IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

К ВОПРОСУ О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ш. И. СТРЕЛИЦ

В работах [1] и [2] мы исследовали вопросы роста целых трансцендентных решений уравнений в частных производных и установили попутно некоторые необходимые условия существования решений указанного класса. В предлагаемой вниманию читателей работе с помощью результатов, изложенных в [3], удается в известных пределах более полно изучить решения упомянутого класса и более полно характеризовать их функцию максимума модуля

$$M(r_1,\ r_2) = \max_{\substack{|z_1|=r_1;\\ |z_2|=r_2}} |f(z_1,\ z_2)|. \tag{1.0}$$

Мы останавливаемся на уравнениях от двух независимых переменных. Общий случай $n : n \geqslant 2$ переменных ничем не отличается от разбираемого нами.

§ **1.1.** Предварительно займемся асимптотическими решениями алгебраического уравнения

$$P(x,\ R,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m) = x^n + A_1 R^{m_1} x^{n-1} + \\ + A_2 R^{m_2} x^{n-2} + \ldots + A_n R^{m_n} = 0, \tag{1.1}$$

при $R \to \infty$, где $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ — действительные числа, не обязательно рациональные, а $A_j = A_j(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m)$ — непрерывные функции комплексных переменных в некоторой замкнутой области $\overline{D}$, в которой ни одна из функций A_j не обращается в нуль: $A_j(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m) \neq 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Нас будут интересовать решения, растущие в бесконечность вместе с R.

Положим

$$\tilde{m}_0 = \max(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n) \tag{2.1}$$

и предположим, что для индексов $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_p$ $(j_t < j_{t+1})$ и только для них

$$\tilde{m}_0 = m_{j_1} = m_{j_2} = \ldots = m_{j_p}.$$

Если $\tilde{m}_0 \leqslant 0$, то на основании теоремы о непрерывной зависимости корней от коэффициентов уравнения мы заключаем, что в обсуждаемом случае все корни уравнения (1.1) в $\overline{D}$; $|R| \geqslant R_0$ ограниченные и образуют n непрерывных функций, т. е., если $x(R,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_m)$ — решение уравнения (1.1), то при $|R| \geqslant R_0$, где R_0 достаточно велико, и всех точек из $\overline{D}$

$$|x(R,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_m)| \leqslant C < \infty,$$

где $C>0$ — постоянная, которая от R, $|R|\geqslant R_0$ и значений $\beta_1, \ldots, \beta_m$ из $\overline{D}$ не зависит.

Пусть теперь $\tilde{m}_0>0$. Уравнение

$$A_{j_1}\eta^{j_p-j_1}+A_{j_2}\eta^{j_p-j_2}+\ldots+A_{j_p}=0 \tag{3.1}$$

не имеет корней, обращающихся в нуль в $\overline{D}$, так как в этой замкнутой области $A_j(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)\neq 0$, $j=1, 2, \ldots, n$. Так же как и раньше при рассмотрении случая уравнения (1.1), когда $\tilde{m}_0\leqslant 0$, легко покажем, что все решения уравнения (3.1) равномерно ограничены в $\overline{D}$, т. е.

$$|\eta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)|\leqslant C_0<\infty, \tag{4.1}$$

где $C_0>0$ — некоторая постоянная.

Подберем число $a>0$ настолько большим, чтобы оно не являлось решением уравнения (3.1) ни при каких $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ из $\overline{D}$. Произведя в уравнении (1.1) замену $y=\frac{1}{v}+a$, получим:

$$(1+av)^n+A_1R^{m_1}v(1+av)^{n-1}+A_2R^{m_2}v^2(1+av)^{n-2}+\ldots+A_nR^{m_n}v^n=0. \tag{5.1}$$

Коэффициент при v^n в уравнении (5.1) равен

$$B_0=a^n+A_1R^{m_1}a^{n-1}+A_2R^{m_2}a^{n-2}+\ldots+A_nR^{m_n}. \tag{6.1}$$

По свойству числа a и определению числа $\tilde{m}_0$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}A_{j_k}a^{n-j_k}\right|\geqslant b>0, \quad b=\text{const}; \quad \tilde{m}_0-m_j>0; \quad j\neq j_k; \quad k=1, 2, \ldots, p$$

и при $|R|\geqslant R_0(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{j'_i\neq j_k;\ k=1,2,\ldots,p}A_{j'_i}a^{n-j'_i}R^{m_{j'_i}-\tilde{m}_0}\right|<\varepsilon,$$

причем полученные оценки равномерны в $\overline{D}$. Поэтому

$$|B_0|=|R|^{\tilde{m}_0}\left|\sum_{k=1}^{p}A_{j_k}a^{n-j_k}+\sum_{j'_i\neq j_k,\ k=1,2,\ldots,p}A_{j'_i}a^{n-j'_i}R^{m_{j'_i}-\tilde{m}_0}\right|>|R|^{m_0}(b-\varepsilon). \tag{7.1}$$

Разделив все уравнение (5.1) на B_0, выводим, что все коэффициенты в получаемом после деления уравнения ограничены на множестве $\overline{D}':\overline{D}\times(|R|\geqslant R_0)$ и, следовательно, по доказанному выше все решения уравнения (5.1) непрерывны и равномерно ограничены в $\overline{D}'$. Из них j_p-j_1 корней не равны $-\frac{1}{a}$ или нулю при $R=\infty$; соответствующие корни уравнения (1.1) удовлетворяют (3.1) при $R=\infty$.

2. Заменив переменную x в (1.1) с помощью равенства $x=R^{\alpha}y$, найдем:

$$R^{n\alpha}y^n+A_2R^{(n-1)\alpha+m_1}y^{n-1}+\ldots+A_nR^{m_n}=0. \tag{1.2}$$

Решим все возможные уравнения

$$(n-j)\alpha+m_j=(n-i)\alpha+m_i; \qquad i, j=0, 1, 2, \ldots, n, \ i\neq j \tag{2.2}$$

$\left(\text{отсюда } \alpha_{ij}=\frac{m_i-m_j}{i-j};\ i\neq j,\ i, j=0, 1, \ldots, n\right)$ и отберем те значения α_{ij}, которые удовлетворяют неравенствам

$$(n-j)\alpha_{ij}+m_j\geqslant(n-p)\alpha_{ij}+m_p \tag{3.2}$$

при всех p и постоянных i и j. Существование таких значений можно доказать следующим образом. Положим

$$\psi_{ij}(\gamma)=(n-i)\gamma+m_i-(n-j)\gamma-m_j=(j-i)\gamma+m_i-m_j.$$

Очевидно, функция $\psi_{ij}(\gamma)$ при $j>i$ — возрастающая функция от γ. Рассмотрим уравнения

$$n\tilde{\alpha}_j=(n-j)\tilde{\alpha}_j+m_j; \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Отсюда $\tilde{\alpha}_j=\frac{m_j}{j}$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Пусть $\alpha_0=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{m_j}{j}$. Пусть, далее, для индексов $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_{q_0}: j_1<j_2<\ldots<j_{q_0}$ и только для них $\alpha_0=\frac{m_{j_k}}{j_k}$; $k=1,\ 2,\ \ldots,\ q_0$. Покажем, что значение α_0 удовлетворяет требованию (3.2). В самом деле, при любом j

$$\psi_{0j}(\alpha_0)=n\alpha_0-(n-j)\,\alpha_0-m_j=j\left(\alpha_0-\frac{m_j}{j}\right)\geqslant 0.$$

Если существует другое значение α_{ij}, удовлетворяющее условию (3.2), то необходимо $\alpha_{ij}<\alpha$. Действительно при любом $\gamma:\gamma>\alpha$ в силу возрастания функции $\psi_{0j}(\gamma)\,\psi_{0j}(\gamma)>0$. Рассмотрим сейчас все числа α_{ij} при $i,\ j=j_{q_0},\ j_{q_0}+1,\ \ldots,\ n$. Тем же путем, как и выше, найдем число $\alpha_1=\max\limits_{i\neq j;\,j_{q_0}\leqslant i,j\leqslant n}\frac{m_i-m_j}{i-j}$, которое удовлетворяет условию (3.2), т. е. неравенству $\psi_{j_{q_0}i}(\alpha_1)\geqslant 0$ для любых $i\geqslant j_{q_0}$, или, что тоже самое, неравенству $(n-j_{q_0})\,\alpha_1+m_{j_{q_0}}\geqslant(n-i)\,\alpha_1+m_i$; $i\geqslant j_{q_0}$, причем существует такой индекс $j'>j_{q_0}$, что

$$\alpha_1=\frac{m_{j_{q_0}}-m_{j'}}{j_{q_0}-j'}$$

и $\psi_{j_{q_0}j'}(\alpha_1)=0$. $\alpha_1<\alpha$, так как

$$\frac{m_{j_{q_0}}}{j_{q_0}}-\frac{m_{j_{q_0}}-m_{j'}}{j_{q_0}-j'}=\frac{j'}{j_{q_0}-j'}\left(\frac{m_{j'}}{j'}-\frac{m_{j_{q_0}}}{j_{q_0}}\right)=\frac{j'}{j_{q_0}-j'}\left(\frac{m_{j'}}{j'}-\alpha_0\right)>0 \quad (j'<j_{q_0}).$$

Убедимся в том, что нет числа β между α_0 и $\alpha_1:\alpha_0<\beta<\alpha_1$, удовлетворяющего всем условиям, определяющим выбор нужных чисел. Действительно, для такого β

$$\psi_{ij_{q_0}}(\beta)=(j_{q_0}-i)\,\beta+m_i-m_{j_{q_0}}<0,$$

так как при $i<j_{q_0}$ $\psi_{ij_{q_0}}(\alpha_0)\leqslant 0$ и $\beta<\alpha_0$, а при $i>j_{q_0}$ $\psi_{ij_{q_0}}(\alpha_1)\leqslant 0$ и $\beta>\alpha_1$; следовательно, условие (3.2) не выполнено. Пусть для индексов $i,\ j=j_{q_0},\ j_{q_0+1},\ \ldots,\ j_{q_0+q_1}$ и только для них $\psi_{ij}(\alpha_1)=0$. Далее, мы рассматриваем и все числа α_{qr} при $q,\ r\geqslant j_{q_0+q_1},\ j_{q_0+q_1}+1,\ \ldots,\ n$ и т. д. Таким образом мы находим все требуемые числа $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_l$, причем для индексов

$$i,\ k=j_{q_0+q_1+\ldots+q_{s-1}},\ j_{q_0+q_1+\ldots+q_{s-1}+1},\ \ldots\ j_{q_0+q_1+\ldots+q_{s-1}+q_s}; \qquad i\neq k$$

$$\psi_{ik}(\alpha_s)=0.$$

Заметим, что $q_0+q_1+\ldots+q_l=n$.

Возьмем какое либо одно из найденных чисел $\alpha_j=\alpha$ и подставим в (1.2). Положим теперь

$$-n\alpha+(n-j)\,\alpha+m_j=m_j-j\alpha=p_j.$$

Уравнение (1.2) принимает следующий вид:

$$y^n+A_1R^{p_1}y^{n-1}+\ldots+A_nR^{p_n}=0. \tag{4.2}$$

Допустим, что $p_{j_1}=p_{j_2}=\ldots=p\,j_s=q=\max(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$. Всегда $q\geqslant 0$ $\big($см. (2.2)$\big)$ и $s\geqslant 2$. Легко подсчитать, что $q=0$, если $\alpha=\alpha_0$; в противном случае $q>0$, так как из того, что

$$\frac{m_p}{p}\neq\alpha=\frac{m_i-m_j}{i-j}; \quad i\neq j; \quad p=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

вытекает, что $(n-j)\,\alpha+m_j=(n-i)\,\alpha+m_i>n\alpha$.

Применив изложенное в н.1 к уравнению (4.2), придем к следующему утверждению.

Лемма 1.2. *Пусть в уравнении* (1.1) *все функции* $A_j(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ *непрерывны и не обращаются в нуль в замкнутой комплексной области* $\overline{D}$. *Определим все числа* α *со следующими свойствами: для каждого* α *найдутся такие индексы* i *и* j, *что*

$$q_0=(n-i)\,\alpha+m_i=(n-j)\,\alpha+m_j\geqslant(n-p)\,\alpha+m_p$$

при постоянных i *и* j *и любом* p (i *и* j, *очевидно, от* α *зависят*). *Предположим в заключении, что значение* q_0 (*при данном постоянном* α) *достигается при индексах* $j_1, j_2, \ldots, j_p$ *и только при них. Тогда существуют* j_p-j_1 *непрерывных решений уравнения при* $|R|\geqslant R_0$, *где* R_0 *достаточно велико*

$$x_s=B_s R^\alpha; \qquad s=1,\ 2,\ \ldots,\ j_p-j_1,$$

где $0<B'\leqslant|B_p(R,\beta_1,\ldots,\beta_m)|\leqslant B''<\infty$, B', $B''=\mathrm{const}$ *при* $|R|\geqslant R_0$ *и любых* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *из* $\overline{D}$ (*среди них могут быть и совпадающие местами корни*) $\lim\limits_{R\to\infty} B_p$, $p=1,\ 2,\ \ldots,\ j_p-j_1$ *определяются из уравнения* (3.1). *Получаемые таким путем решения при* $\alpha=\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ *образуют все решения уравнения* (1.1) *при* $|R|\geqslant R_0$.

3. Займемся теперь решением неравенства

$$x^{n_0}\leqslant A_1R^{m_1}x^{n_1}+A_2R^{m_2}x^{n_2}+\ldots+A_sR^{m_s}, \tag{1.3}$$

где $A_j>0$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ s$ — постоянные, $m_1, m_2, \ldots, m_s$ — произвольные действительные, а $n_0, n_1, \ldots, n_{s-1}$ — произвольные положительные числа, причем $n_0>n_1>n_2>\ldots>n_{s-1}$.

Определим число

$$\alpha=\max\left\{\frac{m_1}{n_0-n_1},\ \frac{m_2}{n_0-n_2},\ \ldots,\ \frac{m_s}{n_0}\right\} \tag{2.3}$$

и сделаем в (1.3) замену $x=R^\alpha y$. Мы получаем:

$$y^{n_0}\leqslant A_1R^{m_1-(n_0-n_1)\alpha}y^{n_1}+A_2R^{m_2-(n_1-n_2)\alpha}y^{n_2}+\ldots+A_sR^{n_s-n_0\alpha}. \tag{3.3}$$

По определению числа $\alpha\,\frac{m_j}{n_0-n_j}\leqslant\alpha$ и $m_j-(n_0-n_j)\,\alpha\leqslant0$, причем найдется такое число p, что $m_p-(n_0-n_p)\,\alpha=0$. Следовательно, все коэффициенты справа в неравенстве (3.3) ограничены. Но тогда и положительные решения неравенства (3.3) ограничены. Действительно, допустив противное и разделив (3.3) на y^{n_0}, придем к противоречию с неравенством (3.3), если R достаточно велико: увеличивая R, мы справа в (3.3) после деления на y^{n_0} найдем значение сколь угодно малое, в то время, как слева стоит постоянная единица. Таким образом, положнтельные решения неравенства (3.3) удовлетворяют неравенству $y\leqslant C$, а тогда

$$x\leqslant CR^\alpha \tag{4.3}$$

есть решение неравенства (1.3), где $C>0$ — постоянная, общая для всех решений. Нетрудно видеть, что в (4.3) число α уменьшить нельзя, так как при достаточно малом a функция $x=aR^\alpha$ удовлетворяет неравенству (1.3).

Обобщение. Проведенные рассуждения показывают, что лемма 1.2 будет верна и в том случае, если вместо постоянных в уравнении (1.1) показателей степеней $m_1, m_2, \ldots, m_s$ взять непрерывные в замкнутой области $\overline{D}$ функции $m_j = m_j(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, $j=1, \ldots, s$, обладающие тем свойством, что разность всяких двух функций из системы

$$m_k + \frac{m_i - m_j}{i-j}(n-k), \quad i \neq j, \quad k, i, j = 1, 2, \ldots, s$$

либо тождественно равна нулю в $\overline{D}$, либо в $\overline{D}$ вообще не обращается в нуль.

В случае неравенства (1.3) можно потребовать, чтобы разность двух функций из системы

$$\frac{m_j}{n_0 - n_j}; \quad j = 1, 2, \ldots, s \quad (n_s = 0)$$

либо тождественно равнялась нулю в $\overline{D}$, либо вообще в $\overline{D}$ в нуль не обращалась.

4. Рассмотрим многочлен относительно всех своих переменных

$$\Psi = \Psi\left(z_1, z_2, z_1 \frac{\frac{\partial u}{\partial z_1}}{u}, z_2 \frac{\frac{\partial u}{\partial z_2}}{u}, \ldots, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \frac{\frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}}{u}\right). \tag{1.4}$$

Определение 1. Мы скажем, что многочлен Ψ есть однородный дифференциальный многочлен порядка m, если имеет место тождество:

$$\Psi\left(z_1, z_2, tz_1 \frac{\frac{\partial u}{\partial z_1}}{u}, tz_2 \frac{\frac{\partial u}{\partial z_2}}{u}, \ldots, t^{i_1+i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \frac{\frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}}{u}\right) \equiv$$

$$\equiv t^m \Psi\left(z_1, z_2, z_1 \frac{\frac{\partial u}{\partial z_1}}{u}, z_2 \frac{\frac{\partial u}{\partial z_2}}{u}, \ldots, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \frac{\frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}}{u}\right). \tag{2.4}$$

Наряду с однородным дифференциальным полиномом (1.4) рассмотрим другой однородный (не дифференциальный) многочлен $G(\Psi)$ той же степени m, как и Ψ, определяемый последним:

$$G(\Psi) = \Psi(z_1, z_2, t_1, t_2, \ldots, t_1^{i_1} t_2^{i_2}) = \sum_{j=0}^{m} P_j(z_1, z_2) t_1^j t_2^{m-j}. \tag{3.4}$$

Подставим в (3.4) $z_j = R^{a_j} e^{i\varphi_j}$, $j = 1. 2$. Полином (3.4) тогда преобразуется в

$$G(\Psi, a_1, a_2) = \sum_{j=0}^{m} P_j(R^{a_1} e^{i\varphi_1}, \quad R^{a_2} e^{i\varphi_2}) t_1^j t_2^{m-j}.$$

Рассмотрим, далее, выражение

$$\tilde{\Psi}(R_1, a_1, a_2) = \Psi(R^{a_1} e^{i\varphi_1}, R^{a_2} e^{i\varphi_2}, t_{10}, t_{01}, \ldots, t_{ij}). \tag{4.4}$$

Определение 2. Полином Ψ мы называем невырождающимся по $R\{a_1, a_2\}$, если степени выражений $G(\Psi, a_1, a_2)$ и $\tilde{\Psi}(R, a_1, a_2)$ по R совпадают $(a_1 > 0, a_2 > 0)$.

Замечание 1. Легко видеть, что полином Ψ остается невырождающимся по $R\{a_1, a_2\}$, если z_j заменить во Ψ на $A_j z_j$, где $A_j \neq 0$ — постоянные.

Введем еще следующее обозначение. Пусть $Q(z_1, z_2)$ полином и q — степень выражения $Q(R^{a_1} e^{i\varphi_1}, R^{a_2} e^{i\varphi_2})$ по R. Мы обозначаем:

$$\tilde{Q}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) = \lim_{R \to \infty} \frac{Q(R^{a_1} e^{i\varphi_1}, R^{a_2} e^{i\varphi_2})}{R^q}. \tag{5.4}$$

С помощью этого обозначения мы можем при больших значениях R писать:

$$Q\left(R^{a_1}e^{i\varphi_1},\ R^{a_2}e^{i\varphi_2}\right)=\left(\tilde{Q}\left(e^{i\varphi_1},\ e^{i\varphi_2}\right)+o(1)\right)R^{q}, \tag{6.4}$$

где $o(1)$ стремится к нулю при $R\to\infty$ равномерно относительно φ_1, φ_2.

5. Пусть

$$\Psi\left(z_1,\ z_2,\ z_1\frac{\frac{\partial u}{\partial z_1}}{u},\ z_2\frac{\frac{\partial u}{\partial z_2}}{u},\ \ldots,\ z_1^{i_1}z_2^{i_2}\frac{\frac{\partial^{i_1+i_2}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}}{u}\right)-$$

однородный дифференциальный невырождающийся полином по $R\{a_1,\ a_2\}$. Рассмотрим значения выражения

$$G(\Psi)=\sum_{j=0}^{m}P_j(z_1,\ z_2)\,t_1^j t_2^{m-j}, \tag{1.5}$$

которое мы впредь будем называть однородным полиномом, соответствующим Ψ, на гиперповерхности $S(R)$:

$$\left(\frac{r_1}{R^{a_1}}-1\right)^2+\left(\frac{r_2}{R^{a_2}}-1\right)^2=a^2; \tag{2.5}$$

$$1-\vartheta a\leqslant\frac{r_j}{R^{a_j}}\leqslant 1+a;\qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 1,$$

где $|z_j|=r_j$; $j=1,\ 2$ и $0<a<\frac{1}{2}$ — достаточно малое число, которое мы определим ниже. В точках указанной гиперповерхности имеем:

$$G_s(\Psi)=\sum_{j=0}^{m}P_j\left[(1+\vartheta_1 a)R^{a_1}e^{i\varphi_1},\ (1+\vartheta_2 a)R^{a_2}e^{i\varphi_2}\right]t_1^j t_2^{m-j};$$

$$-\vartheta\leqslant\vartheta_j\leqslant 1;\quad j=1,\ 2;\quad \vartheta_1^2+\vartheta_2^2=1.$$

Пусть справедливо разложение

$$P_j(z_1,\ z_2)=\sum_{s=0}^{n_j}\sum_{p=0}^{s}A_{ps}^{j}z_1^p z_2^{s-p},\qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{3.5}$$

Тогда

$$P_j\left(R^{a_1}e^{i\varphi_1},\ R^{a_2}e^{i\varphi_2}\right)=\sum_{s=0}^{n_j}\sum_{p=0}^{s}A_{ps}^{j}R^{pa_1+(s-p)a_2}e^{i[p\varphi_1+(s-p)\varphi_2]}. \tag{4.5}$$

Всюду в дальнейшем мы считаем, что $a_j>0$; $j=1,\ 2$. Положим

$$q_j=\max_{\substack{s,p\\ p\leqslant s\leqslant n_j}}\left[pa_1+(s-p)a_2\right] \tag{5.5}$$

и

$$q=\max_j q_j. \tag{6.5}$$

Таким образом, выражение $G(\Psi,\ a_1,\ a_2)$ есть степени q (не обязательно целой) по R (см. (3.4)).

На основании (5.4) теперь найдем:

$$P_j\left[(1+\vartheta_1 a)R^{a_1}e^{i\varphi_1},\quad (1+\vartheta_2 a)R^{a_2}e^{i\varphi_2}\right]=$$

$$=\sum_{s=0}^{n_j}\sum_{p=0}^{s} A^j_{ps}(1+\vartheta_1 a)^p(1+\vartheta_2 a)^{s-p} R^{pa_1+(s-p)a_2} e^{i[p\varphi_1+(s-p)\varphi_2]}=$$

$$=P_j(R^{a_1}e^{i\varphi_1},\ R^{a_2}e^{i\varphi_2})+a\sum_{s=0}^{n_j}\sum_{p=0}^{s} A^j_{ps}\Psi_{ps}(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ a)\, R^{pa_1+(s-p)a_2} e^{i[p\varphi_1+(s-p)\varphi_2]}, \quad (7.5)$$

где функции $\Psi_{ps}(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ a)$, как легко видеть, равномерно ограничены, так что

$$|\Psi_{ps}(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ a)|\leqslant C_0<\infty. \quad (8.5)$$

В соответствии с (5.4), (6.4), (5.5) и (8.5)

$$P_j\Big[(1+\vartheta_1 a)R^{a_1}e^{i\varphi_1},\quad (1+\vartheta_2 a)R^{a_2}e^{i\varphi_2}\Big]=$$

$$=\Big[\tilde P_j(e^{i\varphi_1},\ e^{i\varphi_2})+a\Psi_{0j}(R,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ a)+o(1)\Big]R^{q_j},$$

где $|\Psi_{0j}|<C=\mathrm{const}<\infty$, а $o(1)$ равномерно относительно всех своих переменных стремится к нулю при $R\to\infty$. Возвращаясь к функции $G_S(\Psi)$, приходим к следующему заключению:

$$G_S(\Psi)=\sum_{j=0}^{m}\Big[\tilde P_j(e^{i\varphi_1},\ e^{i\varphi_2})+a\Psi_{0j}+o(1)\Big]R^{q_j}t_1^j t_2^{m-j}, \quad (9.5)$$

а затем по (6.5), считая, что значение q принимается показателями степеней у членов с индексами (и только у них) $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_k$, получим:

$$G_S(\Psi)=R^q\left\{\sum_{p=1}^{k}\Big[\tilde P_{j_p}(e^{i\varphi_1},\ e^{i\varphi_2})+a\Psi_{0j_p}+o(1)\Big]t_1^{j_p}t_2^{m-j_p}+o(1)\sum_{p=0}^{m}t_1^j t_2^{m-j}\right\}. \quad (10.5)$$

Условимся называть однородную форму

$$H=H(\Psi,\ a_1,\ a_2)=\sum_{p=1}^{k}\tilde P_{j_p}(e^{i\varphi_1},\ e^{i\varphi_2})\,t_1^{j_p}t_2^{m-j_p}, \quad (11.5)$$

построенную для однородного полинома Ψ (дифференциального) указанным выше способом, однородной формой, соответствующей полиному Ψ по $R\{a_1,\ a_2\}$.

Предположим теперь, что однородная форма H, соответствующая полиному Ψ, не обращается в нуль при любых действительных φ_1 и φ_2 и любых неотрицательных t_1 и t_2, удовлетворяющих уравнению $a_1t_1+a_2t_2=1$. На этом множестве

$$\min|H|\geqslant A>0.$$

Число a в уравнении гиперповерхности $S(R)$ можно выбрать настолько малым, чтобы при R достаточно больших было $\big($см. (10.5)$\big)$:

$$|G_S(\Psi)|\geqslant bR^q;\qquad b>0 \quad (12.5)$$

при любых действительных $\varphi_1,\ \varphi_2$ и неотрицательных $t_1 t_2$ на прямой $a_1t_1+a_2t_2=1$; в выражении (12.5) $b: 0<b<A$ есть некоторая постоянная, которая от R не зависит.

6. Выкладки предыдущего пункта допускают обобщение. Рассмотрим полином

$$Q(z_1,\ z_2)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{i+j=s}a_{ij}z_1^i z_2^j \quad (1.6)$$

в той части плоскости переменных a_1 и a_2, в которой $a_1>0$, $a_2>0$. Построим в этой четверти плоскости совокупность лучей, задаваемых уравнениями

$$a_1 i + a_2 j = a_1 i' + a_2 j', \tag{2.6}$$

где a_1, a_2 — переменные, а числа i, j, i' и j' — цельые неотрицательные, удовлетворяющие неравенствам $(i-i')^2+(j-j')^2>0$ и $0<i+j$, $i'+j'\leqslant n$, такие, что $a_{ij}\neq 0$, $a_{i'j'}\neq 0$ в разложении (1.6). В четверти плоскости, где $a_1>0$ и $a_2>0$, мы таким образом находим конечное число лучей $\tilde{l}_0$, $\tilde{l}_1$, $\tilde{l}_2$, ..., $\tilde{l}_{p_0}$, где $\tilde{l}_0$ = ось абсцисс, $\tilde{l}_{p_0}$ — ось ординат, а луч $\tilde{l}_{j+1}$ проходит на плоскости при $a_j>0$, $j=1, 2$ выше луча $\tilde{l}_j$ при любом j. Построенные лучи мы будем дальше называть разделительными. Через $(\tilde{l}_\tau, \tilde{l}_{\tau+1})$ мы обозначаем область, ограниченную лучами $\tilde{l}_\tau$ и $\tilde{l}_{\tau+1}$. Пусть $(a_1', a_2')\in(\tilde{l}_\tau, \tilde{l}_{\tau+1})$. По построению множества разделительных лучей, найдется такая пара чисел i_0, j_0, что

$$a_1' i_0 + a_2' j_0 > a_1' i + a_2' j \tag{3.6}$$

для всяких целых неотрицательных чисел i, j при $0\leqslant i+j\leqslant n$ и $(i-i_0)^2+(j-j_0)^2>0$.

Знак равенства вместо неравенства в (3.6) возможен лишь тогда, как это следует из (2.6), когда точка (a_1', a_2') лежит на одном из лучей $\tilde{l}_0$, $\tilde{l}_1$, ..., $\tilde{l}_{p_0}$. Это означает, что в неравенстве (3.6) знак $>$ не может меняться до тех пор, пока точка (a_1', a_2') находится внутри угла $(\tilde{l}_\tau, \tilde{l}_{\tau+1})$, в котором хотя бы для одной точки (a_1', a_2') верно (3.6). Если (a_1', a_2') лежит вне угла $(\tilde{l}_\tau, \tilde{l}_{\tau+1})$, то неравенство (3.6) не может сохраняться для всех i и j с $(i-i_0)^2+(j-j_0)^2>0$. В самом деле, пусть прямая l_τ дается уравнением

$$(i_0-i')\,a_1+(j_0-j')\,a_2=0.$$

В точке $(a_1', a_2')\in(l_\tau, l_{\tau+1})$, лежащей выше прямой l_τ верно (3.6). Поэтому будет для любой точки, лежащей ниже прямой l_τ,

$$i_0 a_1' + j_0 a_2' < i a_1' + j a_2',$$

что и требовалось показать. Мы пришли к следующему заключению: положительная четверть плоскости $a_1>0$, $a_2>0$ разбивается разделительными лучами $\tilde{l}_j$, $j=0, 1, \ldots, p_0$ на конечное число углов без общих внутренних точек, но с общей вершиной в начале координат, обладающих следующим свойством: каждому углу $(\tilde{l}_\tau, \tilde{l}_{\tau+1})$ соответствует пара чисел (i_0, j_0) таких, что если $(a_1', a_2')\in(\tilde{l}_\tau, \tilde{l}_{\tau+1})$, то

$$i_0 a_1' + j_0 a_2' > a_1' i + a_2' j \tag{4.6}$$

при любых целых неотрицательных i, j с $0\leqslant i$, $j\leqslant n$ и $(i-i_0)^2+(j-j_0)^2>0$; если $(a_1', a_2')\notin(\tilde{l}_\tau, \tilde{l}_{\tau+1})$, то неравенство (4.6) не сохраняется для всех рассматриваемых пар i, j.

Рассмотрим теперь однородный полином, соответствующий однородному полиному Ψ (см. п.5):

$$G(\Psi)=\sum_{j=0}^{m} P_j(z_1, z_2)\, t_1^j t_2^{m-j}.$$

Для каждого полинома $P_j(z_1, z_2)$ построим ее разделительные лучи. Множество лучей, состоящее из всех разделительных лучей полиномов $P_j(z_1, z_2)$:

$j=0, 1, \ldots, m$, конечное. Обозначим лучи этого множества через $l_0, l_1, \ldots, l_p$, где l_0 — ось абсцисс, l_p — ось ординат, а l_{j+1} в четверти плоскости $a_1>0$, $a_2>0$ проходит над лучом l_j при любом j.

Пусть $(a_1, a_2) \in (l_\tau, l_{\tau+1})$. Предположим, что в этой точке однородная форма $H(\Psi, a_1, a_2)$, соответствующая дифференциальному полиному Ψ, не обращается в нуль на прямой $a_1 t_1 + a_2 t_2 = 1$ при $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$. Покажем теперь, что соответствующая однородная форма не обращается в нуль для всякой точки из $(l_\tau, l_{\tau+1})$. Для доказательства обозначим, по прежнему, через $q_j = q_j(a_1, a_2)$ степень выражения $P_j(R^{a_1} e^{i\varphi_1}, R^{a_2} e^{i\varphi_2})$ по R. В разбираемом случае $q_j = q_j(a_1, a_2)$, но, как это вытекает из представления (10.5), функция $\tilde{P}_j(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})$ остается неизменной для любой точки из $(l_\tau, l_{\tau+1})$. Это мы и утверждали. Отсюда следует, что модуль однородной формы $|H(\Psi, a_1, a_2)|$ равномерно ограничен снизу в замкнутой области $\overline{D} \in (l_\tau, l_{\tau+1})$. На основании сказанного и представления (10.5) доказывается неравенство (12.5) в $\overline{D}$. Итак справедлива

лемма 1.6. *Пусть Ψ — однородный дифференциальный полином порядка m по $R\{a_1, a_2\}$; $a_j>0$, $j=1, 2$, где либо $(a_1, a_2) \in l_\tau$, либо $(a_1, a_2) \in (l_\tau, l_{\tau+1})$. Пусть, далее, при указанной паре (a_1, a_2) однородная форма $H(\Psi, a_1, a_2)$ не обращается в нуль ни при каких действительных φ_1, φ_2 и неотрицательных t_1, t_2 на прямой $a_1 t_1 + a_2 t_2 = 1$. В этих условиях найдется такая постоянная $b>0$: $b=b(a_1, a_2)$, что при любых z_1 и z_2 на гиперповерхности $S(R)$ при достаточно малом постоянном a и $b<a$ справедливо неравенство*

$$|G_S(\Psi)| \geqslant bR^q; \qquad b>0. \tag{5.6}$$

В случае, когда $(a_1, a_2) \in (l_\tau, l_{\tau+1})$, неравенство (5.6) справедливо в любой замкнутой области $\overline{D} \in (l_\tau, l_{\tau+1})$; $b=b(\overline{D})$, но не зависит от отдельной точки в $\overline{D}$.

Замечание. Лемма 1.6 может выполняться в областях, принадлежащих одним углам $(l_\tau, l_{\tau+1})$ и не выполняться в областях, принадлежащих другим. То же самое следует сказать о выполнении леммы на разделительных лучах.

7. Ниже мы столкнемся с необходимостью оценивать выражения следующего вида:

$$L = R^q \sum_{p=1}^{k} P_{j_p}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})\, t_1^{j_p} t_2^{k-j_p} +$$

$$+ \sum_{k_{01}, k_{10}, \ldots, k_{ij}} \varepsilon_{k_{01} k_{10} \ldots k_{ij}} Q_{k_{01} k_{10} \ldots k_{ij}}(R^{a_1} e^{i\varphi_1}, R^{a_2} e^{i\varphi_2})$$

(см. (10.5)), где все функции $\varepsilon_{k_{01} k_{10} \ldots k_{ij}}$ стремятся равномерно относительно всех своих переменных к нулю при $R \to \infty$, а наивысшая среди степеней функций $Q_{k_{01} k_{10} \ldots k_{ij}}$ по R равна q (см. п.5). Поэтому

$$\left| \frac{Q_{k_{01} k_{10} \ldots k_{ij}}}{R^q} \right| < \tilde{C},$$

где $\bar{C}>0$ — постоянная, которая от R не зависит. Тогда

$$|L|=R^q\left|\sum_{p=1}^{k}\tilde{P}_{j_p}(e^{i\varphi_1},\ e^{i\varphi_2})\,t_1^{j_p}t_2^{m-j_p}+\sum\varepsilon_{k_{01}k_{10}\ldots k_{ij}}\frac{Q_{k_{01}k_{10}\ldots k_{ij}}}{R^q}\right|\geqslant$$

$$\geqslant R^q\left(\left|\sum_{p=1}^{k}P_{j_p}(e^{i\varphi_1},\ e^{i\varphi_2})\,t_1^{j_p}t_2^{m-j_p}\right|-\tilde{C}\sum|\varepsilon_{k_{01}k_{10}\ldots k_{ij}}|\right).$$

Если для полинома ψ справедлива лемма 1.6, то отсюда

$$|L|\geqslant R^q\big(c+o(1)\big),$$

где $c>0$ — некоторая постоянная, а $o(1)$ стремится равномерно к нулю относительно всех своих переменных при $R\to\infty$.

8. В настоящей работе мы используем частный случай теоремы 1.2.7, доказанной в [3]. Приводим формулировку соответствующего факта.

Теорема А. *Пусть пространство комплексных переменных* C^2 *исчерпывается семейством* $V(R)$ *областей, каждая из которых есть теоретическая сумма точек гипершара*

$$\left(\frac{r_1}{R^{a_1}}-1\right)^2+\left(\frac{r_2}{R^{a_2}}-1\right)^2\leqslant a^2 \tag{1.8}$$

и точек гиперкуба

$$|z_1|\leqslant R^{a_1};\quad |z_2|\leqslant R^{a_2}, \tag{2.8}$$

где $0<a<\dfrac{1}{2}$ — *произвольное число,* $a_j>0$; $j=1,\ 2$ — *постоянные и одни и те же при всех* R. *Пусть* $S(R)$ — *гиперповерхность, ограничивающая область* $V(R)$. *Пусть модуль целой трансцендентной функции* $f(z_1,\ z_2)$ *на гиперповерхности* $S(R)$ *достигается в точке* $(\zeta_1,\ \zeta_2)$, *так что*

$$M(R)=M(R,\ a_1,\ a_2)=\max_{S(R)}|f(z_1,\ z_2)|=|f(\zeta_1,\ \zeta_2)|. \tag{3.8}$$

Тогда вне некоторого множества интервалов E *на оси* R *конечной логарифмической меры (число исключаемых интервалов множества* E *на каждом сегменте конечно), имеют место соотношения:*

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\zeta_1^{i_1}\zeta_2^{i_2}\dfrac{\partial^{i_1+i_2}F(\zeta_1,\ \zeta_2)}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}}{[K(R)]^{i_1+i_2}F(\zeta_1,\ \zeta_2)}-\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\right)=0, \tag{4.8}$$

где $F(z_1,\ z_2)=z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}f(z_1,\ z_2)$, *причем* λ_1 *и* λ_2 — *постоянные комплексные числа,* $K=K(R)=K(R,\ a_1,\ a_2)=\dfrac{RM'(R)}{M(R)}$; $\alpha_j=\alpha_j(R)\geqslant 0$ *с* $\alpha_1a_1+\alpha_2a_2=1$.

Следует заметить, что максимум модуля произвольной целой функции на гиперповерхности $S(R)$ достигается только в точках гиперсферы

$$\left(\frac{r_1}{R^{a_1}}-1\right)^2+\left(\frac{r_2}{R^{a_2}}-1\right)^2=a^2, \tag{5.8}$$

при $1\leqslant\dfrac{r_1}{R^{a_1}},\ \dfrac{r_2}{R^{a_2}}\leqslant 1+a$. Эта гиперсфера может быть параметрически выражена следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} r_1=R^{a_1}(1+\vartheta_1 a),\\ r_2=R^{a_2}(1+\vartheta_2 a),\end{cases} \tag{6.8}$$

где $-1\leqslant\vartheta_1,\ \vartheta_2\leqslant 1$ с $\vartheta_1^2+\vartheta_2^2=1$ (можно полагать $\vartheta_1=\cos\eta$ и $\vartheta_2=\sin\eta$).

Отметим, далее, следующий факт, доказанный в той же работе [3]: вне некоторого множества интервалов оси R конечной логарифмической меры (число исключаемых интервалов на каждом сегменте оси R конечно) верно предельное равенство:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R^{q_1} K^{q_2}(R)}{M(R)} = 0; \tag{7.8}$$

здесь q_1 и q_2 произвольные неотрицательные числа. В названной работе равенство (7.8) доказывается с помощью неравенства

$$\ln M(R) > \sqrt{K(R)}. \tag{8.8}$$

Мы здесь несколько подробнее остановимся на этом неравенстве. Пусть $(a_1, a_2) \in \bar{D}$, где $\bar{D}$ — замкнутая область, не содержащая точек координатных осей. Положим

$$\alpha = \min_{\bar{D}} (a_1, a_2); \quad \beta = \max_{\bar{D}} (a_1, a_2).$$

Имеют место следующие элементарные неравенства (см. (3.8) и (6.8))

$$\ln M\left[(1-a) R^{\alpha}, (1-a) R^{\alpha}\right] < \ln M(R) = \ln M(R, a_1, a_2) <$$

$$< \ln M\left[(1+a) R^{\beta}, (1+a) R^{\beta}\right]. \tag{9.8}$$

Заметим, что $\tilde{M}(\rho) = M(\rho, \rho)$ есть максимум функции $|f(z_1, z_2)|$ в бицилиндре $|z_1| \leqslant \rho$, $|z_2| \leqslant \rho$. В силу выпуклости $\ln \tilde{M}(\rho)$ по $\ln \rho$ (см. [3]), обозначив $\tilde{K}(\rho) = \frac{\rho \tilde{M}'(\rho)}{\tilde{M}(\rho)}$, получим:

$$\gamma \tilde{K}(AR^{\gamma} e^{-\gamma\tau}) \tau > \ln \tilde{M}(AR^{\gamma}) - \ln \tilde{M}(AR^{\gamma} e^{-\gamma\tau}). \tag{10.8}$$

По (9.8) и (10.8) тогда выводим ($R_0 > e$):

$$K(R) \ln R \geqslant \ln M(R) - \ln M(R_0) > \ln \tilde{M}[(1-a) R^{\alpha}] - \ln M(R_0) >$$

$$> \ln \tilde{M}[(1-a) R^{\alpha}] - \ln M[(1-a) R^{\frac{\alpha}{2}}] \geqslant \frac{\alpha}{2} \tilde{K}[(1-a) R^{\frac{\alpha}{2}}] \ln R,$$

т. е.

$$K(R) > \frac{\alpha}{2} \tilde{K}[(1-a) R^{\frac{\alpha}{2}}], \tag{11.8}$$

если $\ln \tilde{M}[(1-a) R^{\frac{\alpha}{2}}] > \ln M(R_0)$. Это тем более будет верно, если

$$\ln \tilde{M}[(1-a) R^{\frac{\alpha}{2}}] > \ln \tilde{M}[(1+a) R_0^{\beta}].$$

Из последнего неравенства вытекает, что (11.8) будет верно при $R > \tilde{R}$, где $\tilde{R}$ от $(a_1, a_2) \in \tilde{D}$ не зависит.

Функция $x^m e^{-\sqrt[4]{x}}$ убывает при $x > (4m)^4$. По (11.8) $K(R) > (4q_2)^4$, если $\frac{\alpha}{2} K[(1-a) R^{\frac{\alpha}{2}}] > (4q_2)^4$. Это опять же будет верно при $R > R'$ для всех

(a_1, a_2) из $\bar{D}$. Пусть $\bar{R}=\max(R', \bar{R})$. Ввиду убывания функции $x^{q_1}e^{-\sqrt[4]{x}}$, на основании (11.8) получим:

$$\frac{R^{q_1}K^{q_1}(R)}{M(R)}=\frac{R^{q_1}}{\sqrt{M(R)}}\cdot\frac{K^{q_1}(R)}{\sqrt{M(R)}}<\frac{R^{q_1}}{\sqrt{M[(1-a)]\,R^{\frac{\alpha}{2}}]}}\cdot\frac{K^{q_1}(R)}{e^{\sqrt[4]{K(R)}}}<$$

$$<\frac{R^{q_1}}{\sqrt{M[(1-a)R^{\frac{\alpha}{2}}]}}\;\frac{\tilde{K}[(1-a)R^{\frac{\alpha}{2}}]^{\frac{\alpha}{2}}}{e^{\sqrt[4]{\tilde{K}[(1-a)R^{\frac{\alpha}{2}}]^{\frac{\alpha}{2}}}}}\underset{R\to\infty}{\to}0. \tag{12.8}$$

Следствие. Для каждой пары чисел $(a_1, a_2)\in\bar{D}$, вообще говоря, исключаемое множество интервалов $E(a_1, a_2)$ (конечной логарифмической меры) различно, но стремление к нулю выражения в (8.8) равномерно в $\bar{D}$, как это следует из (12.8), в следующем смысле: вне $E(a_1, a_2)$ при $R>R_0(\varepsilon)$, где $R_0(\varepsilon)$ от (a_1, a_2) не зависит,

$$0<\frac{R^{q_1}K^{q_1}(R)}{M(R)}<\varepsilon.$$

И еще одно замечание. В цитированной уже работе [3] доказано, что множество логарифмических мер исключаемых множеств $E(a_1, a_2)$ ограничено, так как в фиксированной точке R_0 множество значений $K(R_0, a_1, a_2)$ ограничено в $\bar{D}$.

§ 2. 9. Дифференциальное уравнение $\Phi=0$ мы называем алгебраическим, если функция Φ есть полином относительно всех своих переменных: независимых переменных, искомой функции и ее частных производных. Очевидно, что любое такое уравнение может быть записано в следующем виде:

$$\Phi\left(z_1,\ z_2u,\ z_1\frac{\frac{\partial u}{\partial z_1}}{u},\ z_2\frac{\frac{\partial u}{\partial z_2}}{u},\ \ldots,\ z_1^{i_1}z_2^{i_2}\frac{\frac{\partial^{i_1+i_2}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}}{u}\right)\equiv$$

$$\equiv\sum_{m=0}^{n}\Phi_n\left(z_1,\ z_2,\ z_1\frac{\frac{\partial u}{\partial z_1}}{u},\ z_2\frac{\frac{\partial u}{\partial z_2}}{u},\ \ldots,\ z_1^{i_1}z_2^{i_2}\frac{\frac{\partial^{i_1+i_2}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}}{u}\right)u^m=0. \tag{1.9}$$

Пусть функция $u=u(z_1, z_2)$ есть решение уравнения (1.9) вида,

$$u=z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}f(z_1, z_2), \tag{2.9}$$

где $f(z_1, z_2)$ — целая трансцендентная функция, а λ_1 и λ_2 — постоянные комплексные числа. Пусть, далее, (ζ_1, ζ_2) есть точка максимума функции $|f(z_1, z_2)|$ на гиперповерхности $S(R)$, определенной в п.8. По теореме А вне некоторого множества интервалов E на оси R конечной логарифмической меры справедливы соотношения:

$$\frac{\zeta_1^{j_1}\zeta_2^{j_2}\frac{\partial^{j_1+j_2}u}{\partial z_1^{j_1}\partial z_2^{j_2}}}{u}=(\alpha_1^{j_1}\alpha_2^{j_2}+\varepsilon_{j_1j_2})\,K^{j_1+j_2}, \tag{3.9}$$

где $\varepsilon_{j_1j_2}\to0$ при $R\to\infty$, $\alpha_j=\alpha_j(R)\geqslant0$; $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2=1$. Подставим в уравнение $z_j=\zeta_j$; $j=1, 2$, выразим производные через функцию K и, разделив затем все уравнение на u^n, перейдем к пределу при $R\to\infty$. Точка $(\zeta_1, \zeta_2)\in S(R)$ и поэтому по (6.8) $|\zeta_j|\leqslant(1+a)R^{a_j}$, $j=1, 2$. Так как любая функция Φ_k в (1.9) есть полином по всем своим переменным, то найдутся, как легко видеть, такие постоянные числа C, p_{1k} и p_{2k}, что

$$|\Phi_k| \leqslant C R^{p_{1k}} K^{p_{2k}}.$$

В согласии с (7.8) вне упомянутого выше множества $E = E(a_1, a_2)$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{|\Phi^k|}{|u|^k} = 0.$$

Следовательно, в точке (ζ_1, ζ_2)

$$\Phi_n\left(\zeta_1, \zeta_2, (\alpha_1+\varepsilon_{10})K; (\alpha_2+\varepsilon_{01})K, \ldots, (\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}+\varepsilon_{i_1 i_2})K^{i_1+i_2}\right) = o(1). \quad (4.9)$$

Подставим в полином Φ_n уравнения (1.9) вместо

$$\frac{z_1^{j_1} z_2^{j_2} \dfrac{\partial^{j_1+j_2} u}{\partial z_1^{j_1} \partial z_2^{j_2}}}{u} \quad \text{выражение} \quad t^{j_1+j_2} \frac{z_1^{j_1} z_2^{j_2} \dfrac{\partial^{j_1+j_2} u}{\partial z_1^{j_1} \partial z_2^{j_2}}}{u},$$

после чего разложим полином Φ_n по степеням t. Приравнив t единице, получим разложение полинома Φ_n на сумму однородных дифференциальных полиномов. Теперь можем переписать уравнение (4.9) следующим образом:

$$\Phi_n = \sum_{j=0}^{\nu} \Psi_j = o(1), \quad (5.9)$$

где Ψ_j есть дифференциальный полином степени j.

Предположим теперь, что однородный дифференциальный полином Ψ_ν невырождающийся по $R\{a_1, a_2\}$, а соответствующая однородная форма

$$H(\Psi_\nu) = \sum_{p=0}^{\tilde{\nu}} \tilde{P}_{j_p\, \nu-j_p}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})\, t_1^{j_p} t_2^{\nu-j_p}$$

не обращается в нуль ни при каких действительных φ_1, φ_2 и неотрицательных t_1, t_2 на прямой $a_1 t_1 + a_2 t_2 = 1$, так что имеет место лемма 1.6 для полинома Ψ_ν. Мы имеем:

$$\Psi_\nu\left(\zeta_1 . \zeta_2, (\alpha_1+\varepsilon_{10})K, (\alpha_2+\varepsilon_{01})K, \ldots, (\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}+\varepsilon_{i_1 i_2})K^{i_1+i_2}\right) =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{\nu} P_{j\,\nu-j}(\zeta_1, \zeta_2)\,\alpha_1^{j_1}\alpha_2^{\nu-j} + \sum_{l=0}^{\nu_0} \varepsilon_l Q_l(\zeta_1, \zeta_2)\right] K^\nu, \quad (5.9)$$

причем по определению невырождающегося полинома наивысшие степени отдельно среди полиномов $P_{j\nu-j}(z_1, z_2)$ и отдельно среди полиномов $Q_l(z_1, z_2)$ совпадают по $R\{a_1, a_2\}$ и равны q. В соответствии с леммой 1.6 и п.7

$$|\Psi_\nu| \geqslant R^q\left(b + o(1)\right). \quad (6.9)$$

(b постоянно в области $\overline{D}$, если лемма 1.6 в ней применима.)

10. Рассуждения этого и последующих пунктов в сущности одинаковы, как в случае, когда $(a_1, a_2) \in l_\tau$, так и в том случае, когда (a_1, a_2) принадлежит замкнутой области $\overline{D} \subset (l_\tau, l_{\tau+1})$. Для определенности, имея ввиду некоторую большую общность, мы останавливаемся на случае области. Любой полином Ψ_j в (5.9) нетрудно оценить сверху на гиперповерхности $S(R)$. Пусть полином

$$\Psi_j\Big[(1+\vartheta_1 a)R^{a_1}e^{i\varphi_1},\quad (1+\vartheta_2 a)R^{a_2}e^{i\varphi_2},\quad (\alpha_1+\varepsilon_{10})K,\ \ldots,\ (\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}+\varepsilon_{i_1 i_2})K^{i_1+i_2}\Big]$$

степени $q_j=q_j(a_1,\ a_2)$ по R. По построению полинома Ψ_j он степени j по K. Так как, далее, $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2=1$ и отсюда $\alpha\leqslant\frac{1}{a_1}$; $\alpha_2\leqslant\frac{1}{a_2}$, то в любой замкнутой области $\overline{D}^0$ в плоскости переменных $a_1,\ a_2$, не содержащей точек координатных осей и точек разделительных лучей дифференциального полинома Ψ_j:

$$|\Psi_j|\leqslant C_0R^{q_j}K^j, \tag{1.10}$$

где $C_0>0$ — некоторая постоянная, общая для всех точек из $\overline{D}^0$.

Пусть $\overline{D}$ — замкнутая область в плоскости переменных $a_1,\ a_2$, не содержащей точек координатных осей и точек совокупности всех разделительных лучей дифференциальных полиномов Ψ_j; $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$. В этой замкнутой области $\overline{D}$ числа q_j — следующего вида:

$$q_j=k_ja_1+l_ja_2;\qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu, \tag{2.10}$$

где k_j и l_j — постоянные при всех $j{:}\,j=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu$ и всех точек из $\overline{D}$.

Из (5.9) с помощью (6.9) и (1.10) найдем в $\overline{D}$:

$$K^\nu\leqslant C\sum_{j=0}^{\nu-1}R^{q_j-q}K^j. \tag{3.10}$$

Подобное неравенство мы решили в п.2. Там мы нашли, что

$$K\leqslant BR^\alpha,$$

где B — некоторая постоянная, а

$$\alpha=\max\left(\frac{q_1-q}{\nu-1};\ \frac{q_2-q}{\nu-2};\ \ldots;\ \frac{q_\nu-q}{1}\right).$$

Если $q_j\leqslant q$ для всех j и хотя бы одной пары чисел $(a_1,\ a_2)$, то решений указанного класса уравнение (1.9) не имеет, так как для решений изучаемого типа должно быть $\lim\limits_{R\to\infty}K(R)=\infty$ (см. [3]). Допустим поэтому, что $\alpha>0$. Тогда вне множества интервалов $E(a_1,\ a_2)$, указанного в п.9, верно неравенство

$$K(R)=\frac{RM'(R)}{M(R)}\leqslant BR^\alpha. \tag{4.10}$$

Покажем сейчас, что постоянная B одна и та же при изменении точки $(a_1,\ a_2)$ в названной выше замкнутой области $\overline{D}$. Это вытекает из того факта, доказанного в [3], что

$$|\varepsilon_{i_1 i_2}|<C_{i_1+i_2}\frac{(\ln^{1+\alpha}K)^{i_1+i_2}}{\sqrt{K}},$$

где $C_{i_1+i_2}$ — абсолютные постоянные, а отношение $\frac{(\ln^{1+\alpha}K)^{i_1+i_2}}{\sqrt{K}}$ убывает при достаточно больших значениях K. Тем же путем, как это сделано в п.8, его можно мажорировать функцией, стремящейся равномерно в замкнутой области $\overline{D}$ к нулю при $R\to\infty$.

11. Вернемся теперь к неравенству (4.10). Пусть $R \notin E(a_1, a_2)$ и $\{(R'_j, R''_j)\}$ — последовательность интервалов, составляющая множество $E(a_1, a_2)$. Из (4.10) имеем:

$$\ln M(R) \leqslant \ln M(R_0) + \frac{B}{\alpha} R^{\alpha} + \sum_{j=1}^{m(R)} \int_{R'_j}^{R''_j} \frac{K(t)}{t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \ln M(R_0) + R^{\alpha}\left[\frac{B}{\alpha} + \int_{E(a_1, a_2)} \frac{dt}{t}\right] < \tilde{C} R^{\alpha}, \tag{1.11}$$

где $\tilde{C} > 0$ — некоторая постоянная (если рассматривать значения $\tilde{C}$ в зависимости от изменения точек (a_1, a_2) в замкнутой области $\overline{D}$, то в силу сказанного выше, эта постоянная может быть выбрана одной и той же для всех точек из $\overline{D}$).

Пусть теперь $R \in E(a_1, a_2)$. Тогда, имея в виду, что $K(R)$ — функция возрастающая, получим:

$$\ln M(R) \leqslant \ln M(R_0) + \frac{B}{\alpha} R^{\alpha} + R^{\alpha} \int_{E(a_1, a_2)} \frac{dt}{t} + \int_{R'_{m(R)}}^{R} \frac{K(t)}{t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \ln M(R_0) + R^{\alpha}\left(\frac{B}{\alpha} + \int_{E(a_1, a_2)} \frac{dt}{t}\right) + R''^{\alpha}_{m(R)} \ln \frac{R}{R'_{m(R)}}. \tag{2.11}$$

Из того, что $\int\limits_{E(a_1, a_2)} \frac{dt}{t} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int\limits_{R'_j}^{R''_j} \frac{dt}{t} < \infty$, мы выводим, что $\lim\limits_{\to\infty} \frac{R''_j}{R'_j} = 1$, и поэтому $R''_{m(R)} = \bigl(1 + o(1)\bigr) R$. Отсюда, а также из (1.11) и (2.11) вытекает, что в обоих рассмотренных случаях

$$\ln M(R) < TR^{\alpha}, \tag{3.11}$$

где $T > 0$ — постоянная, которая не зависит от точек замкнутой области $\overline{D}$.

12. В предыдущем п.11 мы видели, что число α в замкнутой области $\overline{D}$ — следующего вида:

$$\alpha = a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2, \tag{1.12}$$

где ρ_1 и ρ_2 — рациональные числа, постоянные в $\overline{D}$. Попрежнему, если максимум функции $|f(z_1, z_2)|$ $\bigl($см. представление (2.9) решения$\bigr)$ достигается на гиперповерхности $S(R)$ в точке (ζ_1, ζ_2), то $|\xi_j| = R^{a_j}(1 + \eta_j a)$ и $\bigl($см. (6.8)$\bigr)$

$$\ln M(R) = \ln M(R, a_1, a_2) = \ln M\Bigl[(1 + \eta_1 a) R^{a_1}, (1 + \eta_2 a) R^{a_2}\Bigr]. \tag{2.12}$$

Из (3.11) и (1.12) мы теперь получаем, что

$$\ln M\Bigl[(1 - a) R^{a_1}, \quad (1 - a) R^{a_2}\Bigr] < TR^{a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2}. \tag{3.12}$$

Пусть a_1 и R — постоянные числа. Положим $r_1 = (1 - a) R^{a_1}$. Тогда

$$\ln M[r_1, (1 - a) R^{a_2}] < \frac{Tr_1^{\rho_1}}{(1 - a)^{\rho_1 + \rho_2}} (1 - a) R^{a_2}]^{\rho_2}. \tag{4.12}$$

Неравенство (4.12), как было показано, имеет место при постоянном R, но переменном a_2, если только при этом все время $(a_1, a_2) \in \overline{D}$. Положив $r_2 = (1 - a) R^{a_2}$, мы находим:

$$\ln M(r_1, r_2) < \frac{T}{(1 - a)^{\rho_1 + \rho_2}} r_1^{\rho_1} r_2^{\rho_2} = \tilde{T} r_1^{\rho_1} r_2^{\rho_2}. \tag{5.12}$$

Отметим еще раз, что неравенство (5.12) имеет место, когда $(a_1, a_2) \in \overline{D}$. Последнее означает, что неравенство (5.12) имеет место в области, которую впредь будем именовать параболической, ограниченной параболами

$$r_1 = r_2^{\beta}, \quad r_1 = r_2^{\overline{\beta}}, \quad \text{где} \quad \beta = \min_{\overline{D}} \left(\frac{a_1}{a_2}\right) \quad \text{и} \quad \overline{\beta} = \max_{\overline{D}} \left(\frac{a_1}{a_2}\right).$$

Итак, мы пришли к следующему заключению: максимум модуля целого трансцендентного множителя $f(z_1, z_2)$ решения вида (2.9) уравнения (1.9) мажорируется в соответствующей параболической области функцией правой части неравенства (5.12).

Мы не будем формулировать полученные выводы в виде предложений. Приведем только схему проведенных вычислений.

1. Данное алгебраическое дифференциальное уравнение проводится к виду (1.9) и коэффициент при старшем члене Φ_n разлагается на сумму однородных дифференциальных полиномов (см. (5.9)).

2. Для полинома наивысшей однородности Ψ_ν в разложении, указанном в п.1 приводимой схемы, строятся разделительные прямые и проверяется невырождаемость полинома Ψ_ν по $R\{a_1, a_2\}$, как в углах между разделительными прямыми, так и на них.

3. Далее изучается полином Ψ_ν в тех углах между разделительными прямыми или на тех разделительных прямых, где полином Ψ_ν — невырождающийся. На этих множествах исследуется вопрос о необращении однородной формы $H(\Psi_\nu)$ в нуль, соответствующей дифференциальному полиному Ψ_ν, на прямой $a_1 t_1 + a_2 t_2 = 1$ при $t_1, t_2 \geqslant 0$. Дальнейшие выкладки проводятся только на тех множествах, где однородная форма не обращается в нуль.

4. На выделенных выше множествах мы применяем теорему A, с помощью которой выражаются частные производные в уравнении (1.9) через функцию $K = K(R)$. Это приводит к алгебраическому неравенству для определения функции K. Если выделенное на этапе 3 нашей схемы множество есть замкнутая область, не содержащая точек координатных осей плоскости (a_1, a_2) и точек совокупности всех разделительных прямых однородных дифференциальных полиномов Ψ_j; $j = 0, 1, \ldots, \nu$ в разложении, указанном в п.1 нашей схемы, то из найденного сейчас неравенства мы выводим оценку для максимума модуля однозначного множителя любого решения вида (2.9) в соответствующей параболической области.

К п.3 нашей приведенной вычислительной схемы следует сделать существенное замечание. В дифференциальном уравнении (1.9) произведем замену $z_j = A_j z_j'$, $j = 1, 2$, где A_j — постоянные. Если решение $u = u(z_1, z_2)$ уравнения (1.9) вида (2.9), то такого же вида будет также функция $u(A_1 z_1', A_2 z_2')$. При этом имеем тождество:

$$\Psi_\nu\left(z_1, z_2, \frac{z_1 \dfrac{\partial u}{\partial z_1}}{u}, \frac{z_2 \dfrac{\partial u}{\partial z_2}}{u}, \ldots, \frac{z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dfrac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}}{u}\right) \equiv$$

$$\equiv \Psi_\nu\left(A_1 z_1', A_2 z_2', \frac{z_1' \dfrac{\partial u}{\partial z_1'}}{u}, \frac{z_2' \dfrac{\partial u}{\partial z_2'}}{u}, \ldots, \frac{z_1'^{i_1} z_2'^{i_2} \dfrac{\partial^{i_1+i_2} u}{z_1'^{i_1} z_2'^{i_2}}}{u}\right).$$

Однородная форма, соответствующая однородному дифференциальному полиному Ψ_ν, сейчас принимает следующий вид (см. п.9):

$$\tilde{H}(\Psi_\nu)=\sum_{p=0}^{\nu} P_{j_p\,\nu-j_p}(A_1 e^{i\varphi_1},\ A_2 e^{i\varphi_2})\, t_1^{j_p} t_2^{\nu-j_p}.$$

Для возможности проведения вычислений, указанных в п.4 нашей вычислительной схемы, достаточно потребовать, чтобы существовали такие постоянные числа A_1 и A_2, для которых форма $\tilde{H}(\Psi_\nu)$ не обращалась в нуль ни при каких действительных φ_1, φ_2 и неотрицательных t_1, t_2 на прямой $a_1 t_1+a_2 t_2=1$.

13. Примеры. Рассмотрим уравнение

$$\Phi=\Phi_2=P(z_1,\ z_2)\,z_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}+Q(z_1,\ z_2)\left(z_1\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)^2+$$
$$+R(z_1,\ z_2)\left(z_2\frac{\partial u}{\partial z_2}\right)^2=g(z_1,\ z_2)\,u^2. \tag{1.13}$$

1. $P(z_1,\ z_2)=-Q(z_1,\ z_2)$; $R(z_1,\ z_2)=0$.

В этом случае $G(\Phi)=0$ (см. п.4) и полином Φ — вырождающийся при любых a_1 и a_2.

2. $P(z_1,\ z_2)=z_1^2+z_2$; $Q(z_1,\ z_2)=-z_1^2+z_2$; $R(z_1,\ z_2)=z_2$.

$$G(\Phi)=2z_2 t_1^2+z_2 t_2^2=z_2(2t_1^2+t_2^2).$$

При $2a_1>a_2$ полином Φ — вырождающийся. Если $2a_1\leqslant a_2$, то полином Φ — невырождающийся и однородная форма

$$H(\Phi)=e^{2i\varphi_2}(2t_1^2+t_2^2)\neq 0 \tag{2.13}$$

ни при каких действительных φ_1, φ_2 и неотрицательных t_1, t_2 на прямой $a_1 t_1+a_2 t_2=1$. Пусть $g(z_1,\ z_2)=z_1^p z_2^{q+1}$, p, q — целые числа. Тогда (см. п.12) из (1.13) и (2.13)

$$K^2\leqslant CR^{pa_1+qa_2}$$

и

$$\ln M(r_1,\ r_2)<\tilde{T} r_1^{\frac{p}{2}} r_2^{\frac{q}{2}}$$

при $r_1^\varepsilon<r_2<r_1^2$, где $\varepsilon>0$ — произвольно малое число.

3. $P(z_1,\ z_2)=z_1^2+z_2$; $Q(z_1,\ z_2)=-z_1^2+z_2$; $R(z_1\ z_2)=-z_2$.

Как и прежде, при $2a_1>a_2$ полином Φ вырождающийся при $2a_1\leqslant a_2$ полином Φ невырождающийся и

$$H(\Phi)=e^{2i\varphi_2}(2t_1^2-t_2^2).$$

Полином $H(\Phi)=0$ при $t_2=\sqrt{2}\,t_1$, $a_1 t_1+a_2 t_2=1$. Дальнейшее вычисление по приведенной в предыдущем пункте схеме невозможно.

4. $P(z_1,\ z_2)=z_1^5+z_2^3$; $Q(z_1,\ z_2)=z_1^2 z_2^2=R(z_1,\ z_2)=2z_1^5+3z_1^2 z_2^2+4z_2^3$.

Разделительными являются прямые:

$$l_1: 3a_1=2a_2;\quad l_2: 5a_1=3a_2;\quad l_3: 2a_1=a_2.$$

I. $a_1>\frac{2}{3}a_2$

$$H(\Phi)=e^{5i\varphi_1}(t_1^2+2t_2^2)\neq 0.$$

II. $a_1<\frac{2}{3}a_2<\frac{4}{3}a_1$

$$H(\Phi)=e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)}(t_1^2+3t_2^2)\neq 0.$$

III, $a_2 > 2a_1$

$$H(\Phi) = e^{3i\varphi_2}(t_1^2 + 4t_2^2) \neq 0.$$

Пусть $g(z_1, z_2) = z_1^6 z_2^6$. Тогда получаем:

$$\ln M(r_1, r_2) < \begin{cases} \tilde{T}_1 r_1^{\frac{1}{2}} r_2^2; & r^\varepsilon < r_2 < r_1^{\frac{3}{2}}; \\ \tilde{T}_2 r_1^2 r_2^2; & r_1^{\frac{3}{2}} < r_2 < r_1^2; \\ \tilde{T}_3 r_1^3 r_2^{\frac{3}{2}}; & r_1^2 < r_2 < r_1^{\frac{1}{\varepsilon}}, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число.

Заметим, что если $g(z_1, z_2) = z_1^p z_2^q$, где $p < 5$ или $q < 3$, то уравнение (1.13) в обсуждаемом случае вообще не имеет решений вида (2.9). Действительно, ~~при~~ $p < 5$ и $a_1 > \frac{2}{3} a_2$ из (1.13) мы имели бы

$$K^2(R) < TR^{(p-5)a_1 + qa_2}$$

и

$$(p-5)a_1 + qa_2 > -a_1 + qa_2.$$

При $a_1 \geqslant qa_2$ выражение $(p-5)a_1 + qa_2 \leqslant 0$ и $K(R)$ оказывается ограниченной функцией, что для функций изучаемого нами класса невозможно. Аналогично можно рассмотреть и случай $q < 3$.

14. Вычисления, подобные проведенным выше в этом параграфе, можно осуществить и в случае вырождающегося дифференциального полинома Φ_n по $R\{a_1, a_2\}$ (сохраняя условия о необращении в нуль соответствующей однородной формы полинома Ψ_ν).

Пусть в выражении (5.9) наивысшая из степеней функций $P_{j\nu-j}(z_1, z_2)$ на гиперповерхности $S(R)$ при данных a_1 и a_2 равна q, а функций $Q_l(z_1, z_2)$ равна p, причем $p > q$. Тогда на основании (5.10) из (7.9) найдем:

$$|\Psi_\nu| \geqslant \left(bR^q - \frac{C'R^p}{K^{\frac{1}{2}+o(1)}}\right) K^\nu,$$

где $b > 0$ и $C' > 0$ — постоянные. Как и в п.10 найдем из (5.9) неравенство:

$$K^\nu < C_0\left(R^{p-q} K^{\nu - \frac{1}{2} + o(1)} + \sum_{j=0}^{\nu-1} R^{q_j - q} K^j\right).$$

Дальнейшие рассуждения не отличаются ничем существенным от проведенных в п.12.

15. Предположим теперь, что при данных a_1 и a_2 каждый из дифференциальных полиномов в уравнении (5.9) удовлетворяет условиям леммы 1.6. По этой лемме при $R > R_0$, где R_0 достаточно велико, мы получаем следующее выражение:

$$\Psi_j = N_j R^{q_j} K^j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \nu, \tag{1.15}$$

где $0 < b' < |N_j| < b'' < \infty$, b' и b'' — постоянные, которые от R не зависят. С помощью тех же рассуждений, как и в п.п.10, 11 и 12, мы получим уравнение для определения функции $K(R)$:

$$N_0 K^\nu + \sum_{j=0}^{\nu-1} N_j R^{q_j - q} K^j = 0. \tag{2.15}$$

Такого типа уравнение мы решили в п.1. По доказанному там уравнение имеет конечное число решений K_i; $i=1, \ldots, l$, удовлетворяющих следующим неравенствам при $R>R_0$:

$$B'' R^{\alpha_i} < K_i(R) < B' R^{\alpha_i}; \qquad i=1, 2, \ldots, l, \tag{3.15}$$

где $B'>0$ и $B''>0$ — постоянные. Так как функция $K(R)$ возрастая, стремится к бесконечности при $R\to\infty$, то определенное решение уравнения (2.15) удовлетворяет при $R>\overline{R}$ только одному из неравенств (3.15).

Если в замкнутой области $\overline{D}$, не содержащей точек осей координат плоскости (a_1, a_2) и точек совокупности всех разделительных прямых однородных полиномов Ψ_j; $j=0, 1, \ldots, \nu$, справедлива лемма 1.6 для всех $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_\nu$, то из неравенства (3.15) тем же путем, как и в п.11, найдем оценку для максимума модуля целого трансцендентного множителя решения вида (2.9) уравнения (1.9), верную в соответствующей параболической области:

$$\tilde{B}'' r_1^{\rho_j'} r_2^{\rho_\rho''} < \ln M(r_1, r_2) < \tilde{B}' r_1^{\rho_j'} r_2^{\rho_j'}; \qquad j=1, 2, \ldots, l,$$

где $\tilde{B}'$ и $\tilde{B}''$ — постоянные.

16. Наиболее просто все изложенное выглядит в случае линейных уравнений:

$$\Phi=\sum_{s=0}^{\nu}\Psi_\nu=\sum_{s=0}^{\nu}\sum_{i_1+i_2=s}P_{i_1 i_2}(z_1, z_2)\, z_1^{i_1} z_2^{i_2}\frac{\partial^{i_1+i_2}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=Q(z_1, z_2) \tag{1.16}$$

и уравнений первого порядка

$$\Phi=\sum_{s=0}^{\nu}\Psi_\nu=\sum_{s=0}^{\nu}\sum_{i_1+i_2=s}P_{i_1 i_2}(z_1, z_2)\left(z_1\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)^{i_1}\left(z_2\frac{\partial u}{\partial z_2}\right)^{i_2}=Q(z_1, z_2), \tag{2.16}$$

где $P_{i_1 i_2}(z_1, z_2)$ и $Q(z_1, z_2)$ — полиномы от своих переменных.

В обоих этих случаях при любых a_1 и a_2 однородные дифференциальные полиномы невырождающиеся.

Сейчас сформулируем одно предложение, имея в виду его особую простоту. Пусть в уравнении (1.16) $\big($или (2.16)$\big)$

$$P_{i_1 i_2}(z_1, z_2)\equiv a_{i_1 i_2} Q_{i_1+i_2}(z_1, z_2),$$

где $a_{i_1 i_2}$ — постоянные при всех i_1 и i_2. Уравнения (1.16) и (2.16) принимают теперь следующие виды:

$$\sum_{s=0}^{\nu} Q_s(z_1, z_2)\sum_{i_1+i_2=s} a_{i_1 i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2}\frac{\partial^{i_1+i_2}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=Q(z_1, z_2) \tag{3.16}$$

и

$$\sum_{s=0}^{\nu} Q_s(z_1, z_2)\sum_{i_1+i_2=s} a_{i_1 i_2}\left(z_1\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)^{i_1}\left(z_2\frac{\partial u}{\partial z_2}\right)^{i_2}=Q(z_1, z_2). \tag{4.16}$$

В этих условиях верно следующее:

если однородная форма

$$H_\nu=\sum_{i_1+i_2=\nu} a_{i_1 i_2} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \tag{5.16}$$

не обращается в нуль при неотрицательных t_1, t_2 с $a_1t_1+a_2t_2=1$, то в точках максимума модуля целого трансцендентного множителя любого решения вида (2.9) уравнения (3.16) $\big($или (4.16)$\big)$ в любой замкнутой области, не содержащей точек координатных осей плоскости (a_1, a_2) и точек совокупности всех разделительных прямых всех полиномов $Q_s(z_1, z_2)$, функция $K(R)=\frac{RM'(R)}{M(R)}$ удовлетворяет неравенству

$$K^{\nu}(R)<C\sum_{j=0}^{\nu=1} R^{q_j-q_\nu}K^j(R), \tag{6.16}$$

где q_j — степень полинома $Q_j(R^{a_1}, R^{a_2})$ по R в $\overline{D}$;

если все формы

$$H_j=\sum_{i_1+i_2=j} a_{i_1i_2}t_1^{i_1}t_2^{i_2} \tag{7.16}$$

не обращаются в нуль при неотрицательных t_1, t_2 на прямой $a_1t_1+a_2t_2=1$, то в области $\overline{D}$, указанной выше, для определения функции $K(R)$, приходим к уравнению

$$N_\nu K^\nu+\sum_{j=0}^{\nu-1} N_jR^{q_j-q_\nu}K^j=0,$$

где q_j — степени полиномов $Q_j(R^{a_1}, R^{a_2})$ в области $\overline{D}$ по R соответственно, а функции N_j удовлетворяют неравенствам

$$0<B''<|N_j|<B'<\infty,$$

где B' и B'' — постоянные, которые от R не зависят при $R>R_0$.

Приведенное утверждение легко доказывается по приведенному в предыдущих пунктах образцу и основано на следующей лемме.

Лемма 1.17. *Пусть дана конечная система полиномов $Q_j(z_1, z_2)$, $j=1$, 2, ..., n. Можно найти такие постоянные A_1 и A_2, что на гиперповерхности $S(R)$, определенной в* п.8, *при значениях (a_1, a_2); $a_j>0$; $j=1$, 2 из замкнутой области $\overline{D}$, не содержащей внутренних точек, лежащих на координатных осях и разделительных лучах всех полиномов $Q_j(z_1, z_2)$; $j=1$, 2, ..., n, справедливы соотношения:*

$$Q_j(z_1, z_2)=B_jR^{p_j},$$

где $p_j=k_ja_1+l_ja_2$, $j=1$, 2, ..., n, причем k_j и l_j постоянны при любом j во всей замкнутой области $\overline{D}$;

$$0<B''<|B_j|<B'<\infty;\quad B'=\mathrm{const},\quad B''=\mathrm{const}.$$

Доказательство. Каждый полином $Q_j(z_1, z_2)$ можно представить следующим образом:

$$Q_j(z_1, z_2)=\sum_{s=0}^{n_j} P_s^j(z_1)z_2^s. \tag{8.16}$$

На гиперповерхности $S(R)$ имеем при постоянных a_1 и a_2:

$$|Q_j(A_1z_1, A_2z_2)|\leqslant\sum_{s=0}^{n_j}\left|P_s^j\big(A_1(1+\vartheta_1 a)e^{i\varphi_1}R^{a_1}\big)\right|(1+\vartheta_2 a)^s|A_2|^sR^{a_2s}.$$

Пусть $P_j^s(z_1)$ — степени n_{sj} по z_1. Тогда

$$\left|P_s^j\left((1+\vartheta_1 a) A_1 e^{i\varphi_1} R^{a_1}\right)\right| \leqslant C' R^{a_1 n_{sj}}; \qquad 0 < C' = \text{const}$$

и

$$|Q_j(A_1 z_1, \ A_2 z_2)| \leqslant C' \sum_{s=0}^{n_j} R^{n_{sj} a_1 + a_2} \leqslant C R^{p_j}, \tag{9.16}$$

где

$$p_j = \max_s (a_1 n_{sj} + a_2 s) = a_1 n_{s_j j} + a_2 s_j.$$

Заметим, что в области $\overline{D}$, определенной в условиях леммы, числа $n_{s_j j}$, s_j зависят от соответствующей области, но не от отдельных ее точек. Далее,

$$Q_j\left((1+\vartheta_1 a) A_1 e^{i\varphi_1} R^{a_1}, \quad (1+\vartheta_2 a) A_2 e^{i\varphi_2} R^{a_2}\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n_j} P_s^j\left((1+\vartheta_1 a) A_1 e^{i\varphi_1} R^{a_1}\right) \quad (1+\vartheta_2 a)^s A_2^s e^{is\varphi_2} R^{sa_2} =$$

$$= \sum_{j_1, j_2} (1+\vartheta_1 a)^{j_1} (1+\vartheta_2 a)^{j_2} e^{i(j_1\varphi_1 + j_2\varphi_2)} a_{j_1 j_2} A_1^{j_1} A_2^{j_2} R^{a_1 j_1 + a_2 j_2}. \tag{10.16}$$

В замкнутой области $\overline{D}$, по ее построению, в сумме (10.16) равные показатели появляются только на разделительных прямых. Пусть

$$p_j = \max_{j_1, j_2} (a_1 j_1 + a_2 j_2).$$

Тогда

$$|Q_j(A_1 z_1, \ A_2 z_2)| \geqslant R^{p_j}\left\{\left| \sum_{j_1 a_1 + j_2 a_2 = p_j} (1+\vartheta_1 a)^{j_1} (1+\vartheta_2 a)^{j_2} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times a_{j_1 j_2} e^{i(j_1\varphi_1 + j_2\varphi_2)} \right| + O\left(\frac{1}{R^\sigma}\right)\right\}, \tag{11.16}$$

где σ — достаточно малое число. Выражение

$$\sigma_1 = \sum_{j_1 a_1 + j_2 a_2 = p_j} (1+\vartheta_1 a)^{j_1} (1+\vartheta_2 a)^{j_2} a_{j_1 j_2} e^{i(j_1\varphi_1 + j_2\varphi_2)} A_1^{j_1} A_2^{j_2}$$

есть полином относительно A_1 и A_2, который оценивается следующим образом:

$$|\sigma_1| = \left| \sum_{j_1=0}^{k} \left(\sum_{j_2=0}^{l} (1+\vartheta_1 a)^{j_1} (1+\vartheta_2 a)^{j_2} a_{j_1 j_2} e^{i(j_1\varphi_1 + j_2\varphi_2)} A_2^{j_2} \right) A_1^{j_1} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \sum_{j_2=0}^{l} (1+\vartheta_1 a)^{j_1} (1+\vartheta_2 a)^{k} a_{kj_2} e^{i(k\varphi_1 + j_2\varphi_2)} A_2^{j_2} \right| |A_2^k| -$$

$$- \sum_{j_1=0}^{k-1} \left| \sum_{j_2=0}^{l} (1+\vartheta_1 a)^{j_1} (1+\vartheta_2 a)^{j_2} a_{j_1 j_2} e^{i(j_1\varphi_1 + j_2\varphi_2)} A_2^{j_2} \right| |A_1^{j_1}|. \tag{12.16}$$

Но так как

$$\sigma_2 = \left| \sum_{j_2=0}^{l} (1+\vartheta_1 a)^k (1+\vartheta_2 a)^{j_2} e^{i(k_1\varphi_1 + j_2\varphi_2)} a_{kj_2} A_2^{j_2} \right| \geqslant$$

$$\geqslant |A_2|^l |a_{kl}| (1-a)^{k+l} - \sum_{j_2=0}^{l-1} (1+a)^{k+j_2} |a_{kj_2}| |A_2|^{j_2},$$

то, обозначив $\gamma = \max\limits_{j_1, j_2} |a_{j_1 j_2}|$, найдем:

$$\sigma_2 > |A_2|^l |a_{kl}| (1-a)^{k+l} - \gamma (1+a)^{k+l-1} \sum_{j_2=0}^{l-1} |A_2|^{j_2}. \qquad (13.16)$$

Очевидно, можно найти настолько большое число $|A_1|$, что $\sigma_2 > b_2$, где $b_2 > 0$ — постоянная. Тогда из (12.16) вытекает, что

$$|\sigma_1| > b_2 |A_1|^k - \gamma (1+a)^{k+l-1} l |A_2|^l \sum_{j_1=0}^{k-1} |A_1|^{j_1}.$$

Легко видеть, что если выбрать $|A_1|$ достаточно большим, будет $|\sigma_1| > b_1$, где $b_1 > 0$ — постоянная.

Возвращаясь к неравенству (11.16), легко выводим:

$$|Q_j(A_1 z_1, A_2 z_2)| > R^{p_j}\left(b_1 + o(1)\right). \qquad (14.16)$$

Неравенства (13.16) и (14.16) совместно доказывают справедливость леммы, так как $|A_2|$ и в зависимости от него $|A_1|$ можно взять сколь угодно большими, сохраняя при этом все время неравенство (14.16).

Пример. Уравнение

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} = (z^5 + z^2 w^2 + w^3)\, u$$

удовлетворяет всем условиям, изложенным в последнем пункте. Заметим между прочим, что в работе [4] показано, что это уравнение имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида (2.9). Нетрудно вычислить, что

$$K^2(R) = \begin{cases} T_1 R^{5a_1}, & a_1 \geqslant \frac{2}{3} a_2; \\ T_2 R^{2(a_1+a_2)}, & a_1 < \frac{2}{3} a_2 \leqslant \frac{4}{3} a_1; \\ T_3 R^{3a_2}, & a_2 > 2a_1; \quad 0 < |T_j| < \infty, \end{cases}$$

а отсюда, что

$$\ln M(r_1, r_2) = \begin{cases} C_1 r^{\frac{5}{2}}; & r \geqslant \rho^{\frac{2}{3}} \geqslant r^{\varepsilon}; \\ C_2 r\rho; & r < \rho^{\frac{2}{3}} \leqslant r^2; \\ C_3 \rho^{\frac{3}{2}}; & r^2 < \rho \leqslant r^{\frac{1}{\varepsilon}}, \end{cases}$$

где $|z| = r$; $|w| = \rho$, $0 < C' < |C_j| < C'' < \infty$, C' и C'' — постоянные, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
2.II.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелиц Ш. И. О росте целых решений дифференциальных уравнений в частных производных, Мат. сб., **61**, (103): 2, 1963, 257–271.
2. Стрелиц Ш. И. Некоторые вопросы роста и существования целых трансцендентных решений уравнений в частных производных, Лит. мат. сб., **II**, № 1, 1962, 167–178.

3. Стрелиц Ш. И. Поведение целой трансцендентной функции многих комплексных переменных при больших значениях ее модуля, Лит. Мат. сб., IV, № 3, 1964, 65–116.
4. Стрелиц Ш. И. Аналог теоремы Фукса для решений линейных уравнений в частных производных, Мат. сб., **60**, (102): 2, 1963, 121–130.

DALINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SVEIKŲ TRANSCENDENTINIŲ SPRENDINIŲ AUGIMO KLAUSIMU

Š. STRELICAS

(Reziumė)

Parodoma, kad visiems diferencialinės lygties

$$P\left(z_1, z_2, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}\right)=0,$$

kur P – polinomas visų kintamųjų atžvilgiu, patenkinančias tam tikras, nurodomas darbe, sąlygas, sveikiems sprendiniams galima efektyviai sukonstruoti mažorantą. Pavyzdžiui, tai visuomet galima atlikti diferencialinės lygties

$$\sum_{i_1+i_2=\nu} a_{i_1 i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} + \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{i_1+i_2=\nu-1} Q_{i_1 i_2}(z_1, z_2) z_1^{i_1} z_2^{i_2} \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} = 0,$$

kur $Q_{i_1 i_2}$ – polinomai ir $a_{i_1 i_2}$ = const, atveju, jeigu homogeninė forma

$$\sum_{i_1+i_2=\nu} a_{i_1 i_2} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2}$$

nevirsta nuliu, kai $\alpha_j \geqslant 0$ ir $\alpha_1+\alpha_2=1$.

ZUR FRAGE DES ANWACHSENS VON GANZEN TRANSZENDENTEN LÖSUNGEN PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

S. STRELITS

(Zusammenfassung)

Wir beweisen, dass man bei geeigneten Bedingungen eine Majorante für alle ganze transzendente Lösungen der Differentialgleichung

$$P\left(z_1, z_2, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}\right)=0,$$

wo P eine Polynome ist, effektiv aufbaunen kann. So ist es zum Beispiel immer möglich eine Majorante im Falle der Gleichung

$$\sum_{i_1+i_2=\nu} a_{i_1 i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} + \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{i_1+i_2=j} Q_{j_1 j_2}(z_1, z_2) z_1^{i_1} z_2^{i_2} \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} = 0,$$

wo $Q_{i_1 i_2}$—Polynome und $a_{i_1 i_2} \equiv$ const sind, wenn die homogene Form

$$\sum_{i_1+i_2=\nu} a_{i_1 i_2} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2}$$

bei $\alpha_j \geqslant 0$; $\alpha_1+\alpha_2=1$ keine Nullstelle hat, aufzubauen.