IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1964

ОДНА ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ

П. СУРВИЛА

Пусть

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

последовательность независимых случайных величин, имеющих плотности распределения $p_k(x)$, конечные дисперсии $D\xi_k=\sigma_k^2$ и $M\xi_k=0$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$

Обозначения:

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2, \qquad \bar{S}_n=B_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k,$$

$f_k(t)$ и $\bar{f}_n(t)$ – характеристические функции ξ_k и $\bar{S}_n$ соответственно. Плотность нормированной суммы $\bar{S}_n$ будем обозначать через $\bar{p}_n(x)$, $\varphi(x)$ – обозначает $(0,\ 1)$ – нормальную плотность. C_1 и C_2 – константы, A – константа, не всегда одна и та же.

Пусть для этой последовательности имеет место центральная предельная теорема, иначе говоря, пусть

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\tau B_n} x^2 p_k(x)\,dx\to 0, \quad \text{когда} \quad n\to\infty, \tag{2}$$

для любого $\tau>0$.

На вопрос, какие условия надо прибавить в этом случае, чтобы имела место и локальная предельная теорема для $\bar{p}_n(x)$, в частности дает ответ работа [2]. В ней доказано, что таким достаточным условием является следующее условие:

$$\sup_x p_k(x)\cdot\sigma_k\leqslant M<\infty, \quad \text{для} \quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{3}$$

В настоящей заметке доказывается одна простая локальная теорема для плотностей, в которой не требуется выполнения условия (3), но, как станет ясно из доказательства теоремы, оно в условиях теоремы выполняется для некоторой подпоследовательности последовательности (1).

Теорема. *Если для последовательности* (1):

1) *выполняется условие Линдеберга* (2);

2) $B_n^2<C_1 n$;

3) *все плотности* $p_k(x)$ *равномерно ограничены, т. е.* $p_k(x)\leqslant C_2$ *для* $k=1,\ 2,\ \ldots$; *то равнотерно относительно* x

$$(1+x^2)\,|\bar{p}_n(x)-\varphi(x)|\to 0, \quad \textit{когда} \quad n\to\infty.$$

Доказательство. Очевидно, $\bar{p}_n(x)$ существует. Используя условие третье и известные факты из теории функций, интегрируемых с квадратом, а также соотношение (см. [3])

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [p(x)]^2\,dx,$$

получаем, что $|f_{l_1}(t)|\cdot|f_{l_2}(t)|$ является функцией интегрируемой. Поэтому уже при $n \geqslant 2$ будет верно неравенство

$$2\pi \left| \bar{p}_n(x) - \varphi(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| \bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt = I.$$

Сначала докажем, что равномерно относительно x

$$\left| \bar{p}_n(x) - \varphi(x) \right| \to 0, \quad \text{когда} \quad n \to \infty.$$

Для этого достаточно доказать, что $I \to 0$, когда $n \to \infty$. Пусть

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{B_n^2}{n}.$$

Для интеграла I легко получаем следующее неравенство

$$I \leqslant I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{|t|<A} \left| \bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt, \qquad I_2 = \int_{|t| \geqslant A} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

$$I_3 = \int_{A \leqslant |t| < \frac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}} |\bar{f}_n(t)|\,dt, \qquad I_4 = \int_{|t| \geqslant \frac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}} |\bar{f}_n(t)|\,dt.$$

Из первого условия теоремы следует, что для любого конечного A

$$I_1 \to 0, \quad \text{когда} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$, можно найти $A = A(\varepsilon)$ такое, чтобы

$$I_2 < \varepsilon, \quad \text{лишь только} \quad A \geqslant A(\varepsilon). \tag{5}$$

Далее воспользуемся следующей леммой (см. [2]).

Пусть случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ имеет плотность $p(x)$ не превосходящую C и дисперсию σ^2, тогда имеют место следующие оценки:

$$|f(t)| \leqslant \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{\alpha_1}{\sigma^2 C^2}\right\}, & \textit{когда} \quad |t| \geqslant \dfrac{\pi}{\sigma}, \\ \exp\left\{-\dfrac{\alpha_2 t^2}{C^2}\right\}, & \textit{когда} \quad |t| < \dfrac{\pi}{\sigma}, \end{cases}$$

где α_1 и α_2 — абсолютные положительные константы.

Согласно этой лемме имеем

$$\left| f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \right| \leqslant \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{\alpha_1}{\sigma_k^2 C_2^2}\right\}, & \text{когда} \quad |t| \geqslant \dfrac{\pi B_n}{\sigma_k}, \\ \exp\left\{-\dfrac{\alpha_2 t^2}{C_2^2 B_n^2}\right\}, & \text{когда} \quad |t| < \dfrac{\pi B_n}{\sigma_k}, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначив через

$$\tilde{\alpha}_1 = \min\left\{ \frac{\alpha_1}{2}, \quad \frac{\alpha_2 \pi^2}{2} \right\},$$

получаем следующие неравенства:

$$\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{\tilde{\alpha}_1}{C_2^2\tilde{\sigma}^2}\right\}, & \text{когда} \quad |t| \geqslant \dfrac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}, \\ \exp\left\{-\dfrac{\alpha_2 t^2}{C_2^2 B_n^2}\right\}, & \text{когда} \quad |t| < \dfrac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}, \end{cases} \tag{6}$$

для тех k, $(k \leqslant n)$, для которых $\sigma_k^2 \leqslant 2\tilde{\sigma}^2$.

Пусть число таких k равно ν. Тогда, согласно определению $\tilde{\sigma}$, имеем что

$$n\tilde{\sigma}^2 = B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \geqslant 2\tilde{\sigma}^2 (n-\nu),$$

и

$$\nu \geqslant \frac{n}{2}. \tag{7}$$

Следовательно, для модуля характеристической функции нормированной суммы будут верны следующие оценки:

$$|\bar{f}_n(t)| \leqslant \begin{cases} \left|f_{l_1}\left(\dfrac{t}{B_n}\right) f_{l_2}\left(\dfrac{t}{B_n}\right)\right| \exp\left\{-\dfrac{\tilde{\alpha}_1 n}{2\tilde{\sigma}^2 C_2^2}\right\}, & \text{когда} \quad |t| \geqslant \dfrac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}, \\ \exp\left\{-\dfrac{\alpha_2 n}{2C_2^2 B_n^2} t^2\right\}, & \text{когда} \quad |t| < \dfrac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Но, согласно условию второму, имеем:

$$\frac{n}{B_n^2} \geqslant \frac{n}{C_1 n} = \frac{1}{C_1},$$

и $\tilde{\sigma}^2 \leqslant C_1$, а, следовательно, и

$$\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\sigma}^2} \geqslant \frac{\tilde{\alpha}_1}{C_1} > 0.$$

Итак, обозначив через

$$\alpha = \frac{\tilde{\alpha}_1}{2C_1}, \quad \beta = \frac{\alpha_2}{2C_2^2 C_1},$$

получаем оценки:

$$|\bar{f}_n(t)| \leqslant \begin{cases} \left|f_{l_1}\left(\dfrac{t}{B_n}\right) f_{l_2}\left(\dfrac{t}{B_n}\right)\right| \exp\{-\alpha n\}, & \text{когда} \quad |t| \geqslant \dfrac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}, \\ \exp\{-\beta t^2\}, & \text{когда} \quad |t| < \dfrac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Используя эти оценки, легко получаем, что

$$I_4 \to 0, \quad \text{когда} \quad n \to \infty, \tag{8}$$

а для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $A = A(\varepsilon)$, что

$$I_3 < \varepsilon, \quad \text{лишь только} \quad A \geqslant A(\varepsilon). \tag{9}$$

Из соотношений (4), (5), (8), (9) следует, что

$$I \to 0, \quad \text{когда} \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Теперь докажем, что равномерно относительно x

$$x^2 \left|\bar{p}_n(x) - \varphi(x)\right| \to 0, \quad \text{когда} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Продифференцировав два раза соотношение

$$\bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\left[\bar{p}_n(x) - \varphi(x)\right] dx,$$

получаем

$$\bar{f}_n''(t)-(e^{-\frac{t^2}{2}})''=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\Big[-x^2\big(\bar{p}_n(x)-\varphi(x)\big)\Big]dx.$$

Отсюда формально имеем неравенство:

$$2\pi x^2\left|\bar{p}_n(x)-\varphi(x)\right|\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left|\bar{f}_n''(t)-(e^{-\frac{t^2}{2}})''\right|dt=I.$$

Для доказательства соотношения (11) достаточно доказать, что $I\to 0$ когда $n\to\infty$.

Но

$$I\leqslant I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где

$$I_1=\int_{|t|<A}\left|\bar{f}_n''(t)-(e^{-\frac{t^2}{2}})''\right|dt,\qquad I_2=\int_{|t|\geqslant A}\left|(e^{-\frac{t^2}{2}})''\right|dt,$$

$$I_3=\int_{A\geqslant|t|<\frac{\pi B_n}{\sigma\sqrt{2}}}\left|\bar{f}_n''(t)\right|dt,\qquad I_4=\int_{|t|\geqslant\frac{\pi B_n}{\sigma\sqrt{2}}}\left|\bar{f}_n''(t)\right|dt.$$

При оценке интеграла I_1 воспользуемся следующей леммой (см. [1]).

Пусть $\{p_n(x)\}$ — последовательность плотностей с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями равными единице, и пусть $p_n(x)\to p(x)$ при $n\to\infty$, равномерно, где $p(x)$ — плотность с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Если $\{f_n(t)\}$ — последовательность соответствующих характеристических функций и $\{f(t)\}$ — характеристическая функция плотности $p(x)$, то

$$f_n''(t)\to f''(t)\quad \textit{при}\quad n\to\infty,\quad \textit{равномерно}.$$

Последовательность плотностей нормированных сумм $\{\bar{p}_n(x)\}$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют требованиям леммы. Следовательно,

$$\bar{f}_n''(t)\to(e^{-\frac{t^2}{2}})''\quad\text{при}\quad n\to\infty,\quad\text{равномерно}.$$

Итак, для любого конечного A

$$I_1\to 0,\quad\text{когда}\quad n\to\infty. \tag{12}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon>0$ можно найти $A=A(\varepsilon)$ такое, чтобы

$$I_2=\int_{|t|>A(\varepsilon)}|t^2-1|\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt<\varepsilon. \tag{13}$$

Очевидны оценки:

$$\left|f_k'\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{\sigma_k^2|t|}{B_n^2},\qquad \left|f_n''\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{\sigma_k^2}{B_n^2}.$$

Используя эти оценки, из соотношения

$$\bar{f}_n''(t)=\sum_{k=0}^{n}f_k''\left(\frac{t}{B_n}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}f_j\left(\frac{t}{B_n}\right)+\sum_{k=1}^{n}f_k'\left(\frac{t}{B_n}\right)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}f_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)\prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq k}}^{n}f_r\left(\frac{t}{B_n}\right)$$

получаем следующие неравенства:

$$\left|\bar{f}_n''(t)\right| \leqslant (1+t^2) \max_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j \neq k}}^{n} \left| f_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|,$$

$$\left|\bar{f}_n''(t)\right| \leqslant (n+1) \max_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} \prod_{r \neq j \neq k}^{n} \left| f_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|,$$

Теперь, согласно оценкам (6) и (7), имеем неравенства:

$$\left|\bar{f}_n''(t)\right| \leqslant \begin{cases} (1+t^2)\exp\{-\beta_1 t^2\}, & \text{когда} \quad |t| < \dfrac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}, \\ \left| f_{l_1}\left(\dfrac{t}{B_n}\right) f_{l_2}\left(\dfrac{t}{B_n}\right)\right| (n+1)\exp\{-\beta_2 n\}, & \text{когда} \quad |t| \geqslant \dfrac{\pi B_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{2}}, \end{cases}$$

Здесь $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $A = A(\varepsilon)$ такое, что

$$I_3 \leqslant \int\limits_{|t| \geqslant A(\varepsilon)} (1+t^2)\exp\{-\beta_1 t^2\}\, dt < \varepsilon, \tag{14}$$

а также и

$$I_4 \to 0, \quad \text{когда} \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Из соотношений (12)—(15) следует, что равномерно относительно x выполняется соотношение

$$\lim_{n \to \infty} x^2 \left| \bar{p}_n(x) - \varphi(x) \right| = 0. \tag{16}$$

Утверждение теоремы следует из соотношений (10), (16).

Вильнюсский государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 2.III.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. W. L. Smith. A frequency-function form of the central limit theorem, Proc. Cambridge Philos Soc., 49, 3 (1953), 462—472.
2. П. Сурвила. О локальной предельной теореме для плотностей, Лит. мат. сб., Т 3, № 1 (1963), 225—236.
3. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

VIENA RIBINĖ LOKALINĖ TEOREMA TANKIAMS

P. SURVILA

(Reziumė)

Darbe įrodoma sekanti lokalinė ribinė teorema:

Jeigu nepriklausomų atsitiktinių dydžių sekos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ nariai turi tolygiai aprėžtus tankius, nulinius vidurkius ir baigtines dispersijas $D\xi_k = \sigma_k^2 < \infty$, ir jeigu, be to, patenkintos dar ir sekančios sąlygos:

1) egzistuoja toks skaičius $C < \infty$, kad $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \leqslant Cn$ visiems n,

2) patenkinta Lindebergo sąlyga (2), tai tolygiai visiems x

$$\lim_{n\to\infty}(1+x^2)\left|\bar{p}_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right|=0.$$

Čia

$$\bar{p}_n(x)=\frac{d}{dx}\left[P\left\{B_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<x\right\}\right].$$

EIN LOKALER GRENZWERTSATZ FÜR DIE DICHTEFUNKTIONEN

P. SURWILA

(Zusammenfassung)

In vorliegendem Artikel wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrößen, welche die gleichmäßig beschränkten Dichtefunktionen, die Mittelwerten $M\xi_k=0$ und die Dispersionen $D\xi_k=\sigma_k^2<\infty$ haben. Wir setzen

$$F_k(x)=P\{\xi_k<x\},\quad B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,\quad \bar{p}_n(x)=\frac{d}{dx}\left[P\left\{B_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<x\right\}\right].$$

Wen die Bedingungen:

1) es gibt eine Zahl $C<\infty$ derart, daß für jedes n

$$B_n^2\leqslant Cn$$

ist;

2) für jedes $\tau>0$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau B_n}x^2\,dF_k(x)=0,$$

gilt, erfüllen sind, genügt die Folge der Dichtefunktionen $\bar{p}_n(x)$ der Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}(1+x^2)\left|\bar{p}_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right|=0.$$