V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

О ДЕФЕКТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ш. И. СТРЕЛИЦ

В настоящей работе мы исследуем мероморфные решения с дефектными значениями уравнения

$$F(z,\ w,\ w')=0, \tag{1}$$

где F — полином относительно всех своих переменных. Мы укажем необходимые условия тому, чтобы данное комплексное число $a:|a|\leqslant\infty$ могло быть дефектным значением хотя бы одного мероморфного решения уравнения (1). В предположении, что данное мероморфное решение $w(z)$ уравнения (1) имеет дефектным значением число a, найдем порядок этого решения. В работе [2] доказано, что все мероморфные решения уравнения (1) — конечного порядка. Поэтому мы ниже ограничиваемся только такими мероморфными функциями.

1. **Лемма 1.1.** *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — полюсы и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — нули мероморфной функции $f(z)$ порядка $\rho<\infty$. Последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ расположены в порядке возрастания модулей их членов. Исключим из плоскости кружки C_j и C_j'; $j=1, 2,\ldots$ с центрами в точках a_j и b_j радиусов $|a_j|^{-\rho'}$ и $|b_j|^{-\rho'}$, где $\rho':\rho'>\rho$ — произвольное число. Вне этих исключенных кружков справедливо неравенство:*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|<Cr^{2\rho'},\quad C=C(\rho'). \tag{1.1}$$

Доказательство. Так как $f(z)$ — мероморфная функция конечного поряка ρ, то, как известно (см., например, [5]), $f(z)$ можно представить в следующем каноническом виде:

$$f(z)=Bz^{\lambda}e^{p_0(z)}\frac{f_1(z)}{f_2(z)}, \tag{2.1}$$

где

$$f_1(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_j}\right)^{k_j}e^{-p_j(z)},\quad f_2(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_j}\right)^{l_j}e^{-q_j(z)},$$

$k_j,\ l_j>0$ — целые числа—кратности полюса a_j и нуля b_j соответственно, $p_0(z)$ — полином степени не выше ρ, $p_j(z)$ и $q_j(z)$ равны сумме первых $p=[\rho]$ членов степенных разложений функций $\ln\left(1-\frac{z}{a_j}\right)^{k_j}$ и $\ln\left(1-\frac{z}{b_j}\right)^{l_j}$ в окрестности начала координат. Из (2.1) следует, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\lambda}{z}+p_0'(z)+\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{k_j}{z-a_j}-p_j'(z)\right]-\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{l_j}{z-b_j}-q_j'(z)\right]. \tag{3.1}$$

Обозначим через $n(r, a)$ число корней уравнения $f(z)=a$ в круге $|z|\leqslant r$. Имеем:

$$\sum_{|a_j|\leqslant r} k_j=n(r, \infty); \qquad \sum_{|b_j|\leqslant r} l_j=n(r, 0). \tag{4.1}$$

Пусть $|z|=r$ и $n(r)=n(r, \infty)$. Тогда

$$\left|\sum_{|a_j|\geqslant 2r}\left(\frac{k_j}{z-a_j}-p_j'(z)\right)\right|=\left|\sum_{|a_j|\geqslant 2r}k_j\left(\frac{z}{a_j}\right)^p\frac{1}{z-a}\right|\leqslant$$

$$\leqslant r^p\sum_{|a_j|\geqslant 2r}\frac{k_j}{|a_j|^p}\,\frac{1}{|a_j|-r}=r^p\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{dn(t)}{t^p(t-r)}=r^p\frac{n(t)}{t^p(t-r)}\Bigg|_{2r}^{\infty}+$$

$$+pr^p\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^{p+1}(t-r)}+r^p\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^p(t-r)^2}<r^p\left(\frac{A_1r^{\rho'}}{r^{p+1}}+A_2\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{dt}{t^{p+2-\rho'}}\right)<Ar_{\rho'}, \tag{5.1}$$

где A_j, $A>0$ — некоторые постоянные. Далее, вне C_j; $j=1, 2, 3, \ldots$, вспомнив, что $|z-a_j|>|a_j|^{-\rho'}$, найдем:

$$\sum_{|a_j|<2r}\left|\frac{k_j}{z-a_j}-p_j'(z)\right|\leqslant\sum_{|a_j|<2r}k_j\left|\frac{z}{a_j}\right|^p\frac{1}{|z-a_j|}<r^p\sum_{|a_j|<2r}\frac{k_j}{|a_j|^{p-\rho'}}<$$

$$<\tilde{C}\frac{r^p}{2r^{p-\rho'}}\sum_{|a_j|<2r}k_j<2^{\rho'-p}\tilde{C}r^{\rho'}n(2r)<A_0r^{2\rho'}, \tag{6.1}$$

где $\tilde{C}$, $A_0>0$ — постоянные. Таким образом мы видим, что из (5.1) и (6.1) вытекает следующее неравенство:

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{k_j}{z-a_j}-p_j'(z)\right)\right|<A'r^{2\rho'}, \tag{7.1}$$

верное вне кружков C_j на окружности $|z|=r$; $A'>0$ — некоторая постоянная. Совершенно аналогично

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{l_j}{z-b_j}-q_j'(z)\right)\right|<A''r^{2\rho'}. \tag{8.1}$$

Кроме того,

$$|p_0'(z)|<A'''r^{\rho'}; \qquad \left|\frac{\lambda}{z}\right|=\frac{|\lambda|}{r}. \tag{9.1}$$

Из (3.1), (7.1), (8.1) и (9.1) следует (1.1).

2. Допустим, что бесконечность есть дефектное значение трансцендентной мероморфной функции $f(z)$ конечного порядка ρ. По Неванлинне это означает, что

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r)}{T(r)}=\delta>0, \tag{1.2}$$

где

$$m(r)=m(r, \infty)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta, \tag{2.2}$$

$$N(r)=N(r, \infty)=\int\limits_0^r\frac{n(t, \infty)-n(0, \infty)}{t}\,dt \tag{3.2}$$

и

$$T(r)=m(r)+N(r). \tag{4.2}$$

Из (1.2) следует, что при $r>r_0=r_0(\delta')$; $\delta'<\delta$

$$\delta' T(r)<m(r), \tag{5.2}$$

а из (2.2), что

$$m(r)\leqslant \ln M(r), \tag{6.2}$$

где

$$M(r)=M(r, f)=\max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Так как в согласии с (5.2) и (6.2)

$$\ln M(r)>\delta' T(r), \tag{7.2}$$

то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r}=\infty. \tag{8.2}$$

Исключим из рассмотрения последовательность Δ наименьших концентрических колец с центрами в начале координат, заключающих множество кругов C_j и C_j' (см. п. 1). Если $z\notin\Delta$; $|z|=r$, то из (7.2) вытекает неравенство:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}\geqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r)}{\ln r}=\lambda. \tag{9.2}$$

Из того, что $f(z)$ конечного порядка ρ, далее, следует, что в представлении (2.1)

$$\ln|Bz^\lambda e^{P_0(z)} f_1(z)|<B_1 r^{\rho'};\quad \rho'>\rho;\quad B_1=B_1(\rho'),$$

а вне кругов C_j, как показано в [3],

$$|f_2(z)|>B_2 \exp\{-r^{\rho'}\};\quad B_2=B_2(\rho').$$

Таким образом вне C_j

$$|f(z)|<\frac{B_1}{B_2}\exp\{2r^{\rho'}\}=\tilde{B}e^{r^{2\rho'}}.$$

Сравнивая полученное неравенство с (9.2), мы выводим, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}\leqslant\rho. \tag{10.2}$$

Заметим теперь, что в формуле (9.2) $\lambda=\rho$, так как исключением из полуоси $r>0$ последовательностей интервалов

$$\{(|a_j|-|a_j|^{-\rho'},\ |a_j|+|a_j|^{-\rho'})\};\quad \{(|b_j|-|b_j|^{-\rho'},\ |b_j|+|b_j|^{-\rho'})\}$$

с мерой $2\sum_{j=1}^{\infty}(|a_j|^{-\rho'}+|b_j|^{-\rho'})<\infty$ мы не влияем на величину порядка функции $T(r)$ (см. [8]). Из (9.2) и (10.2) вытекает

Лемма 1.2. *Вне множества* Δ

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}=\rho;\quad z\notin\Delta;\quad |z|=r, \tag{11.2}$$

т. е. порядок функции $\ln M(r)$ *вне множества точек* Δ *совпадает с порядком функции* $f(z)$.

Из леммы 1.1 и 1.2 вытекает, что вне Δ

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^p\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^q}{M(r)}=0, \tag{12.2}$$

при любых постоянных p и $q>0$.

Пусть теперь число $a\neq\infty$ является дефектным значением трансцендентной мероморфной функции $f(z)$. Это означает, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\ \frac{1}{f(z)-a}\right)}{T(r)}=\delta>0.$$

Таким образом, $a\neq\infty$ есть дефектное значение функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда бесконечность есть дефектное значение для функции $\frac{1}{f(z)-a}$.

Отметим еще следующий факт (см. [6], [4]). Пусть ζ есть точка, в которой

$$|f(\zeta)|=\max_{|z|=r}|f(z)|=M(r);\quad r\neq|a_j|;\quad j=1,\ 2,\ 3,\dots$$

Верно равенство:

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\frac{rM'(r)}{M(r)}=K(r). \tag{13.2}$$

Функция $K(r)$ в кольце между двумя последовательными полосами, не равными по модулю, всегда возрастает, если только $f(z)\not\equiv Az^n$.

3. Предположим, что $a=\infty$ является дефектным значением трансцендентного мероморфного решения $w(z)$ конечного порядка ρ уравнения

$$P_0\left(z,\ \frac{zw'}{w}\right)w^n+P_1\left(z,\ \frac{zw'}{w}\right)w^{n-1}+\dots+P_n\left(z,\ \frac{zw'}{w}\right)=0, \tag{1.3}$$

где все функции $P_j(z,\eta)$ — полиномы. Допустим, что максимум $|w(z)|$ на окружности $|z|=r$ достигается в точке ζ. Положим: $K(r)=\frac{\zeta w'(\zeta)}{w(\zeta)}$. В силу (12.2) и (1.3) получаем: $P_0(\zeta,\ K)=o(1)$. Правую часть последнего равенства можно оценить точнее. Пусть полином $P_1(\zeta,\ K)$ есть степени s по z и степени q по K. Тогда ($\zeta\notin\Delta$)

$$\left|\sum_{j=1}^{n}P_j(\zeta,\ K)\,w^{-j}(\zeta)\right|<A\frac{r^s|K^{q_0}(r)|}{M(r)},$$

где $A>0$ — некоторая постоянная, которая от r не зависит, $q_0=q$ при $|K|\geqslant1$ и $q_0=0$ при $|K|<1$. Поэтому ($\zeta\notin\Delta$)

$$P_0(\zeta,\ K)=O\left(\frac{r^s|K|^{q_0}}{M}\right);\quad K=K(r);\quad M=M(r). \tag{2.3}$$

Разложим полином $P_0(\zeta,\ K)$ на множители в окрестности бесконечно удаленной точки $\zeta=\infty$. Из (2.3) получим:

$$\prod_{j=1}^{m}\left(K-\beta_j\zeta^{\alpha_j}\left(1+o(1)\right)\right)^{\mu_j}=O\left(\frac{r^s|K|^{q_0}}{M}\right), \tag{3.3}$$

где α_j — рациональные, а μ_j — целые положительные числа.

Замечание. Если $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ два неравных корня уравнения $P_0(z,\ K)=0$, то $|\psi_1(z)-\psi_2(z)|=O(|z|^\alpha)$, где α — рациональное число.

Из уравнения (3.3) мы выводим, что вне Δ имеет место одно из следующих равенств:

$$K-\beta_j\zeta^{\alpha_j}\left(1+o(1)\right)=O\left[\left(\frac{r^s|K|^{q_*}}{M}\right)^{\frac{1}{\mu_j}}\right];\quad j=1,\ 2,\ldots,\ m. \tag{4.3}$$

Пусть последовательность колец $r_j'\leqslant|z|\leqslant r_j''$, $j=1,\ 2,\ 3,\ldots$ составляет множество Δ (как мы уже отмечали, сумма ширин этих колец есть конечное число). Известно, что в любом кольце $r_j''\leqslant|z|\leqslant r_{j+1}'$ множество точек, в которых достигается $\max\limits_{|z|=r}|w(z)|$, состоит из кусочно аналитической кривой $\varphi=\varphi_{j+1}(r)$. На непрерывной дуге всякой кривой $\varphi=\varphi_i(r)$ функции $M(r)$ и $K(r)$ непрерывны. Кривую $\varphi=\varphi_i(r)$ мы называем кривой максимумов ([6]).

4. Рассмотрим кривую максимумов в окрестности D_0 точки r_j'; $r\leqslant r_j'$. Эта кривая непрерывно продолжима в некоторую окрестность точки r_j' и при $r>r_j'$ (см. [7]). При $r=r_j'$ имеет место одно из равенств (4.3). Для определенности положим, что

$$K-\beta_\lambda\zeta^{\alpha_\lambda}\left(1+o(1)\right)=O\left[\left(\frac{r^{s_*}|K|^{q_*}}{M}\right)^{\frac{1}{\mu_\lambda}}\right]=-\psi(\zeta)+K \tag{1.4}$$

и есть соответствующее равенство. Преобразуем сейчас уравнение (1.3) следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{n}P_j(\zeta,\ K)\,w^{-j}=\sum_{j=0}^{n}P_j\left(\zeta,\ K-\psi(\zeta)+\psi(\zeta)\right)w^{-j}=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n_i}\tilde{Q}_{ij}\left(\zeta,\ \psi(\zeta)\right)w^{-j}x^i=0, \tag{2.4}$$

где $Q_{ij}\left(\zeta,\ \psi(\zeta)\right)$, очевидно, – полином относительно ζ и $\psi(\zeta)$, а $K-\psi(\zeta)=x$. Показатель степени α_λ в разложении (1.4) является рациональным числом. Пусть $\alpha_\lambda=\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, причем $q>0$. Заменой в функциях $\tilde{Q}_{ij}$ $\zeta=t^q$ мы добиваемся того, что функции $Q_{ij}(t)=\tilde{Q}_{ij}\left(t^q,\ \psi(t^q)\right)$ в окрестности $t=\infty$ будут иметь разложения следующего вида:

$$Q(t)=\sum_{k=-\tilde{p}}^{\infty}a_{-k}t^{-k}, \tag{3.4}$$

где в случае конкретной функции $Q_{ij}(t)$ мы полагаем $p=p_{ij}$, $a_{-k}=a_{-k}^{ij}$, а уравнение (2.4) переходит в уравнение

$$F_0(t,\ w,\ x)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n_i}Q_{ij}(t)\,w^{-j}x^i=0. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) мы теперь рассмотрим, как равенство, определяющее x как функцию от w и t. При каждом постоянном t уравнение (4.4) есть алгебраическое уравнение от x по $\frac{1}{w}$ и в окрестности бесконечно удаленной точки $w=\infty$ все его решения суть вида:

$$x=A_0\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}+A_1\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}+A_2\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+2}{\beta}}+\ldots, \tag{5.4}$$

причем α и β — целые числа с $\beta>0$ и $A_j=A_j(t)$, $j=0, 1, 2,\ldots$ Как видно из разложения (3.4) при $\infty>|t|>t_0>0$, где t_0 достаточно велико, функции $Q_{ij}(t)$ в нуль не обращаются, если только они не равны тождественно нулю. Поэтому числа α и β будут одними и теми же для всех указанных t (это легко проверить на многоугольнике Ньютона, см., например, [9]). Дискриминант уравнения (4.4) мы найдем, исключая из уравнений $F_0=0$, $\frac{\partial F_0}{\partial x}=0$ переменное x. Будем считать полином F_0 невырождающимся (в противном случае, если было бы $F_0\equiv F_1, F_2, \ldots, F_p=0$, то мы рассмотрели бы каждое уравнение $F_j=0$ отдельно), так что рассматриваемый дискриминант $\not\equiv 0$. В общем случае числитель и знаменатель дискриминанта суть полиномы от $\frac{1}{w}$ с коэффициентами от t вида (3.3). В окрестности бесконечно удаленной точки $t=\infty$ мы, приравнивая по очереди дискриминант нулю и бесконечности, найдем конечное число решений со следующего типа разложениями:

$$\frac{1}{w}=B_0 t^{\frac{\gamma}{\beta}}+B_1 t^{\frac{\gamma-1}{\beta}}+B_2 t^{\frac{\gamma-2}{\beta}}+\ldots, \tag{6.4}$$

где $\beta>0$ можно считать таким же, как в (5.4). Из всех этих решений выделим наименьшее по модулю при $|t|$ достаточно больших: $|t|>T$ (T, очевидно, можно выбрать так, чтобы взятое решение было одним и тем же для всех указанных $|t|$). Условимся считать (6.4) степенным разложением именно этого решения в окрестности $t=\infty$. Для удобства введем еще в (4.4), (5.4) и (6.4) замену $\frac{1}{w}=\nu^{\beta}$ (при этом мы на (4.4) смотрим, как на алгебраическое уравнение для x от ν и t). Из (5.4) и (6.4) мы тогда получаем:

$$\nu=C_0 t^{\frac{\gamma}{\beta^*}}+C_1 t^{\frac{\gamma-1}{\beta^*}}+C_2 t^{\frac{\gamma-2}{\beta^*}}+\ldots \tag{7.4}$$

и

$$x=A_0\nu^d+A_1\nu^{d+1}+A_2\nu^{d+2}+\ldots, \tag{8.4}$$

где все C_j — постоянны, а $A_j=A_j(t)$. Подставив (8.4) в уравнение $F^*(t, \nu, x)=F_0(t, \nu^{-\beta}, x)=0$, мы легко найдем алгебраическое уравнение для определения коэффициента $A_0(t)$:

$$\sum_{j=0}^{m_0} Q_{ij}(t)A_0^{ij}=0. \tag{9.4}$$

Отсюда

$$A_0(t)=g_0 t^{\frac{s}{\delta}}+g_1 t^{\frac{s-1}{\delta}}+g_2 t^{\frac{s-2}{\delta}}+\ldots, \tag{10.4}$$

где s и δ — целые числа, а $|t|>T'>0$. Как видно из (7.4) при $0<|\nu|\leqslant \leqslant\frac{1}{2}|C_0||t|^{\frac{\gamma}{\beta^*}}$, $|t|>T_0$, $T_0=\max(T, T')$ и $F^*=0$ имеем: $\frac{\partial F^*}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$. Следовательно, ряд (4.4) имеет производную $\frac{\partial x}{\partial t}$, которую легко найти из уравнения:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{\partial F^*}{\partial t}. \tag{11.4}$$

Подставив в (11.4) вместо x разложение (8.4), мы из (11.4) найдем:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{\dfrac{\partial F^*}{\partial t}}{\dfrac{\partial F^*}{\partial x}}=\sum_{j=0}^{\varphi}\tilde{D}_j\nu^{\beta_0+j},\quad \tilde{D}_j=\tilde{D}_j(t),\quad \beta_0\gtrless 0,\quad |t|>T_0. \tag{12.4}$$

Оценим коэффициенты A_j и $\tilde{D}_j$, $j=0, 1, 2,\ldots$ При $|\nu|=|t|^{-\tilde{\rho}}$ мы из уравнения (4.4) выводим следующее неравенство:

$$\left|\sum_{j=0}^{n_m}Q_{mj}(t)\nu^j\right||x|^m\leqslant\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n_i}|Q_{ij}(t)||t|^{-\tilde{\rho}j}|x|^i.$$

На основании разложения (3.4) нетрудно заключаем, что число $\tilde{\rho}>0$ можно выбрать настолько большим, чтобы

$$\left|\sum_{j=0}^{n_m}Q_{mj}(t)\nu^j\right|>\frac{1}{2}\left|a^{0m}_{p_{0m}}\right||t|^{p_{0m}}.$$

Тогда (по (3.4))

$$|x|^m<C'(1+|x|+|x|^2+\ldots+|x|^{m-1})|t|^{\bar{\bar{\rho}}-p_{0m}},$$

где $C'>0$ – некоторая постоянная, а $\bar{\bar{\rho}}=\max\limits_{i,j}(p_{ij}-\tilde{\rho}j)$. Во всяком случае при $\tilde{\rho}>0$ достаточно большом $-\rho_0=\bar{\bar{\rho}}-p_{0m}<0$, а тогда $|x|<\tilde{C}_0|t|^{-\rho_0}$ при $|\nu|=|t|^{-\tilde{\rho}}$ и $|t|>T_0>1$, причем $\tilde{C}_0=mC'=\text{const}$. Аналогично из (11.4) также найдем, что при тех же ν и t (в случае надобности $\tilde{\rho}>0$ можно еще увеличить) $\left|\dfrac{\partial x}{\partial t}\right|<\tilde{C}_1|t|^{-\rho_1}$ с постоянными $\tilde{C}_1$ и $\rho_1>0$. По теореме Коши легко сейчас находим:

$$|A_j|<\tilde{C}_0|t|^{-\rho_0+\tilde{\rho}(j-\alpha)} \tag{13.4}$$

и

$$|\tilde{D}_j|<\tilde{C}_1|t|^{-\rho_1+\tilde{\rho}(j-\beta_0)}. \tag{14.4}$$

5. Пусть сейчас $w=w(z)$ – изучаемое решение дифференциального уравнения (1.3). В силу (8.2) и (1.4) для функции $K(r)=\dfrac{\zeta w'(\zeta)}{w(\zeta)}$, где $|w|(\zeta)|=M(r)$, $|\zeta|=r$, справедливо разложение (5.4) в окрестности точек r_j' и r_j'' при j достаточно большом, причем по (1.4) в соответствующих разложениях $\alpha>0$. Мы далее считаем, что (5.4) является обсуждаемым рядом для функции $K(r)-\psi(\zeta)$, верным при больших $r: r>r_j'$, т.е.

$$K(r)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\zeta^{\frac{p-j}{q}}+\sum_{i=0}^{\infty}A_j\left(\frac{1}{w(\zeta)}\right)^{\frac{\alpha+i}{\beta}},\quad a_0=\beta_\lambda. \tag{1.5}$$

Так как $K(r)$ – функция действительная, то

$$\operatorname{Im} e^{i\left(\frac{p}{q}\varphi+\arg a_0\right)}=o(1),\quad \varphi=\arg\zeta \tag{2.5}$$

и

$$K(r)=\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} a_j\zeta^{\frac{p-j}{q}}+\sum_{j=0}^{\infty} A_j\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+j}{\beta}}\right\}=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(a_j\zeta^{\frac{p-j}{q}}+\bar{a}_j\bar{\zeta}^{\frac{p-j}{q}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(A_j\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+j}{\beta}}+\bar{A}_j\overline{\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+j}{\beta}}}\right); \tag{3.5}$$

$$\Phi=\sum_{j=0}^{\infty}\left(a_j\zeta^{\frac{p-j}{q}}-\bar{a}_j\bar{\zeta}^{\frac{p-j}{q}}\right)+\sum_{j=0}^{\infty}\left(A_j\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+j}{\beta}}-\bar{A}_j\overline{\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+j}{\beta}}}\right)=0. \tag{4.5}$$

Непрерывное и единственное продолжение функции $K(r)$ за $r'_j : r > r'_j$ возможно по меньшей мере до тех пор, пока из равенства (4.5) можно определить φ как непрерывную функцию от r. Для изучения этого вопроса продифференцируем (4.5) по φ (считая $\zeta=re^{i\varphi}$). Имеем $\left(\zeta=t^p;\ \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}=i\zeta\right)$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=i\left\{\sum_{j=0}\frac{p-j}{q}\left(a_j\zeta^{\frac{p-j}{q}}+\bar{a}_j\bar{\zeta}^{\frac{p-j}{q}}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{p}A_j\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+j}{\beta}}\zeta^{\frac{1}{p}}+\right.$$

$$+\overline{\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(A_i\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+j}{\beta}}\right)\frac{1}{p}\zeta^{\frac{1}{p}}\right]}-\beta^{-1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha+j)\left(A_j\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+j}{\beta}}\frac{\zeta w'}{w}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\overline{+A_j\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\alpha+j}{\beta}}\frac{\zeta w'}{w}}\right)\right]\right\}. \tag{5.5}$$

В соответствии с соотношениями (8.3) $|w(\zeta'_j)|=M(r'_j)>r'^{2N}$, где N можно выбрать произвольно большим, увеличивая в случае надобности j. Тогда, очевидно, в некоторой окрестности точки r'_j верно неравенство $M(r)>r^N$. При достаточно больших r (т.е. j, r – точка окрестности r'_j):

$$|K(r)|<2|a_0|r^{\alpha\lambda}+\sum_{j=0}^{\infty}|A_j|(r^{-N})^{\frac{\alpha+j}{\beta}}.$$

Далее, по (13.4), считая N настолько большим, что $\frac{N\alpha}{\beta}-\tilde{\rho}>0$

$$|K(r)|<2|a_0|r^{\alpha\lambda}+\frac{C_0}{r^{\frac{N\alpha}{\beta}+\rho_0+\alpha\tilde{\rho}}}\sum_{j=0}^{\infty}r^{-\left(\frac{N\alpha}{\beta}-\tilde{\rho}\right)j}=$$

$$=2|a_0|r^{\alpha\lambda}+C_0\left(r^{\frac{N\alpha}{\beta}+\rho_0+\alpha\tilde{\rho}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{r^{\frac{N\alpha}{\beta}-\tilde{\rho}}}\right)\leqslant 2|a_0|r^{\alpha\lambda}(1+r^{-N_1}),$$

а по (4.5), (14.4) и (5.5)

$$\left|\frac{d\Phi}{d\varphi}\right|\geqslant|a_0|r^{\alpha\lambda}\left(1+o(1)\right)-\left\{\frac{2}{p}r^{\frac{1}{p}}C_0\left(r^{\frac{N\alpha}{\beta}+\ _1+\beta\tilde{\rho}}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(r^{\frac{N\alpha}{\beta}-\tilde{\ }}\right)^{-}+\right.$$

$$+\left[2|a_0|r^{\alpha\lambda}+C_0\left(r^{\frac{N\alpha}{\beta}+\rho_0+\alpha\tilde{\rho}}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(r^{\frac{N\alpha}{\beta}-\tilde{\rho}}\right)^{-j}\right]2C_0\left(r^{\frac{N\alpha}{\beta}+\rho_0+\alpha\tilde{\rho}}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(r^{\frac{N\alpha}{\beta}-\tilde{\ }}\right)^{-j}\geqslant$$

$$\geqslant|a_0|r^{\alpha\lambda}(1-r^{-N_0}),$$

где $N_1>0$ и $N_2>0$ постоянные, от r не зависящие. Итак, если r и N достаточно большие, то $\left|\frac{d\Phi}{d\varphi}\right|>0$ и функции $\varphi(r)$ и $K(r)$ непрерывно продолжаемы единственным образом. Посмотрим сейчас в какой точке R, $R>r'_j$ возможно равенство: $\tilde{M}(R)=R^N$*). Так как $\ln K(r)$ выпукла по $\ln r$, то $K(r)$ всегда возрастает и $K'(r)\geqslant 0$. Тем же путем, как и выше, легко найти, что при $\tilde{M}(r)\geqslant r^N$, $\alpha_\lambda\neq 0$

$$K(r)=\left(1+o(1)\right)|\beta_\lambda|\,r^{\alpha_\lambda}\cos(\alpha_\lambda\varphi+\arg\beta_\lambda) \tag{6.5}$$

и

$$\frac{rK'(r)}{1+ir\varphi'(r)}=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(\frac{p-j}{q}\right)\zeta^{\frac{p-j}{q}}+O\left(\frac{1}{r^{\frac{\alpha N}{\beta}-\tilde{\rho}}}\right), \tag{7.5}$$

где использовано равенство $r\frac{d\zeta}{dr}=\zeta(1+ir\varphi')$, $\zeta=re^{i\varphi(r)}$. Следовательно, при больших r

$$\frac{rK'(r)}{1+r^2\varphi'^2(r)}=\left(1+o(1)\right)\alpha_\lambda|\beta_\lambda|\,r^{\alpha_\lambda}\cos(\alpha_\lambda\varphi+\arg\beta_\lambda) \tag{8.5}$$

(см. (2.5)). Поэтому, если $K(r_j)<0$, то по (6.5) и (8.5) $\alpha_\lambda<0$; если же $K(r_j)>0$, то $\alpha_\lambda>0$. Если наконец $\alpha_\lambda=0$, то $K(r)=a_0+o(1)$. Из (8.5) видно, что $K'(r)$ сохраняет знак, пока $K(r)$ продолжима. Во всех этих случаях в точке R, в которой $M(R)=R^N$ в силу отмеченной выпуклости $\ln\tilde{M}(r)$ по $\ln r\left(K'(r)\geqslant 0\right)$

$$\ln\tilde{M}(R)-\ln M(r_j)\geqslant K(r_j)\ln\frac{R}{r'_j}.$$

Далее, $K(r'_j)=\tilde{\varepsilon}\left(1+o(1)\right)|\beta_\lambda|\,r_j'^{\alpha_\gamma}$, где $\tilde{\varepsilon}\alpha_\lambda>0$ при $\alpha_\lambda\neq 0$ и

$$\frac{R^N}{r_j'^{2N}}>\frac{\tilde{M}(R)}{M(r_j)}>\left(\frac{R}{r_j}\right)^{\tilde{\varepsilon}(1+o(1))|\beta_\gamma|\,r_j'^{\alpha_\gamma}} \tag{9.5}$$

Если $\alpha_\lambda>0$, то $\tilde{\varepsilon}>0$ и в силу неравенства (9.5)

$$\frac{R^N}{r_j'^{2N}}>\frac{R}{r'_j},\ \text{т. е.}\quad R>r'^{\frac{2N-1}{N-1}}=r_j'^{\,1+\frac{1}{N-1}}.$$

Так как при $j>j'$, где $j'>0$ — достаточно большое число, $|\beta_\lambda|\,r_j'^{\alpha_\gamma}\left(1+o(1)\right)>1$ и $\frac{R}{r_j'}>1$. При $\alpha_\lambda<0$ и $\tilde{\varepsilon}<0$, $r_j'^{\alpha_\gamma}=o(1)$ и когда $j>j''$ (j'' — достаточно велико) $-|\beta_\lambda|\left(1+o(1)\right)r_j'^{\alpha_\gamma}>-1$. Таким образом, в этом случае

$$\frac{R^N}{r_j'^{2N}}>\left(\frac{R}{r'_j}\right)^{-1},\ \text{т. е.}\ R>r_j'^{\frac{2N+1}{N+1}}=r_j'^{\,2-\frac{1}{N+1}}.$$

Если, наконец, $\alpha_\lambda=0$, то $K(r'_j)=\beta_\lambda\left(1+o(1)\right)>-2|\beta_\lambda|$ и при $j>j'''>0$

$$R>r'^{\frac{2N-2|\beta_\lambda|}{N-2|\beta_\lambda|}}=r_j'^{\,2+\frac{2|\beta_\lambda|}{N-2|\beta_\lambda|}}.$$

---

*) $\tilde{M}(r)$ — продолженная функция $M(r)$.

Если $N>1+2|\beta_\lambda|$, то во всяком случае при $j>j_0=\max(j', j'', j''')$ всегда $R>r'^{\frac{3}{2}}$ и

$$R-r_j'>r_j'^{\frac{3}{2}}-r_j'>\frac{1}{2}\,r_j'^{\frac{3}{2}}. \tag{10.5}$$

Рассмотрим теперь вопрос о продолжении функции $K(r)$ с точки r_j'' при $r<r_j''$. Как и раньше, легко заключаем, что это продолжение возможно до тех пор, пока $\tilde{M}(r)\geqslant r^N$, $r<r_j''$ при достаточно больших N и r. Пусть сначала в равенстве (1.4) $\alpha_\lambda\leqslant 0$. В этом случае функция $\tilde{M}(r)$ убывает. Но неравенство $(r_j''-d)^N>M(r_j'')$ при больших j невозможно. Это означает, что функция $K(r)$ продолжима при $r<r_j''$ за интервал (r_j', r_j'').

Пусть сейчас $\alpha_\lambda>0$ и $\tilde{M}(R)=R^N$. Тогда

$$\Bigl(1+o(1)\Bigr)|\beta_\lambda|\,r''^{\alpha_\lambda}\ln\frac{r_j''}{R}=K(r_j'')\ln\frac{r_j''}{R}\geqslant\ln M(r_j'')-N\ln R>\ln M(r_j'')-N\ln r_j''=$$

$$=\Bigl(1+o(1)\Bigr)\ln M(r_j'').$$

Отсюда

$$r_j''R^{-1}>e^{(1+o(1))\frac{\ln M(r_j'')}{|\beta_\lambda|\,r_j''^{\alpha_\lambda}}}>1+\frac{1}{2}\,\frac{\ln M(r_j'')}{|\beta_\lambda|\,r_j''^{\alpha_\lambda}}$$

и

$$r_j''-R>\frac{|\beta_\lambda|^{-1}}{2}\,R\,\frac{\ln M(r_j'')}{r_j''^{\alpha_\lambda}}. \tag{11.5}$$

Предположим, что $R>r_j''-1$. Тогда

$$r_j''-R>\Bigl(1+o(1)\Bigr)\frac{|\beta_\lambda|^{-1}}{2}\,\frac{\ln M(r_j'')}{r_j''^{\alpha_\lambda-1}}>\frac{|\beta_\lambda|^{-1}}{3}\,\frac{\ln M(r_j'')}{r_j''^{\alpha_\lambda-1}},\quad j>J_0. \tag{12.5}$$

Исключенные нами в лемме 1.1 кружки C_i были радиусов $|\alpha_i|^{-\rho'}$; $\rho<\rho'$, где ρ — порядок функции $w(z)$. Положим $\rho'=\rho+\mu$, $\mu=\max(|\alpha_1|, |\alpha_2|,\ldots|\alpha_m|)$. Тогда

$$\sum_{|a_j|\geqslant R}\frac{1}{|a_j|^{\rho+\mu}}=\int_R^\infty\frac{dn(t)}{t^{\rho+\mu}}=\frac{n(t)}{t^{\rho+\mu}}\Big|_R^\infty+(\rho+\mu)\int_R^\infty\frac{n(t)\,dt}{t^{\rho+\mu+1}}<\frac{\tilde{c}}{R^{\mu-\varepsilon(R)}},\qquad \varepsilon(R)\underset{R\to\infty}{\to}0,$$

где $\tilde{c}>0$ — некоторая постоянная. Из (12.5) сейчас видно, что

$$r_j''-R>\frac{2\tilde{c}}{R^{\mu-\varepsilon(R)}}.$$

Сформулируем полученный результат.

Кривая максимумов $\varphi=\varphi_j(r)$, определенная в кольце $r_{j-1}''<|z|<r_j'$ при достаточно больших j непрерывно продолжаема за кольца $r_{j-1}'\leqslant|z|\leqslant r_{j-1}''$ и $r'\leqslant|z|\leqslant r_j''$. На этих продолжениях имеет место разложение (1.4) (с теми же α_λ и β_λ).

6. Как мы показали в предыдущем пункте при продолжении функции $K(r)$ за интервал (r', r_j'') сохраняется знак производной $K'(r)$. Это означает, что в точках кривых $\varphi_j^0(r)$ и $\bar{\varphi}_{j+1}(r)$ — продолжениях кривых $\varphi_j(r)$ и $\varphi_{j+1}(r)$ на рассматриваемый интервал из точек r_j' и r_j'' соответственно — функция $|w(z)|$ достигает локальные максимумы (см. [7]). Определим в кольце $r'\leqslant|z|\leqslant r_j''$ функцию

$$m_j(r)=\max\left\{|w(re^{i\varphi_j^0(r)})|,\ |w(re^{i\bar{\varphi}_{j+1}(r)})|\right\}.$$

По построению $m_j(r'_j)=M(r'_j)$ и $m_j(r''_j)=M(r''_j)$. Кроме того, легко видеть, что функция $m_j(r)$ непрерывна. Пусть, наконец,

$$m(r)=\begin{cases} M(r); & r\notin\Delta\cap[r'_{j_0}, \infty] \\ m_j(r); & r\in[r'_j, r''_j]; \quad j=j_0+1, \ j_0+2, \dots \end{cases}$$

Покажем сейчас, что функция $m(r)$ возрастающая. В самом деле, в кольце $r'_j\leqslant|z|\leqslant r''_j$ функция $m(r)$ не может достигнуть максимума, что следует из принципа максимума для модуля аналитической функции в окрестности соответствующей точки ζ^*, в которой

$$m(r^*)=|w(\xi^*)|>|w(z)|$$

в некоторой окрестности этой точки на окружности $|z|=r$. Вне кольцов $r'_j<|z|<r''_j$ функция $m(r)$ также не может иметь локальных максимумов. Следовательно, $m(r)$ может иметь лишь один минимум. Функция $m(r)$ не может быть убывающей, так как $M(r)\to\infty$ при $r\to\infty$. Из этих рассуждений следует, что, начиная с некоторого значения r_0, $r>r_0$ функция $m(r)$ возрастает. Далее, функция

$$k(r)=\frac{\zeta^* w'(\zeta^*)}{w(\zeta^*)}=\frac{rm'(r)}{m(r)}$$

также возрастает ($k'(r)$ сохраняет знак). Как мы показали в конце п. 5, в точках ζ^* локального максимума функции $|w(z)|$, для функции $k(r)$ имеет место равенство (1.4) с постоянными α_λ, β_λ и остатком, стремящимся к нулю при $r\to\infty$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть бесконечность есть дефектное значение трансцендентного мероморфного решения уравнения* (1.3). *Порядок ретения равен одному из старших положительных показателей степеней в разложении корней уравнения $P_0(z, K)=0$ в окрестности бесконечно удаленной точки.*

Доказательство. Как мы выше показали, при достаточно больших r

$$k(r)=\frac{rm'(r)}{m(r)}=B_\lambda r^{\alpha_\lambda}\Big(1+o(1)\Big); \quad \lambda>0.$$

Отсюда

$$\ln m(r)=\frac{B_\lambda}{\alpha_\lambda}r^{\alpha_\lambda}\Big(1+o(1)\Big).$$

Но вне Δ $m(r)=M(r)$ и $\ln M(r)=\frac{B_\lambda}{\alpha_\lambda}r^{\alpha_\lambda}\Big(1+o(1)\Big)$, причем, как мы уже упомянули, исключая из полуоси $r>r_0$ множество точек конечной меры, мы не изменяем порядок роста функции $\ln M(r)$. Теорема доказана.

7. Пусть теперь $a\neq\infty$ — есть дефектное значение трансцендентного мероморфного решения $w(z)$ конечного порядка ρ уравнения (1.3). Для функции $\frac{1}{w(z)-a}$ дефектным тогда будет значение бесконечность. В уравнении (1) введем замену $w=\frac{1}{u}+a$. Имеем $w'=-\frac{u'}{u^2}$ и

$$F\left(z, \frac{1}{u}+a, \ -\frac{u'}{u^2}\right)=0. \tag{1.7}$$

В согласии с формулой (12.2) в точках максимума ζ функции $|u(\zeta)|$ вне некоторой последовательности колец с конечной суммой их ширин

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta^k u'}{u^2}=0; \quad \lim_{r\to\infty}\frac{r^k}{u}=0 \tag{2.7}$$

при любом постоянном k. Следовательно,

$$\lim_{\substack{\zeta\to\infty\\ \zeta\notin\Delta}} F\left(\zeta, \frac{1}{u}+a, -\frac{u'}{u^2}\right)=\lim_{\zeta\to\infty} F(\zeta, a, 0)=0. \tag{3.7}$$

Но функция $F(z, a, 0)$ есть полином относительно z. Потому равенство (3.7) возможно лишь тогда, если при данном a

$$F(z, a, 0)\equiv 0. \tag{4.7}$$

Разложив функцию $F(z, w, w')$ по степеням w', получим:

$$F(z, w, w')=\sum_{j=0}^{p} Q_j(z, w)\, w'^{(p-j)}=0. \tag{5.7}$$

Из (2.7) и (4.7) вытекает, что для того, чтобы число $a\neq\infty$ было дефектным значением, необходимо выполнение тождества

$$Q_0(z, a)\equiv 0.$$

Это означает, что

$$Q_0(z, w)\equiv(w-a)^{p_0}\tilde{Q}_0(z, w),$$

где $\tilde{Q}_0(z, a)\not\equiv 0$, $p_0>0$ — некоторое положительное целое число. Положим

$$Q_j(z, w)=(w-a)^{p_j}\tilde{Q}_j(z, w);\quad \tilde{Q}_j(z, a)\not\equiv 0;\quad p_j\geqslant 0. \tag{6.7}$$

В этих обозначениях

$$F(z, w, w')=\sum_{j=0}^{p}(w-a)^{p_j}\tilde{Q}_j(z, w)\, w'^{(p-j)}.$$

Среди чисел p_j есть хотя бы одно, равное нулю (в противном случае можно было бы все уравнение предварительно сократить на $w-a$ в некоторой положительной степени). Заменив $w-a$ на $\frac{1}{u}$, найдем

$$\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{u^{p_j}}\tilde{Q}_j\left(z, \frac{1}{u}+a\right)\left(-\frac{u'}{u^2}\right)^{p-j}=0. \tag{7.7}$$

Напомним, что из теоремы 1 следует, что вне Δ $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\frac{\zeta u'(\zeta)}{u(\zeta)}=\infty$. Перепишем (7.7) в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{p}\tilde{Q}_j\left(z, \frac{1}{u}+a\right)\frac{(-1)^{p-j}}{u^{p_j+p-j}}\left(\frac{u'}{u}\right)^{p-j}=0. \tag{8.7}$$

Пусть $q_0=\min\limits_j(p_j+p-j)$. Сократив уравнение (8.7) на $\frac{1}{u^{q_0}}$ (напомним, что необходимо $p_0>0$), получим:

$$\sum_{j=0}^{p}\tilde{Q}_j(z, w)\frac{(-1)^{p-j}}{u^{p_j+p-j-q_0}}\left(\frac{u'}{u}\right)^{p-j}=0, \tag{9.7}$$

причем хотя бы для одного значения индекса j, скажем $j=i$, $p_i+p-i-q_0=0$. Если допустить, что это значение индекса есть единственное, для которого достигается значение q_0, то, переходя к пределу в (9.7) при $\zeta\to\infty$, найдем

$$\zeta^{p-i}Q_i(\zeta, a)\left(\frac{u'}{u}\right)^{p-i}=o(1).$$

Последнее равенство показывает, что в наших допущениях не существует решения $\frac{\zeta u'}{u}$ уравнения (9.7), растущего в бесконечность вместе с ζ. Итак нами доказано следующее предложение.

Теорема 2. *Рассмотрим уравнение*

$$F(z, w, w') = \sum_{j=0}^{p} Q_j(z, w) w'^{p-j} = 0, \tag{10.7}$$

где все $Q_j(z, w)$ — полиномы. Представим каждый коэффициент $Q_j(z, w)$ в следующем виде:

$$Q_j(z, w) = (w-a)^{p_j} \bar{Q}_j(z, w); \quad \bar{Q}_j(z, a) \not\equiv 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

где $p_j \geqslant 0$ — целые числа.

Пусть, наконец,

$$q = \min_j (p_j - j).$$

Тогда, для того, чтобы число $a \neq \infty$ могло быть дефектным значением для хотя бы одного трансцендентного мероморфного решения уравнения (10.7), необходимо, чтобы было $p_0 > 0$ и чтобы существовали по меньшей мере два индекса i и j таких, что

$$q = p_i - i = p_j - j.$$

Мероморфное решение уравнения (3.7) не может иметь больше, чем конечное число дефектных значений.

Сделаем еще одно замечание. Пусть бесконечность не является дефектным значением для мероморфного решения уравнения (1.3). Если притом уравнение $P_0(z, K) = 0$ не имеет решений $K = K(z)$, растущих в бесконечность вместе с z, то $m(r) = O(\ln r)$.

Пример. Найдем необходимые условия, при которых мероморфное решение уравнения Рикатти ([1])

$$w' = P(z) w^2 + Q(z) w + R(z), \tag{11.7}$$

где $P(z)$, $Q(z)$ и $R(z)$ — полиномы, могут иметь дефектные значения.

Бесконечность не может быть дефектным значением для мероморфных решений уравнения (11.7), так как, разделив (11.7) на w^2 и переходя затем к пределу при $\zeta \to \infty$, имели бы $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = 0$, что невозможно.

Для того, чтобы $a \neq \infty$ было дефектным значением, необходимо

$$P(z) a^2 + Q(z) a + R(z) \equiv 0. \tag{12.7}$$

Подставив $R(z)$ из (12.7) в (11.7), найдем:

$$w' = P(z) w^2 + Q(z) w - P(z) a^2 - Q(z) a = (w-a)\big(P(z) w + Q(z)\big).$$

Таким образом, для того, чтобы $a \neq \infty$ было дефектным значением мероморфного решения уравнения Рикатти, последнее должно быть вида:

$$w' = (w-a)\big(P(z) w + Q(z)\big). \tag{13.7}$$

Сделав замену $u = \dfrac{1}{w-a}$, получим:

$$-\frac{zu'}{u^2} = \frac{1}{u}\left[P(z)\frac{1}{u} + P(z) a + Q(z)\right]$$

или

$$\frac{zu'}{u} = -\frac{zP(z)}{u} - z\big(P(z) a + Q(z)\big).$$

Порядок любого решения (мероморфного), для которого $a \neq \infty$ есть дефектное значение, должен равняться в соответствии с теоремой 1 степени полинома $z\left(P(z)a+Q(z)\right)$. Уравнение (13.7) решается до конца. Общим решением уравнения (13.7) является функция $w=\frac{1}{u}+a$, где

$$u=Ce^{-\int[P(z)a+Q(z)]\,dz}-e^{-\int[P(z)a+Q(z)]\,dz}\cdot\int P(z)\,e^{\int[P(z)a+Q(z)]\,dz}\,dz$$

Так как $u(z)$ – целая трансцендентная функция, то в случае уравнения (13.7) (и только в этом случае [уравнения Рикатти) любое решение (13.7) имеет дефектным значение a.

В случае уравнения

$$w'=P(z)(w-a)(w-b)$$

любое его решение имеет два дефектных значения: a и b.

Больше двух дефектных значений ни одно решение, какого бы ни было уравнения Рикатти, иметь не может (с полиномиальными коэффициентами).

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 27.III.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Виттих, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., 1960.
2. А. А. Гольдберг, Об однозначных интегралах дифференциальных уравнений первого порядка, Укр. мат. ж., 8, 1956, 254–261.
3. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956.
4. A. J. Macintyre, On Bloch's theorem, Math. Zeitschrift, 44, 1939, 536–540.
5. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М.–Л., 1941.
6. Ш. И. Стрелиц, О максимальных модулях аналитических функций, УМН, X, 4(66), 1955, 153–160.
7. Ш. И. Стрелиц, О росте решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка, Мат. сб., 46(88): 4, 1958, 433–450.
8. Ш. И. Стрелиц, О росте неоднозначных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Мат. сб., 53(95): 2, 1961, 159–194.
9. Ж. Валирон, Аналитические функции, М., 1957.

PIRMOS EILĖS PAPRASTŲJŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ MEROMORFINIŲ SPRENDINIŲ SU DEFEKTINĖMIS REIKŠMĖMIS KLAUSIMU

Š. STRELICAS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjami diferencialinės lygties

$$\sum_{j=0}^{n} P_j\left(z, \frac{zw'}{w}\right)w^{n-j}=0 \tag{1}$$

arba, o tai yra tas pat, lygties,

$$\sum_{i=0}^{p} Q_i(z, w)\,w'^{p-i}=0, \tag{2}$$

kur P_j ir Q_i – polinomai, meromorfiniai sprendiniai su defektinėmis reikšmėmis Nevanlinnos prasme. Įrodomos šios dvi teoremos.

1 teorema. *Sakysime, kad $a=\infty$ yra lygties* (1) *meromorfinio sprendimo tam tikros šaknies $K=K(z)$ laipsninio išdėstymo taško $z=\infty$ aplinkoje defektinė reikšmė. Sprendinio eilė yra lygi vienam kuriam nors algebrinės lygties $P_0(z, K)=0$ aukščiausiam laipsnio rodikliui.*

2 teorema. *Kiekvieną* (2) *lygties koeficientą perrašome šiuo būdu* $\left(Q_j(z, w) \not\equiv 0\right)$:

$$Q_j(z, w)=(w-a)^{p_j} Q_j(z, w); \quad Q_j(z, a) \not\equiv 0: \quad j=0, 1, \ldots, p; \quad p_j \geqslant 0.$$

Sakysime, kad $q=\min\limits_j (p_j-j)$. $a \neq \infty$ *tiktai tuomet gali būti kurio nors meromorfinio* (2) *lygties sprendinio defektinė reikšmė, jeigu* $p_0>0$ *ir yra bent du tokie indeksai* i *ir* j, *kad* $p_i-i=p_j-j=q$.

Bet kuris meromorfinis (2) lygties sprendinys gali turėti tiktai baigtinį defektinių reikšmių skaičių.

ZUR FRAGE DER MEROMORPHEN LÖSUNGEN MIT DEFEKTEN WERTEN VON GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

S. STRELITZ

(*Zusammenfassung*)

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir meromorphe Lösungen mit nevanlinnschen defekten Werten der Differentialgleichung

$$\sum_{j=0}^{n} P_j\left(z, \frac{zw'}{w}\right) w^{n-j}=0 \tag{1}$$

oder, was gleichbedeutend ist, der Gleichung

$$\sum_{j=0}^{p} Q_i(z, w)\, w'^{p-i}=0, \tag{2}$$

wo P_j und Q_i — Polynome sind. Wir beweisen die folgenden zwei Sätze.

Satz 1. *Es sei* $a=\infty$ *ein defekter Wert einer meromorphen Lösung der Gleichung* (1). *Wir betrachten nun die potenzen Reihenentwicklungen in Umgebung des Punktes* $z=\infty$ *der Lösungen* $K=K(z)$ *der Gleichung* $P_0(z, K)=0$. *Die Ordnung der oben erwähnten meromorphen Lösung der Gleichung* (1) *ist gleich einem der Grade der genannten Reihenentwicklungen.*

Satz 2. *In der Gleichung* (2) *setzen wir* $(Q_j(z, w) \not\equiv 0)$

$$Q_j(z, w)=(w-a)^{p_j} \tilde{Q}_j(z, w); \quad \tilde{Q}_j(z, a) \not\equiv 0, \quad j=0, 1, \ldots, p; \quad p_j \geqslant 0$$

ein. Es sei $q=\min\limits_j (p_j-j)$. *Damit* $a \neq \infty$ *ein defekter Wert einer meromorphen Lösung der Gleichung* (2) *wäre, ist es notwendig, dass* $p_0>0$ *und dass es wenigstens zwei solche Indexe* i, j *gäbe, für die* $p_i-i=p_j-j=q$.

Eine meromorphe Lösung der Gleichung (2) *kann nur eine endliche Zahl von defekten Werten haben.*