V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть имеется однородная цепь Маркова $\{\xi(t),\ t=1,\ 2,\ \dots\}$ с произвольным множеством состояний Ω с выделеной на нем σ-алгеброй F-подмножеств, переходными вероятностными функциями $p(\omega,\ A)$, где $\omega\in\Omega$, $A\in F$, и начальным распределением вероятностей $\pi(A)$, $A\in F$.

Пусть $p(\omega,\ A)$ удовлетворяет следующему условию: существует целое положительное k_0 такое, что

$$\sup_{\omega,\ \omega',\ A}|p^{(k_0)}(\omega,\ A)-p^{(k_0)}(\omega',\ A)|=\delta<1,\quad A\in F,\quad \omega,\ \omega'\in\Omega, \tag{1}$$

где $p^{(k_0)}(\omega,\ A)$ — функция вероятностей перехода за k_0 шагов.

При выполнении условия (1) существует стационарное распределение $p(A)$ такое, что

$$\sup_{\omega,\ A}|p^{(n)}(\omega,\ A)-p(A)|\leqslant\delta^{\frac{n}{k_0}-1}=\bar{\gamma}\rho^n,\quad \omega\in\Omega,\ A\in F,$$

где $\bar{\gamma}=\delta^{-1}$ и $\rho=\delta^{\frac{1}{k_0}}$.

Пусть, далее,

$$X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n,\ \dots$$

последовательность случайных величин, связанных в нашу однородную цепь Маркова, т. е. $X_l=X\big(\xi(l)\big)$, $l=1,\ 2,\ \dots$, где действительная функция $X(\omega)$ определена на Ω и F — измерима. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\pi(A)=p(A)$, $A\in F$. Тогда все X_l, $l=1,\ 2,\ \dots$, будут одинаково распределены.

Пусть $F(x)=\mathbf{P}\{X_1(\cdot)<x\}$ и $\mathfrak{B}^+$ означает множество всех тех неотрицательных значений h, для которых

$$\sup_{\omega}\int\limits_{\{\tilde{\omega}:X_1(\tilde{\omega})\geqslant 0\}} e^{hX_1(\tilde{\omega})}\,p(\omega,\ d\tilde{\omega})<\infty. \tag{2}$$

Тогда для тех же самых h и

$$\int\limits_0^\infty e^{hx}\,dF(x)=\int\limits_{\{\omega:\ X_1(\omega)\geqslant 0\}} e^{hX_1(\omega)}\,p(d\omega)<\infty.$$

Это множество содержит по крайней мере одну точку $h=0$. Положим

$$B=\sup\mathfrak{B}^+.$$

Пусть, далее, оператор $P(h)$ определяется следующим образом

$$P(h)g=\int_{\Omega} g(\tilde{\omega})\, e^{hX_1(\tilde{\omega})} p(\omega, d\tilde{\omega}),$$

где $g(\omega)$, $\omega\in\Omega$, — ограниченная комплексная функция, измеримая относительно F с нормой $\|g(\omega)\|=\sup\limits_{\omega\in\Omega}|g(\omega)|$. Обозначим $P(0)$ через P. Тогда

$$\|P(h)-P\|=\sup_{\omega}\int_{\Omega}|e^{zX(\tilde{\omega})}-1|\,p(\omega,\ d\tilde{\omega}),$$

и, как нетрудно видеть, если выполнено (2), то равномерно относительно ω

$$\lim_{h\to 0}\|P(h)-P\|=0.$$

Поступая аналогично как и при доказательстве аналогичной леммы С. В. Нагаева (см. [1], лемма 1.1, стр. 393) получаем, что для $0\leqslant h<B_1$

$$P^n(h)=\lambda^n(h)P_1(h)+P^n(h)P_2(h), \tag{3}$$

где $B_1\leqslant B$ — некоторое постоянное,

$$P_1(h)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I_1} R(u,\ h)\,du,\quad P_2(h)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I_2} R(u,\ h)\,du,$$

$$\lambda(h)=\frac{\Big(P(h)P_1(h)\psi,\ p\Big)}{\Big(P_1(h)\psi,\ p\Big)},$$

$R(u,\ h)$ — резольвента оператора $P(h)$, I_1 и I_2 — окружности с центрами соответственно в точках 1 и 0 и радиусами $\rho_1=\frac{1-\rho}{3}$ и $\rho_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\rho$, ψ — функция тождественно равная 1, а через $(g,\ p)$ обозначен функционал $\int g(\omega)p(d\omega)$. Из условия (2) следует, что функции $\Big(P(h)P_1(h)\psi,\ p\Big)$ и $\Big(P_1(h)\psi,\ p\Big)$ являются аналитическими при $0\leqslant \mathrm{Re}\,h_1<B_1$ и $u\in E$, где E — область, внешняя по отношению к кругам, ограниченным I_1 и I_2, а функция $\Big(P^n(n)\psi,\ \pi\Big)$ аналитична в полосе $0\leqslant \mathrm{Re}\,h<B_1$ при любом n. Поскольку $|\lambda(h)|>1-\rho_1$ для $0<\mathrm{Re}\,h<B_1$ (см. [2], стр. 81), то $\ln\lambda(h)$ для этих z значений также является аналитической функцией. Возьмем в качестве $\ln\lambda(h)$ его главное значение, стремящееся к нулю при $h\to 0$ и для $0<h<B_1$ положим

$$m(h)=\frac{d\ln\lambda(h)}{dh}\quad\text{и}\quad \sigma^2(h)=\frac{dm(h)}{dh}.$$

Далее нетрудно видеть, что

$$\mathbf{M}e^{h(X_1+\ldots+X_{n+1})}=\Big(P^n(h)\psi,\ p(h)\Big)=\lambda^n(h)\Big(P_1(h)\psi,\ p(h)\Big)+O(h\rho_2^n), \tag{5}$$

где

$$p(h,\ A)=\int_A e^{hX_1(\omega)}p(d\omega).$$

Из определений $P_1(h)$ и $p(h)$, а также из (2) следует, что имеет место соотношение (см. [2], стр. 75)

$$\Big(P_1(h)\psi,\ p(h)\Big)=1+\Theta_1 h, \tag{6}$$

где Θ_1 — конечное постоянное. Подберем $B_2 \leqslant B_1$ такое, что если $0<h<B_2$, то

$$|\Theta_1 h| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Лемма 1. Пусть $B>0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(I) $0<\sigma^2(h)<+\infty$ при $0<h<B_2$.

(II) Функция $m(h)$ строго возрастает и непрерывна в интервале $0<h<B_2$.

(III) $-\infty \leqslant \mathbf{M}X_1<+\infty$; $m(0)=\mathbf{M}X_1$.

(IV) Существует предел

$$\lim_{h\to B_2} m(h)=A_0. \tag{8}$$

(V) Каково бы ни было y из интервала $\mathbf{M}X_1<y<A_0$, уравнение $m(h)=y$ имеет единственный действительный корень h^*. При этом $0<h^*<B_2$.

Доказательство. Пусть $x(\omega)\geqslant 0, \omega\in\Omega$, ограничена и F-измеримая функция. Так как в области $\{z: 0<\operatorname{Re} z<B_2, |\operatorname{Im} z|<L\}$ (L — постоянное число)

$$\int_\Omega x(\tilde\omega)\,|e^{zX_1(\omega)}|\,p(\omega, d\tilde\omega) \leqslant \int_\Omega x(\tilde\omega)\,e^{\operatorname{Re} zX_1(\tilde\omega)}\,p(\omega, d\tilde\omega),$$

то в этой же самой области

$$|\lambda(z)| \leqslant \lambda(\operatorname{Re} z) \tag{9}$$

(см. [5], стр. 97).

Покажем, что $\lambda(h)$ в интервале $0<h<B_2$ не получает максимума. В самом деле, допустим, что существует такой $h_0\in(0, B_2)$, что

$$\lambda(h_0)=\max_{0<h<B_2}\lambda(h). \tag{10}$$

Тогда $\lambda(h)<\lambda(h_0)$ для $h\neq h_0$, $0<h<B_2$. Построим прямоугольник

$$\Gamma=[h_0-\varepsilon_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant h_0+\varepsilon_2;\ -L\leqslant \operatorname{Im} z \leqslant +L],$$

где ε_1 и ε_2 подобраны так, что

$$h_0-\varepsilon_1,\ h_0+\varepsilon_2\in(0, B_2). \tag{11}$$

На отрезках $[h_0-\varepsilon_1\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant h_0+\varepsilon_2, \operatorname{Im} z=-L]$ и $[h_0-\varepsilon_1\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant h_0+\varepsilon_2, \operatorname{Im} z=L]$ $|\lambda(z)|<\lambda(h_0)$, ибо согласно (9) для любого $0<h<B_2$

$$\max_{\operatorname{Re} z=h,\ |\operatorname{Im} z|\leqslant L} |\lambda(z)|=\lambda(h)<\lambda(h_0).$$

Тогда, по той же самой причине,

$$|\lambda(z)|\leqslant\lambda(h_0+\varepsilon_2)<\lambda(h_0);\ \operatorname{Re} z=h_0+\varepsilon_2,\ \operatorname{Im} z=\pm L$$

и

$$|\lambda(z)\leqslant\lambda(h_0-\varepsilon_1)<\lambda(h_0);\ \operatorname{Re} z=h_0-\varepsilon_1,\ \operatorname{Im} z=\pm L.$$

Следовательно, для всех $z\in\Gamma$

$$|\lambda(z)|<\lambda(h_0).$$

С другой стороны, так как $\lambda(z)$ аналитична в Γ, она не может достигнуть максимума во внутренней точке области Γ. Полученное противоречие и то, что в пределах (11) ε_1 и ε_2 мы можем подобрать произвольно, показывает, что допущение (10) неверно.

Теперь покажем, что в интервале $(0, B_2)$

$$0<\lambda''(h)<\infty.$$

Опять допустим, что $\lambda''(h) \leqslant 0$ в какой нибудь точке $h_0 \in (0, B_2)$. Введем функцию

$$w(h) = e^{ah}\lambda(h), \quad 0 < h < B_2,$$

где постоянное a подобрано так, чтобы $w'(h_0) = 0$. Следовательно,

$$w'(h_0) = ae^{ah_0}\lambda(h_0) + e^{ah_0}\lambda'(h_0) = e^{ah}\lambda(h_0)\left(a + \frac{\lambda'(h_0)}{\lambda(h_0)}\right) = 0 \tag{12}$$

и

$$a = -\frac{\lambda'(h)}{\lambda(h_0)}. \tag{13}$$

Далее из (12)–(13) имеем

$$w''(h_0) = a^2 e^{ah_0}\lambda(h_0) + 2ae^{ah_0}\lambda'(h_0) + e^{ah_0}\lambda''(h_0) = e^{ah_0}\left(\frac{(\lambda'(h_0))^2}{\lambda(h_0)} - 2\frac{(\lambda'(h_0))^2}{\lambda(h_0)} + \lambda''(h_0)\right) =$$

$$= -e^{ah_0}\left[\frac{(\lambda'(h_0))^2}{\lambda(h_0)} - \lambda''(h_0)\right] < 0,$$

ибо мы допустили, что $\lambda''(h_0) \leqslant 0$.

Покажем, что $w(h)$ является собственным значением оператора $\tilde{P}(h)$, который определяется следующим образом

$$\tilde{P}(h)x(\cdot) = \int_{\Omega} x(\tilde{\omega})e^{h(a+X(\tilde{\omega}))}p(\omega, d\tilde{\omega}). \tag{14}$$

В самом деле, пусть $y(\cdot)$ – собственный вектор оператора $P(h)$, соотв етствующий собственному значению $\lambda(h)$. Тогда

$$P(h)y(\cdot) = \int_{\Omega} y(\tilde{\omega})e^{hX(\tilde{\omega})}p(\omega, d\tilde{\omega}) = \lambda(h)y(\cdot)$$

и

$$\tilde{P}(h)y(\cdot) = e^{ha}\int_{\Omega} y(\tilde{\omega})e^{hX(\tilde{\omega})}p(\omega, d\tilde{\omega}) = e^{ah}\lambda(h)y(\cdot),$$

а отсюда видно, что $w(h)$ – собственное значение оператора $\tilde{P}(h)$.

Далее, сравнивая определения операторов $\tilde{P}(h)$ и $P(h)$ из того, что $\lambda(h)$ не достигает максимума в интервале $(0, B_2)$, получаем, что и $w(h)$ тоже не может достичь максимума в $(0, B_2)$. Но это противоречит тому, что $w'(h) = 0$ и $w''(h) < 0$. Следовательно, не найдется ни одной такой точки $h_0 \in (0, B_2)$, чтобы было $\lambda''(h_0) \leqslant 0$. Но тогда для всех $0 < h < B_2 \lambda''(h) > 0$.

Утверждение, что $\lambda''(h) < \infty$ для $0 < h < B_2$, очевидно.

(II) часть леммы является следствием (I).

Утверждение $0 \leqslant \mathbf{M}X_1 < \infty$ следует из условия (2), а $m(0) = \mathbf{M}X_1$ следует из работ С. В. Нагаева (см. [1], стр. 394). (IV) и (V) доказываются таким же самым образом, как и аналогичные утверждения для независимых случайных величин.

2. Интегральные предельные теоремы для случая нерешетчатого распределения

Будем считать, что выполнено условие (A), если существует $C \in F$ такое, что $p(C) > 0$ и $0 < m < p_0(\omega, \tilde{\omega}) < M < \infty$ для $\omega, \omega' \in C$, где $p_0(\omega, \tilde{\omega})$ – плотность абсолютно непрерывной относительно $p(\cdot)$ компоненты $p(\omega, \cdot)$, причем $p_0(\omega, \tilde{\omega})$ измерима относительно $F \times F$.

Теорема 1. *Пусть случайные величины $\{X_i\}$ связаны в такую цепь Маркова, что $B>0$ и выполнено условие (A). Пусть, далее,*

$$\mathbf{M}X_1 > -\infty, \quad A_0 < +\infty, \tag{15}$$

где A_0 определено равенством (8). Тогда при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} \geqslant nx\} = \frac{\exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0) - h_0 x + O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}}{h_0\,\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}}\Big(1+o(1)\Big)$$

равномерно относительно x в области

$$\mathbf{M}X_1 + \varepsilon \leqslant x \leqslant A_0 - \varepsilon, \tag{16}$$

где ε — произвольно малое положительное постоянное. Здесь h_0 — единственный действительный корень уравнения $m(h_0) = x$.

Замечание. Если вместо условия (15) выполняется одно из условий

$$\mathbf{M}X_1 = -\infty, \quad A_0 < +\infty, \tag{17}$$

$$\mathbf{M}X_1 = -\infty, \quad A_0 = +\infty, \tag{18}$$

$$\mathbf{M}X_1 > -\infty, \quad A_0 = +\infty, \tag{19}$$

то теорема 1 имеет место с заменой области (16) областью

$$-C_1 \leqslant x \leqslant A_0 - \varepsilon, \tag{20}$$

$$-C_1 \leqslant x \leqslant C_2, \tag{21}$$

$$\mathbf{M}X_1 + \varepsilon \leqslant x \leqslant C_2 \tag{22}$$

соответственно, где C_1 и C_2 — произвольно большие положительные постоянные.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть c — произвольное постоянное из интервала $\mathbf{M}X_1 < c < A_0$ и $\delta(n)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(n) = 0$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} \geqslant n(c + a_n)\} = \frac{1+o(1)}{h_0\,\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0) - h_0(c + a_n) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{a_n^2}{2\sigma^2(h_0)}\Big(1 + O(a_n)\Big) + O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}, \tag{23}$$

где члены $o(1)$, $O(a_n)$ и $O\left(\frac{h_0}{n}\right)$ равномерны по c и a_n в областях

$$\mathbf{M}X_1 + \varepsilon \leqslant c \leqslant A_0 - \varepsilon, \quad |a_n| \leqslant \delta(n) \tag{24}$$

и ε — произвольно малое положительное постоянное. Здесь h_0 — единственный действительный корень уравнения $m(h) = c$.

Если вместо (15) выполнено одно из условий (17)—(19), то (24) следует заменить соответствующей областью из (20)—(22).

В свою очередь, из теоремы 2 получаем следующее следствие.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть c — любое постоянное, удовлетворяющее условию $\mathbf{M}X_1 < c < A_0$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} > nc\} = \frac{\exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0) - h_0 c + O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}}{h\,\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\Big(1 + o(1)\Big).$$

Здесь h_0 — единственный действительный корень уравнения $m(h_0) = c$.

Доказательство теоремы 1. Характеристическая функция для $X_1 + \ldots + X_{n+1}$ выражается следующим образом:

$$f_n(t) = \left(P^n(it)\psi,\ p(it)\right). \tag{25}$$

Соответствующую функцию распределения обозначим $W_n(x)$. Пусть $W_{nh}(x)$ — функция распределения, соответствующая характеристической функции

$$f_{nh}(t) = \frac{\left(P^n(h+it)\psi,\ \pi(h+it)\right)}{\left(P^n(h)\psi,\ \pi(h)\right)} \tag{26}$$

(h — действительное число и $0 < h < B_2$). Имеет место следующее равенство

$$W_n(x) = W_{n0}(x) = \left(P^n(h)\psi,\ p(h)\right) \int_{-\infty}^{x} e^{-hy}\, dW_{nh}(y)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} \geqslant nx\} = \left(P^n(h)\psi,\ p(h)\right) \int_{nx}^{\infty} e^{-hy}\, dW_{nh}(y). \tag{27}$$

Выберем параметр h_0 из уравнения $m(h_0) = x$ и положим

$$B_{nh_0} = n\sigma^2(h_0),\quad A_{nh_0} = nm(h_0),$$

$$F_{nh_0}(x) = W_{nh_0}(A_{nh_0} + x\sqrt{B_{nh_0}}).$$

Тогда из (27) следует

$$\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} \geqslant nx\} = \left(P^n(h_0)\psi,\ p(h_0)\right) \int_{0}^{\infty} e^{-h_0 nm(h_0) - h_0 y\sqrt{B_{nh_0}}}\, dF_{nh_0}(y). \tag{28}$$

Лемма 2. *Пусть $\Phi(x)$ — функция нормального распределения. Если выполнено условие (A), то для $0 < h < B_2$*

$$F_{nh_0}(x) = \Phi(x) + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{Q(x)}{\sqrt{n}} + U_n(x),$$

где равномерно по x

$$U_n(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{29}$$

а $Q(x)$ — квадратичный полином.

Доказательство леммы 2. Пусть $\bar{f}_{nh_0}(t)$ — характеристическая функция, соответствующая функции распределения $F_{nh_0}(x)$. Тогда

$$\bar{f}_{nh_0}(t) = e^{-i\frac{t}{\sqrt{B_{nh_0}}} A_{nh_0}} \frac{\left(P^n\left(h_0 + \frac{it}{\sqrt{B_{nh_0}}}\right)\psi,\ p\left(h + \frac{it}{\sqrt{B_{nh_0}}}\right)\right)}{\left(P^n(h_0)\psi,\ p(h_0)\right)},$$

и

$$\ln \bar{f}_{nh_0}(t) = -\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\, nm(h_0) + \ln\left(P^n\left(h_0 + \frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\psi,\ p\left(h_0 + \frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\right) -$$

$$- \ln\left(P^n(h_0)\psi,\ p(h_0)\right) = -\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\, nm(h_0) + \ln\Bigg[\lambda^n\left(h_0 + \frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right) \times$$

$$\times \left(P_1\left(h_0 + \frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\psi,\ p\left(h_0 + \frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\right) + O(t\rho_2^n)\Bigg] -$$

$$- \ln\left[\lambda^n(h_0)\left(P_1(h)\psi,\ p(h)\right) + O(t\rho_2^n)\right] =$$

$$= -\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\, nm(h_0) + n\ln\lambda\left(h_0 + \frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right) - n\ln\lambda(h_0) +$$

$$+\ln\frac{\left(P_1\left(h_0+\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\psi,\; p\left(h_0+\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\right)}{\left(P_1(h_0)\psi,\; p(h_0)\right)} + O(t\rho_2^n).$$

Далее при $|t| < \overline{\Delta}\sqrt{n}$, $\overline{\Delta}$ — положительное постоянное, имеем

$$\ln\lambda\left(h_0+\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right) = \ln\lambda(h_0) + \lambda'(h_0)\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}} + \frac{\lambda''(h_0)}{2}\left(\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)^2 +$$

$$+\frac{\lambda^{(3)}(h_0)}{6}\left(\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{\lambda^{(4)}\left(h_0+\vartheta_1\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)}{24}\left(\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)^4,\quad 0<\vartheta_1\leqslant 1,$$

и

$$\left(P_1\left(h_0+\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\psi,\; p\left(h_0+\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\right) = \left(P_1(h_0)\psi,\; p(h_0)\right) +$$

$$+\left(P_1(h_0)\psi,\; p(h_0)\right)'\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}} + \left(P_1\left(h_0+\vartheta_2\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\psi,\; p\left(h_0+\vartheta_3\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)^2,\quad 0<\vartheta_2\leqslant 1,\quad 0<\vartheta_3\leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\ln\overline{f}_{nh_0}(t) = -\frac{t^2}{2} + n\frac{\lambda^{(3)}(h_0)}{6}\left(\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{\lambda^{(4)}\left(h_0+\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)}{24}\left(\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)^4 +$$

$$+\ln\left[1 + \frac{\left(P_1(h_0)\psi,\; p(h_0)\right)'}{\left(P_1(h_0)\psi,\; p(h_0)\right)}\left(\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{\left(P_1\left(h_0+\vartheta_2\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\psi,\; p\left(h_0+\vartheta_3\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)\right)}{\left(P_1(h_0)\psi,\; p(h_0)\right)}\left(\frac{it}{\sigma(h_0)\sqrt{n}}\right)^2\right] + O(t\rho_2^n).$$

Далее, рассуждая как и при доказательстве аналогичной леммы С. В. Нагаева (см. [1], лемма 3.2), получаем

$$\left|\overline{f}_{nh_0}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1 + \left(\frac{\lambda^{(3)}(h_0)}{6\sigma(h_0)}(it)^3 + \frac{\left(P_1(h_0)\psi,\; p(h_0)\right)'}{\left(P_1(h)\psi,\; p(h_0)\right)}\, it\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\overline{\delta}(n)}{\sqrt{n}}\left(|t|^2 + |t|^6\right)e^{-\frac{t^2}{4}} + O(t\rho_2^n), \tag{30}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\delta}(n) = 0$.

Из (30), условия (A) и леммы С. В. Нагаева (см. [2], лемма 1.5), применяя теорему Эссена (см., например, [7], стр. 211), получаем утверждение леммы.

В силу леммы 2 имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-h_0 y\sigma(h_0)\sqrt{n}}\, dF_{nh_0}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-y h_0\sigma(h_0)\sqrt{n} - \frac{y^2}{2}\right\}dy +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-yh_0\sigma(h_0)\sqrt{n} - \frac{y^2}{2}\right\} Q'(y)\, dy +$$

$$+\int\limits_0^\infty \exp\left\{-yh_0\sigma(h_0)\sqrt{n}\right\} U_n(dy). \tag{31}$$

Используя замену переменных, находим, что

$$\int_0^\infty \exp\left\{-yh_0\sigma(h_0)\sqrt{n}-\frac{y^2}{2}\right\}dy=$$

$$=\frac{1}{h_0\sigma(h_0)\sqrt{n}}\int_0^\infty \exp\left\{-u-\frac{u^2}{2n\sigma^2(h_0)h_0}\right\}du=\frac{1+o(1)}{h_0\sigma(h_0)\sqrt{n}} \tag{32}$$

и

$$\int_0^\infty \exp\left\{-yh_0\sigma(h_0)\sqrt{n}-\frac{y^2}{2}\right\}Q'(y)\,dy=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{33}$$

Интегрируя третье слагаемое в (31) по частям, в силу (29) получаем

$$\int_0^\infty \exp\left\{-yh_0\sigma(h_0)\sqrt{n}\right\}U_n(dy)=U_n(0)+$$

$$+h_0\sigma(h_0)\sqrt{n}\int_0^\infty U_n(y)\exp\left\{-h_0\sigma(h_0)\sqrt{n}\,y\right\}dy=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{34}$$

Из соотношений (28), (31)—(34) следует

$$\mathbf{P}\{X_1+X_2+\ldots+X_{n+1}\geqslant nx\}=$$

$$=\left(P^n(h_0)\psi,\ p(h_0)\right)\frac{e^{-nh_0m(h_0)}}{h_0\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}}\left(1+o(1)\right). \tag{35}$$

Наконец, из (5)—(7) и (35) имеем

$$\mathbf{P}\{X_1+\ldots+X_{n+1}\geqslant nx\}=\frac{\exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0)-h_0x+O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}}{h_0\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}}\left(1+o(1)\right),$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Поступая также, как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что равномерно по параметру $c+a_n$, изменяющемуся в пределах (24),

$$\mathbf{P}\{X_1+\ldots+X_{n+1}\geqslant n(c+a_n)\}=$$

$$=\exp\frac{\left\{n\left[\ln\lambda(h_n)-h_nm(h_n)+O\left(\frac{h_n}{n}\right)\right]\right\}}{h_n\sigma(h_n)\sqrt{2\pi n}}\left(1+o(1)\right), \tag{36}$$

где параметр h_n — действительный корень уравнения

$$nm(h_n)=n(c+a_n).$$

Пусть $h(m)$ — функция, обратная к функции $m(h)$ и h_0 — действительный корень уравнения $m(h_0)=c$. Тогда

$$\frac{d\left[\ln\lambda\left(h(m)\right)-h(m)\,m\right]}{dm}=-h(m), \tag{37}$$

$$\frac{d^2\left[\ln\lambda\left(h(m)\right)-h(m)\,m\right]}{dm^2}=-\frac{1}{\sigma^2\left(h(m)\right)}, \tag{38}$$

и существует также третья непрерывная производная этой функции. Поэтому

$$\ln\lambda(h_n)-h_n m(h_n)=\ln\lambda\Big(h(c+a_n)\Big)-h(c+a_n)(c+a_n)=$$
$$=\ln\lambda(h_0)-h_0 m(h_0)-h_0 a_n-\frac{a_n^2}{2\sigma^2(h_0)}\Big(1+O(a_n)\Big). \qquad (39)$$

Из (36), (39) и того, что $h_n\sigma(h_n)\to h_0\sigma(h_0)$ при $n\to\infty$ вытекает искомое соотношение (23).

Доказательство теоремы 3 теперь уже очевидно.

3. Локальная и интегральная предельные теоремы для случая решетчатого распределения

Теорема 4. *Пусть X_l принимают с положительными вероятностями только значения вида $a+kd$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где a — фиксированное действительное число и d — максимальный шаг распределения. Пусть, далее, выполнены условия* (15), *$B>0$ и коэффициент эргодичности цепи $\alpha^*>0$. Если nx принимает лишь значения вида $na+kd$, то справедливы следующие утверждения:*

(I)
$$\mathbf{P}\{X_1+\ldots+X_{n+1}=(n+1)x\}=$$
$$=\frac{d\cdot\exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0)-h_0x+O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}}{\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}}\Big(1+o(1)\Big) \qquad (40)$$

при $n\to\infty$ равномерно относительно x в области

$$\mathbf{M}X_1+\varepsilon\leqslant x\leqslant A_0-\varepsilon; \qquad (41)$$

(II)
$$\mathbf{P}\{X_1+\ldots+X_{n+1}\geqslant(n+1)x\}=$$
$$=\frac{d\cdot\exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0)-h_0x+O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}}{\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}\,(1-e^{-dn})}\Big(1+o(1)\Big) \qquad (42)$$

равномерно относительно x в области (41). *Здесь ε — произвольно малое положительное постоянное, а h_0 — действительный корень уравнения $m(h_0)=x$.*

Доказательство. Проделав те же построения, что и при выводе теоремы 1, воспользуемся леммой С. В. Нагаева (см. [2], лемма 2.1, стр. 82), по которой для $0<h<B_2$

$$F_{nh}(x)=\Phi(x)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Используя этот факт, аналогично тому, как была использована лемма 2 при выводе теоремы 1, получаем

$$\mathbf{P}\{X_1+\ldots+X_{n+1}\geqslant(n+1)x\}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0)-h_0m(h_0)+O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}. \qquad (43)$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — случайные величины, абсолютное распределение которых дается формулой

$$F_{oh}(x)=\frac{1}{R(h)}\int\limits_{\{\omega:\,X_1(\omega)<x\}} e^{hX_1(\omega)}p(d\omega),$$

где

$$R(h) = \int_{\Omega} e^{hX_1(\omega)} p(d\omega),$$

а сумма $\overline{X}_1 + \ldots + \overline{X}_{n+1}$ распределена по закону $W_{nh}(x)$. Тогда по локальной предельной теореме (см. [1], теорема 3.1, стр. 410)

$$P\{\overline{X}_1 + \ldots + \overline{X}_{n+1} = (n+1)x\} = \frac{d}{\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}} \Big(1 + o(1)\Big). \tag{44}$$

Из (27), (43) и (44) имеем

$$\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} = (n+1)x\} =$$

$$= \frac{d \cdot \big(1 + o(1)\big)}{\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0) - h_0 m(h_0) + O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}.$$

Отсюда следует искомое утверждение (40).

Далее заметим, что при $|k| \leqslant n^{\frac{1}{4}}$, где k — целое, применимо равенство (40), которое показывает, что равномерно по k

$$\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} \geqslant (n+1)x + kd\} =$$

$$= \frac{d\big(1 + o(1)\big)e^{-h_0 kd}}{\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0) - h_0 x + O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}. \tag{45}$$

Из (43) и (45) получаем

$$\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} \geqslant (n+1)x + dn^{\frac{1}{4}}\} =$$

$$= O\left(n^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0) - h_0 x + O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}\right). \tag{46}$$

Наконец, из (45) и (46) выводим, что

$$P\{X_1 + \ldots + X_{n+1} \geqslant (n+1)x\} = \mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} \geqslant (n+1)x + dn^{\frac{1}{4}}\} +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant k < n^{\frac{1}{4}}} \mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} = (n+1)x + kd\} =$$

$$= \frac{d}{\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{n\left[\ln\lambda(h_0) - h_0 x + O\left(\frac{h_0}{n}\right)\right]\right\}\Bigg(\sum_{0 \leqslant k < n^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-h_0 kd}\Bigg)\Big(1 + o(1)\Big),$$

откуда, суммируя геометрическую прогрессию, получаем (42).

В заключение заметим, что таким же образом формулируются результаты, касающиеся асимптотического поведения вероятности $\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n+1} < nx\}$. При этом вместо условия $B > 0$ следует налагать условие $b < 0$, где $b = \sup \mathfrak{B}^-$, а $\mathfrak{B}^-$ — множество всех тех неположительных значений h, для которых $\int_{-\infty}^{0} e^{hx}\, dV(x) < \infty$.

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Поступило в редакцию
6.X.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее примен., 2, 4, 1957.
2. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее примен., 6, 1, 1961.
3. Р. Л. Добрушин, Асимптотические оценки вероятности ошибки при передаче сообщения по дискретному каналу связи без памяти с симметрической матрицей вероятностей перехода, Теория вероятн. и ее примен., 7, 3, 1962.
4. В. В. Петров, ДАН, 154, 4, 1964.
5. М. А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, ФМ, М., 1962.

DIDELI ATSILENKIMAI HOMOGENINĖMS MARKOVO GRANDINĖMS

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Reziumė)

Šiame darbe V. V. Petrovo rezultatai [4], gauti nepriklausomiems atsitiktiniams dydžiams, apibendrinami homogeninėms Markovo grandinėms.

DIE GROSSE ABWEICHUNGEN FÜR DIE HOMOGENEN MARKOFFSCHEN KETTEN

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit werden die von W. W. Petrow für die unabhängigen Zufallsgrößen erhaltenen Resultate [4] für die homogenen Markoffschen Ketten verallgemeinert.