(t)$ не находится в состояниях контроля или ремонта; $\eta(t)$ находится в состояниях Q или R, если в момент t процесс $\xi(t)$ находится в состояниях контроля или ремонта соответственно.

Обозначим

$$\begin{aligned} p_k&=\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}, \\ p_Q&=\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)\in Q\}, \qquad (1) \\ p_R&=\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)\in R\} \end{aligned}$$

в случае, когда эти пределы существуют.

Требуется выбрать числа m, τ_0, τ_1, $\ldots$, τ_{m-1} таким образом, чтоб минимизировать функционал от процесса

$$F=\lim_{t\to\infty}\mathbf{M}f\big(\eta(t)\big)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kf_k+p_Qf_Q+p_Rf_R, \tag{2}$$

где числа $f_k\,(k\geqslant 0)$, f_Q и f_R — заданны.

Наша цель — найти явный вид функционала (2) в случае управляемого пуассоновского процесса, что даёт возможность отыскивать оптимальные параметры управления.

2. Управление пуассоновским процессом. Далее будем предполагать, что $\lambda_k\equiv\lambda$ $(k\geqslant 0)$, т. е. процесс $\xi(t)$ является пуассоновским, и $\tau_0=\tau_1=\ldots=\tau_{m-1}=\tau$. Итак, мы рассматриваем управление пуассоновским процессом, когда контроль проводится через равные промежутки времени.

Пусть ν_m — число проведённых контролей над процессом $\xi(t)$ до момента первого ремонта; τ_{km} — время пребывания процесса $\eta(t)$ в состоянии k до первого перехода в состояние R.

Обозначим

$$\Theta(m,\ \tau)=\mathbf{M}\nu_m,$$

$$\psi_r(\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}j^re^{-\lambda\tau j}=(-1)^r\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)^{(r)}_{x=\lambda\tau}.$$

Теорема. *Если функция распределения η_R имеет абсолютно непрерывную компоненту, то пределы* (1) *существуют и равны:*

$$p_k=\frac{1}{\lambda\Theta(m,\ \tau)(\tau+\alpha)+\lambda\beta}\qquad(k\leqslant m-1),$$

$$p_k=\frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{m-1}\psi_r(\tau)\frac{(\lambda\tau)^r}{r!\,(k-r)!}\int_0^{\lambda\tau}u^{k-r}e^{-u}\,du}{\lambda\Theta(m,\ \tau)(\tau+\alpha)+\lambda\beta}\qquad(k\geqslant m), \tag{3}$$

$$p_Q=\frac{\Theta(m,\ \tau)\,\alpha}{\lambda\Theta(m,\ \tau)(\tau+\alpha)+\lambda\beta},\quad p_R=\frac{\beta}{\Theta(m,\ \tau)(\tau+\alpha)+\beta},$$

$$\Theta(m,\ \tau)=\sum_{r=0}^{m-1}\big(\psi_{r+1}(\tau)+\psi_r(\tau)\big)\frac{(\lambda\tau)^r}{r!\,(m-r-1)!}\int_0^{\lambda\tau}e^{-u}u^{m-r-1}\,du. \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что процесс $\eta(t)$ — регенерирующий (см. [2]), точками регенерации которого являются моменты перехода в нулевое состояние. Время регенерации имеет величину

$$\varkappa_m=\nu_m\tau+\sum_{i=1}^{\nu_m}\eta_Q^{(i)}+\eta_R,$$

где $\eta_Q^{(i)}$ — независимые реализации η_Q.

Поскольку

$$\mathbf{P}\{\nu_m=k\}=\sum_{r=0}^{m-1}P\Big\{\xi\big((k-1)\,\tau\big)=r,\ \xi(k\tau)-\xi\big((k-1)\,\tau\big)\geqslant m-r\Big\}=$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}e^{-\lambda\tau(k-1)}\frac{[\lambda\tau(k-1)]^r}{r!\,(m-r-1)!}\int_0^{\lambda\tau}e^{-u}u^{m-r-1}\,du=\frac{1}{(m-1)!}\int_{\lambda\tau(k-1)}^{\lambda\tau k}e^{-u}u^{m-1}\,du,$$

то

$$\Theta(m, \tau)=\sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}\{\nu_m=k\}=\sum_{r=0}^{m-1}[\psi_{r+1}(\tau)+$$

$$+\psi_r(\tau)]\frac{(\lambda\tau)^r}{r!(m-r-1)!}\int_0^{\lambda\tau} e^{-u}u^{m-r-1}\,du<\infty.$$

Мы установили соотношение (4) и показали, что $\mathbf{M}\varkappa_m=\beta+\Theta(m, \tau)\times\times(\tau+\alpha)<\infty$. Так как функция распределения $\varkappa_m$ имеет абсолютно непрерывную компоненту и $\mathbf{M}\varkappa_m<\infty$, этим по общей теореме для регенерирующих процессов (см. [2], а также [3]) обеспечивается существование стационарных вероятностей p_k, p_Q и p_R. По той же теореме

$$p_k=\frac{\mathbf{M}\tau_{km}}{\mathbf{M}\varkappa_m},\quad p_Q=\frac{\alpha\Theta(m, \tau)}{\mathbf{M}\varkappa_m}\quad\text{и}\quad p_R=\frac{\beta}{\mathbf{M}\varkappa_m}. \tag{5}$$

Для проверки равенств (3) нам понадобятся функции распределения τ_{km}.

Лемма. *При* $k\leqslant m-1$

$$\mathbf{P}\{\tau_{km}<x\}=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0),\\ 1-e^{-\lambda x} & (x>0),\end{cases} \tag{6}$$

а при $k\geqslant m$

$$\mathbf{P}\{\tau_{km}<x\}=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0),\\ \displaystyle\sum_{r=0}^{m-1}\psi_r(\tau)\frac{(\lambda\tau)^r}{r!}\Bigg[\frac{1}{(m-r-1)!}\int_0^{\lambda\tau} e^{-u}u^{m-r-1}\,du- & \\ \displaystyle -\frac{e^{-\lambda x}}{(k-r-1)!}\int_0^{\lambda(\tau-x)} e^{-u}u^{k-r-1}\,du\Bigg], & (0<x\leqslant\tau),\\ 1 & (x>\tau).\end{cases} \tag{7}$$

Доказательство леммы. Обозначим через η_k время пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии k $(k=0, 1, \ldots)$. В нами рассматриваемом пуассоновском случае все η_k независимы и одинаково распределены с показательной функцией распределения. Равенства (6) очевидны, поскольку $\tau_{km}=\eta_k$ $(k\leqslant m-1)$.

Далее, при $k\geqslant m$ имеем:

$$\mathbf{P}\{\tau_{km}<x\}=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\mathbf{P}\Big\{\xi\Big((l-1)\tau\Big)=r,\ \xi(l\tau)=s,\ \tau_{km}<x\Big\}. \tag{8}$$

Для краткости обозначим

$$P_s(x)=\mathbf{P}\Big\{\xi\Big((l-1)\tau\Big)=r,\ \xi(l\tau)=s,\ \tau_{km}<x\Big\}. \tag{9}$$

При $m\leqslant s<k$ находим, что

$$\mathbf{P}_s(x)=\mathbf{P}\Big\{\xi\Big((l-1)\tau\Big)=r,\ \xi(l\tau)=s\Big\}=\frac{\lambda^s[(l-1)\tau]^r e^{-\lambda l\tau}}{r!(s-r)!}\tau^{s-r}. \tag{10}$$

В случае $s=k$ имеем:

$$\mathbf{P}_k(x)=\mathbf{P}\{\eta_0+\eta_1+\ldots+\eta_{r-1}<(l-1)\tau,\ \eta_0+\ldots+\eta_r\geqslant(l-1)\tau,$$
$$\eta_0+\ldots+\eta_{k-1}<l\tau,\ \eta_0+\ldots+\eta_k\geqslant l\tau,\ l\tau-(\eta_0+\ldots+\eta_{k-1})<x\}=$$
$$=\mathbf{P}\{\zeta_1<(l-1)\tau,\ \zeta_1+\zeta_2\geqslant(l-1)\tau,\ l\tau-x<\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3<l\tau,$$
$$\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4\geqslant l\tau\},$$

где обозначено через

$$\zeta_1=\eta_0+\ldots+\eta_{r-1},\ \zeta_2=\eta_r,\ \zeta_3=\eta_{r+1}+\ldots+\eta_{k-1},\ \zeta_4=\eta_k.$$

Отсюда нетрудно определить, что

$$\mathbf{P}_k(x)=\int\limits_0^{(l-1)\tau}\frac{\lambda^r}{(r-1)!}e^{-\lambda x_1}x_1^{r-1}\Bigg[\int\limits_{l\tau-x-x_1}^{l\tau-x_1}\int\limits_0^{l\tau-x_1-x_2}\lambda e^{-\lambda x_2}\frac{\lambda^{k-r-1}}{(k-r-2)!}e^{-\lambda x_3}x_3^{k-r-2}\times$$
$$\times e^{-\lambda(l\tau-x_1-x_2-x_3)}\,dx_2\,dx_3+\int\limits_{(l-1)\tau-x_1}^{l\tau-x-x_1}\int\limits_{l\tau-x-x_1-x_2}^{l\tau-x_1-x_2}\lambda e^{-\lambda x_2}\frac{\lambda^{k-r-1}}{(k-r-2)!}e^{-\lambda x_3}x_3^{k-r-2}\times$$
$$\times e^{-\lambda(l\tau-x_1-x_2-x_3)}\,dx_2\,dx_3\Bigg]dx_1=\frac{\lambda^k e^{-\lambda l\tau}}{(r-1)!\,(k-r-2)!}\int\limits_0^{(l-1)\tau}x_1^{r-1}\Bigg[\int\limits_{l\tau-x-x_1}^{l\tau-x_1}\int\limits_0^{l\tau-x_1-x_2}x_3^{k-r-2}\times$$
$$\times\,dx_2\,dx_3+\int\limits_{(l-1)\tau-x_1}^{l\tau-x-x_1}\int\limits_{l\tau-x-x_1-x_2}^{l\tau-x_1-x_2}x_3^{k-r-2}\,dx_2\,dx_3\Bigg]dx_1=$$
$$=\frac{\lambda^k[(l-1)\tau]^r e^{-\lambda l\tau}}{r!\,(k-r)!}\,[\tau^{k-r}-(\tau-x)^{k-r}]. \qquad (11)$$

Наконец, при $s>k$

$$\mathbf{P}_s(x)=\mathbf{P}\{\eta_0+\ldots+\eta_{r-1}<(l-1)\tau,\ \eta_0+\ldots+\eta_r\geqslant(l-1)\tau,\ \eta_k<x,$$
$$\eta_0+\ldots+\eta_{s-1}<l\tau,\ \eta_0+\ldots+\eta_s\geqslant l\tau\}=\mathbf{P}\{\zeta_1<(l-1)\tau,\ \zeta_1+\zeta_2\geqslant(l-1)\tau,$$
$$\zeta_3<x,\ \zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4<l\tau,\ \zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4+\zeta_5\geqslant l\tau\},$$

где

$$\zeta_1=\eta_0+\ldots+\eta_{r-1},\ \zeta_2=\eta_r,\ \zeta_3=\eta_k,$$
$$\zeta_4=\eta_{r+1}+\ldots+\eta_{k-1}+\eta_{k+1}+\ldots+\eta_{s-1},\ \zeta_5=\eta_s.$$

После несложных вычислений находим:

$$\mathbf{P}_s(x)=\frac{\lambda^s e^{-\lambda l\tau}}{(r-1)!\,(s-r-3)!}\int\limits_0^{(l-1)\tau}\int\limits_{(l-1)\tau-x_1}^{l\tau-x_1}\int\limits_0^{\min(x,\,l\tau-x_1-x_2)}\int\limits_0^{l\tau-x_1-x_2-x_3}x_1^{r-1}x_4^{s-r-3}\times$$
$$\times\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4=\frac{\lambda^s[(l-1)\tau]^r e^{-\lambda l\tau}}{r!\,(s-r)!}\,[\tau^{s-r}-(\tau-x)^{s-r}]. \qquad (12)$$

Из (8)–(12) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\tau_{km}<x\}=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{\infty}\Bigg\{\sum_{s=m}^{\infty}\frac{e^{-\lambda l\tau}[(l-1)\tau]^r\lambda^s}{r!\,(s-r)!}\tau^{s-r}-$$
$$-\sum_{s=k}^{\infty}e^{-\lambda l\tau}\frac{[(l-1)\tau]^r\lambda^s}{r!\,(s-r)!}(\tau-x)^{s-r}\Bigg\}=\sum_{r=0}^{m-1}\psi_r(\tau)\frac{(\lambda\tau)^r}{r!}\times$$
$$\times\Bigg\{\sum_{s=m-r}^{\infty}e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^s}{s!}-e^{-\lambda x}\sum_{s=k-r}^{\infty}e^{-\lambda(\tau-x)}\frac{[\lambda(\tau-x)]^s}{s!}\Bigg\}=$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}\psi_r(\tau)\frac{(\lambda\tau)^r}{r!}\Bigg[\frac{1}{(m-r-1)!}\int\limits_0^{\lambda\tau}e^{-u}u^{m-r-1}\,du-\frac{e^{-\lambda x}}{(k-r-1)!}\int\limits_0^{\lambda(\tau-x)}e^{-u}u^{k-r-1}\,du\Bigg].$$

Лемма доказана.

Пользуясь ею, находим, что при $k \leqslant m-1$

$$\mathbf{M}\tau_{km}=\frac{1}{\lambda}, \tag{13}$$

а при $k \geqslant m$

$$\mathbf{M}\tau_{km}=-\sum_{r=0}^{m-1}\psi_r(\tau)\frac{(\lambda\tau)^r}{r!}\int_0^\tau x d\left[\frac{e^{-\lambda x}}{(k-r-1)!}\int_0^{\lambda(\tau-x)}u^{k-r-1}e^{-u}du\right]=$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}\psi_r(\tau)\frac{(\lambda\tau)^r}{r!}\int_0^\tau \frac{e^{-\lambda x}}{(k-r-1)!}\left(\int_0^{\lambda(\tau-x)}u^{k-r-1}e^{-u}du\right)dx=$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}\psi_r(\tau)\frac{(\lambda\tau)^r}{r!}\left\{\frac{1}{\lambda(k-r-1)!}\int_0^{\lambda\tau}u^{k-r-1}e^{-u}du-\frac{e^{-\lambda\tau}}{(k-r-1)!}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^\tau[\lambda(\tau-u)]^{k-r-1}du\right\}=\sum_{r=0}^{m-1}\psi_r(\tau)\frac{(\lambda\tau)^r}{\lambda r!(k-r)!}\int_0^{\lambda\tau}u^{k-r}e^{-u}du. \tag{14}$$

Из соотношений (5), (13) и (14) следуют равенства (3). Этим теорема доказана.

Из (2) и (3) получаем, что в рассматриваемом случае функционал (2) имеет вид:

$$F=\frac{1}{\Theta(m,\tau)(\tau+\alpha)+\beta}\left[\frac{1}{\lambda}\sum_{r=0}^{m-1}\left(f_r+\psi_r(\tau)\frac{(\lambda\tau)^r}{r!}\int_0^{\lambda\tau}\varphi_{mr}(u)e^{-u}du\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha f_Q\Theta(m,\tau)+\beta f_R\right],$$

где обозначено

$$\varphi_{mr}(u)=\sum_{k=m-r}^{\infty}\frac{f_{k+r}}{k!}u^k \qquad (0\leqslant r\leqslant m-1).$$

В случае, когда $f_k=0$ при $k\leqslant m-1$ и $f_k=f$ при $k\geqslant m$, отсюда легко найти, что

$$F=\frac{1}{\Theta(m,\tau)(\tau+\alpha)+\beta}\left[\tau f\Theta(m,\tau)-\frac{fm}{\lambda}+\alpha f_Q\Theta(m,\tau)+\beta f_R\right].$$

Для отыскания оптимальных значений m и τ можно получить некоторые, вообще трансцендентные, уравнения.

В заключении отметим, что функции $\Theta(m,\tau)$ удовлетворяют следующему рекуррентному уравнению:

$$\Theta(m,\tau)=1+\sum_{k=1}^{m}\Theta(k,\tau)e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{m-k}}{(m-k)!}. \tag{15}$$

Действительно, пользуясь однородностью и независимостью приращений процесса Пуассона, находим, что при $s\geqslant 2$

$$\mathbf{P}\{\nu_m=s\}=\sum_{k=1}^{m}e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{m-k}}{(m-k)!}\mathbf{P}\{\nu_k=s-1\}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}\{\nu_m=1\}=1-\sum_{k=1}^{m}e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{m-k}}{(m-k)!}.$$

Отсюда

$$\Theta(m,\ \tau)=\sum_{s=1}^{\infty} s\mathbf{P}\{\nu_m=s\}=1-\sum_{k=1}^{m} e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{m-k}}{(m-k)!}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m} e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{m-k}}{(m-k)!}\sum_{s=2}^{\infty} s\mathbf{P}\{\nu_k=s-1\}=1+\sum_{k=1}^{m}\Theta(k,\ \tau)\,e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{m-k}}{(m-k)!}.$$

Из (15) следует, что

$$\Phi(z)=\sum_{m=1}^{\infty} z^m\Theta(m,\ \tau)=\frac{z}{(1-z)(1-e^{-\lambda\tau(1-z)})}$$

и

$$\Theta(m,\ \tau)=\frac{1}{m!}\left[\frac{z}{(1-z)(1-e^{-\lambda\tau(1-z)})}\right]^{(m)}_{z=0}.$$

Институт физики и математики
АН Лит. ССР

Поступило в редакцию
5.IX.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её положения, М., 1964.
2. Smith W. L., Regenerative stochastic processes, Proc. Roy. Soc., A, 232 (1955), 6–31.
3. Smith W. L., Renewal theory and its ramifications, J. Roy. Stat. Soc., B, 20, 2 (1958), 243–284.

APIE VIENĄ PUASONO PROCESO VALDYMŲ KLASĘ

B. GRIGELIONIS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjama viena Puasono proceso valdymų klasė. Randamas minimizuojamo funkcionalo išreikštas pavidalas, leidžiantis suieškoti optimalius valdymo parametrus.

ON A CLASS OF CONTROLS OF THE POISSON PROCESS

B. GRIGELIONIS

(Summary)

In the paper a class of controls of the Poisson process is considered. An explicit form of the minimized functional, which enables to search the optimal values of control parameters, is given.