IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

СЕКУЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ ИНДУЦИРОВАННЫХ ДВУКРАТНЫХ РАССЛОЕНИЙ

А. МАТУЗЯВИЧЮС

Пусть $\mathscr{E}_1(E_1, B, F_1, p_1)$, $\mathscr{E}_2(E_2, E_1, F_2, p_2)$, $\mathscr{P}_1(P_1, B, C_1, f_1)$ и $\mathscr{P}_2(P_2, P_1, C_2, f_2)$ — четыре расслоенные пространства, базами в которых служат односвязные симплициальные комплексы, причем базы расслоений $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{P}_1$ совпадают. Слои F_1, F_2, C_1, C_2 предполагаются асферичными во всех размерностях, меньших r, $r>1$. В частности, в силу асферичности слоев в размерности один они являются гомотопически простыми во всех размерностях. Наконец, проекции p_1, p_2, f_1, f_2 предполагаются симплициальными отображениями.

Расслоенные пространства $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{P}_1$ индуцируют два расслоения $\mathscr{E}_1'(Q, P_1, F_1, p_1')$, $\mathscr{P}_1'(Q, E_1, C_1, f_1')$ с базами P_1, E_1. Пространство Q является подмножеством прямого произведения $P_1 \times E_1$, состоящим из пар (x_1, e_1), где $x_1 \in P_1$, $e_1 \in E_1$, удовлетворяющих условию $f_1(x_1)=p_1(e_1)$, а проекции p_1', f_1' определяются формулами $p_1'(x_1, e_1)=x_1$, $f_1'(x_1, e_1)=e_1$.

Расслоенные пространства $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{P}_1'$, $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{P}_2$ индуцируют соответственно по два расслоения

$$\mathscr{E}_2'(R, Q, F_2, p_2'), \qquad P_1''(R, E_2, C_1, f_1'');$$

$$\mathscr{E}_1''(N, P_2, F_1, p_1''), \qquad \mathscr{P}_2''(N, Q, C_2, f_2').$$

Пространства R, N являются подмножествами прямых произведений $R \subset Q \times E_2$, $N \subset P_2 \times Q$, состоящими из пар (q, e_2), (x_2, q), где $q \in Q$, $e_2 \in E_2$, $x_2 \in P_2$, удовлетворяющих условиям $f_1'(q)=p_2(e_2)$, $f_2(x_2)=p_1'(q)$. Проекции p_2', f_1'', p_1'', f_2' определяются формулами

$$p_2'(q_1, e_2)=q, \qquad f_1''(q, e_2)=e_2,$$

$$p_1'(x_2, q)=x_2, \qquad f_2'(x_2, q)=q.$$

Наконец, расслоенные пространства $\mathscr{E}_2'$, $\mathscr{P}_2'$ индуцируют два расслоения

$$\mathscr{E}_2''(M, N, F_2, p_2''), \qquad \mathscr{P}_2''(M, R, C_2, f_2'').$$

Пространство M является подмножеством прямого произведения $N \times R$, состоящим из пар (n, r), где $n \in N$, $r \in R$, удовлетворяющих условию $f_2'(n) = p_2'(r)$, а проекции p_2'', f_2'' определяются формулами $p_2''(n, r) = n$, $f_2''(n, r) = r$.

По заданным двум расслоенным пространствам $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$; $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$; $\mathscr{E}_1''$, $\mathscr{E}_2''$; $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$; $\mathscr{P}_1'$, P_2'; $\mathscr{P}_1''$, $\mathscr{P}_2''$ построим соответственно сложные расслоенные пространства

$$\mathscr{E}(E_2, B, F, p), \qquad \mathscr{E}'(R, P_1, F, p'),$$
$$\mathscr{E}''(M, P_2, F, p''), \qquad \mathscr{P}(P_2, B, C, f),$$
$$\mathscr{P}'(N, E_1, C, f'), \qquad \mathscr{P}''(M, E_2, C, f''),$$

проекции которых определяются формулами $p = p_1 \circ p_2$, $p' = p_1' \circ p_2'$, $p'' = p_1'' \circ p_2''$, $f = f_1 \circ f_2$, $f' = f_1' \circ f_2'$, $f'' = f_1'' \circ f_2''$, а слои — формулами $F = p_2^{-1}(F_1)$, $C = f_2^{-1}(C_1)$.

Теперь расслоенные пространства $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{P}$; $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{P}'$; $\mathscr{E}$, $\mathscr{P}_1$; $\mathscr{E}'$, $\mathscr{P}_2$; $\mathscr{E}$, $\mathscr{P}$ индуцируют соответственно по два расслоенных пространства

$$\mathscr{E}_{10}''(N_0, P_2, F_1, p_{10}''), \qquad \mathscr{P}_0'(N_0, E_1, C, f_0');$$
$$\mathscr{E}_{20}''(M_0, N, F_2, p_{20}''), \qquad \mathscr{P}_0''(M_0, E_2, C, f_0'');$$
$$\mathscr{E}_0'(R_0, P_1, F, p_0'), \qquad \mathscr{P}_{10}''(R_0, E_2, C_2, f_{20}'');$$
$$\mathscr{E}_0''(M_0', P_2, F, p_0''), \qquad \mathscr{P}_{20}''(M_0', R, C_2, f_{20}'');$$
$$\mathscr{E}_{00}''(M_{00}, P_2, F, p_{00}''), \qquad \mathscr{P}_{00}''(M_{00}, E_2, C, f_{00}'').$$

Очевидно, что имеют место равенства $\mathscr{E}_1'' = \mathscr{E}_{10}''$, $\mathscr{P}' = \mathscr{P}_0'$, $\mathscr{E}_2'' = \mathscr{E}_{20}''$, $\mathscr{P}_2'' = \mathscr{P}_{20}''$, $\mathscr{E}' = \mathscr{E}_0'$, $\mathscr{P}_1'' = \mathscr{P}_{10}''$, $\mathscr{E}'' = \mathscr{E}'' = \mathscr{E}_{00}''$, $\mathscr{P}'' = \mathscr{P}_0'' = \mathscr{P}_{00}''$.

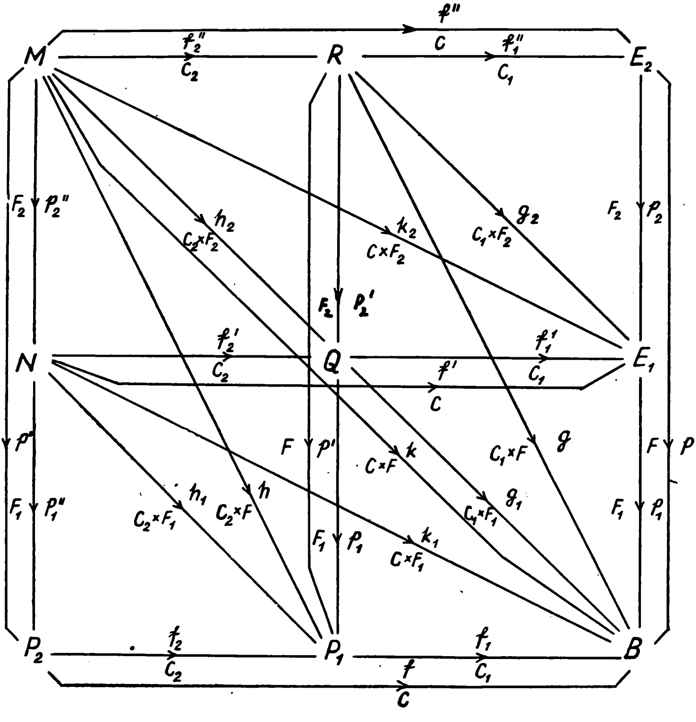
Произведениями расслоенных пространств $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{P}_1$; $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{P}_1'$; $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{P}_2$; $\mathscr{E}_2'$, $\mathscr{P}_2'$; $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{P}$; $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{P}'$; $\mathscr{E}$, $\mathscr{P}_1$; $\mathscr{E}'$, $\mathscr{P}_2$; $\mathscr{E}$, $\mathscr{P}$ называются соответственно расслоения

$$\mathscr{E}_1 \times \mathscr{P}_1(Q, B, C_1 \times F_1, g_1), \qquad \mathscr{E}_2 \times \mathscr{P}_1'(R, E_1, C_1 \times F_2, g_2),$$
$$\mathscr{E}_1' \times \mathscr{P}_2(N, P_1, C_2 \times F_1, h_1), \qquad \mathscr{E}_2' \times \mathscr{P}_2'(M, Q, C_2 \times F_2, h_2),$$
$$\mathscr{E}_1 \times \mathscr{P}(N, B, C \times F_1, k_1), \qquad \mathscr{E}_2 \times \mathscr{P}'(M, E_1, C \times F_2, k_2),$$
$$\mathscr{E} \times \mathscr{P}_1(R, B, C_1 \times F, g), \qquad \mathscr{E}' \times \mathscr{P}_2(M, P_1, C_2 \times F, h),$$
$$\mathscr{E} \times \mathscr{P}(M, B, C \times F, k),$$

проекции которых задаются формулами

$$g_1(x_1, e_1) = f_1(x_1) = p_1(e_1), \qquad g_2(q, e_2) = f_1'(q) = p_2(e_2),$$
$$h_2(x_2, q) = f_2(x_2) = p_1'(q), \qquad h_2(n, r) = f_2'(n) = p_2'(r),$$
$$k_1(x_2, e_1) = f(x_2) = p_1(e_1), \qquad k_2(n, e_3) = f'(n) = p_2(e_2),$$
$$g(x_1, e_2) = f_1(x_1) = p(e_1), \qquad h(x_2, r) = f_2(x_2) = p'(r),$$
$$k(x_2, e_2) = f(x_2) = p(e_2).$$

Все расслоенные пространства составляют коммутативную диаграмму



Коммутативность этой диаграммы вытекает из определения проекций и пространств.

Секущие поверхности расслоенных пространств $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ обозначим соответственно через ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2. Так как препятствия $z^{s+1}_{\psi_1}$, $z^{s+1}_{\psi_2}$, $z^{s+1}_{\varphi_1}$, $z^{s+1}_{\varphi_2}$ к распрсстранению этих секущих поверхностей тривиальны при $s<r$ $\big($в силу тривиальности гомотопических групп $\pi_s(F_1)$, $\pi_s(F_2)$, $\pi_s'(C_1)$, $\pi_s(C_2)$ при $s<r\big)$, то над r-мерными остовами базисных пространств можем построить секущие поверхности. Таким образом, $z^{r+1}_{\psi_1}$, $z^{r+1}_{\psi_2}$, $z^{r+1}_{\varphi_1}$, $z^{r+1}_{\varphi_2}$ являются препятствиями наименьшей размерности, которые могут оказаться ненулевыми. Они называются первыми препятствиями, классы когомологий которых обозначим соответственно через

$$Z^{r+1}_{E_1} \in H^{r+1}\big(B,\ \pi_r(F_1)\big), \qquad Z^{r+1}_{E_2} \in H^{r+1}\big(E_1,\ \pi_r(F_2)\big),$$

$$Z^{r+1}_{P_1} \in H^{r+1}\big(B,\ \pi_r(C_1)\big), \qquad Z^{r+1}_{P_2} \in H^{r+1}\big(P_1,\ \pi_r(C_2)\big).$$

Тогда определим секущие поверхности ψ_2', ψ_2', φ_1', φ_2' над r-мерными остовами базисных пространств индуцированных расслоений $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$, $\mathscr{P}_1'$, $\mathscr{P}_2'$ формулами

$$\psi_1'(x_1)=\Big(x_1,\ \psi_1 f_1(x_1)\Big), \qquad \psi_2'(q)=\Big(q,\ \psi_2 f_1'(q)\Big),$$

$$\varphi_1'(e_1)=\Big(\varphi_1 p_1(e_1),\ e_1\Big), \qquad \varphi_2'(q)=\Big(\varphi_2 p_1'(q),\ q\Big).$$

Точно таким же образом зададим секущие поверхности ψ_1'', ψ_2'', φ_1'', φ_2'' над r-мерными остовами базисных пространств индуцированных расслоений $\mathscr{E}''$ $\mathscr{E}_2''$, $\mathscr{P}_1''$, $\mathscr{P}''$ формулами

$$\psi_1''(x_2)=\Big(x_2,\ \psi_1' f_2(x_1)\Big), \qquad \psi_2''(n)=\Big(n,\ \psi_2' f_2'(n)\Big),$$

$$\psi_1''(e_2)=\Big(\varphi_1' p_2(e_2),\ e_2\Big), \qquad \varphi_2''(r)=\Big(\varphi_2' p_2'(r),\ r\Big).$$

В сложных расслоенных пространствах $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}''$, $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}''$ определим над r-мерными остовами базисных пространств секущие поверхности ψ, ψ', ψ'', φ, φ', φ'' формулами

$$\psi=\psi_2\circ\psi_1, \qquad \psi'=\psi_2'\circ\psi_1', \qquad \psi''=\psi_2''\circ\psi_1'',$$
$$\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1, \qquad \varphi'=\varphi_2'\circ\varphi_1', \qquad \varphi''=\varphi_2''\circ\psi''.$$

Обозначим через $z_{\psi_1'}^{r+1}$, $z_{\psi_2'}^{r+1}$, $z_{\varphi_1'}^{r+1}$, $z_{\varphi_2'}^{r+1}$

$$z_{\psi_1''}^{r+1}, \quad z_{\psi_2''}^{r+1}, \quad z_{\varphi_1''}^{r+1}, \quad z_{\varphi_2''}^{r+1}, \quad z_{\psi}^{r+1}$$
$$z_{\psi'}^{r+1}, \quad z_{\psi''}^{r+1}, \quad z_{\varphi}^{r+1}, \quad z_{\varphi'}^{r+1}, \quad z_{\varphi''}^{r+1}$$

первые препятствия к распространению секущих поверхностей

$$\psi_1', \quad \psi_2', \quad \varphi_1', \quad \varphi_2', \quad \psi_1'', \quad \psi_2'', \quad \varphi_1'',$$
$$\varphi_2'', \quad \psi, \quad \psi', \quad \psi'', \quad \psi, \quad \varphi', \quad \varphi''$$

на $(r+1)$-мерные остова базисных пространств расслоений

$$\mathscr{E}_1', \quad \mathscr{E}_2', \quad \mathscr{P}_1', \quad \mathscr{P}_2', \quad \mathscr{E}_1'', \quad \mathscr{E}_2'', \quad \mathscr{P}_1'',$$
$$\mathscr{P}_2'', \quad \mathscr{E}, \quad \mathscr{E}', \quad \mathscr{E}'', \quad \mathscr{P}, \quad \mathscr{P}', \quad \mathscr{P}''.$$

Классы когомологий этих препятствий обозначим соответственно через

$$Z_{E_1'}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(P_1,\ \pi_r(F_1)\Big), \qquad Z_{E_1'}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(Q,\ \pi_r(F_2)\Big),$$

$$Z_{P_1'}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(E_1,\ \pi_r(C_1)\Big), \qquad Z_{P_2'}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(Q,\ \pi_r(C_2)\Big),$$

$$Z_{E_1''}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(P_2,\ \pi_r(F_1)\Big), \qquad Z_{E_2''}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(N,\ \pi_r(F_2)\Big),$$

$$Z_{P_2''}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(E_2,\ \pi_r(C_1)\Big), \qquad Z_{P_1''}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(R,\ \pi_r(C_2)\Big),$$

$$Z_{E}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(F)\Big), \qquad Z_{E'}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(P_1,\ \pi_r(F)\Big),$$

$$Z_{E''}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(P_2,\ \pi_r(F)\Big), \qquad Z_{P}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(C)\Big),$$

$$Z_{P'}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(E_1,\ \pi_r(C)\Big), \qquad Z_{P''}^{r+1}\in H^{r+1}\Big(E_2,\ \pi_r(C)\Big).$$

Теперь определим секущие поверхности λ_1, λ_2, λ, μ_1, μ_2, μ, χ_1, χ_2, χ над r-мерными остовами базисных пространств в произведениях расслоений $\mathscr{E}_1\times\mathscr{P}_1$, $\mathscr{E}_2\times\mathscr{P}_1'$, $\mathscr{E}\times\mathscr{P}_1$, $\mathscr{E}_1'\times\mathscr{P}_2$, $\mathscr{E}_2'\times\mathscr{P}_2'$, $\mathscr{E}'\times\mathscr{P}_2$, $\mathscr{E}_1\times\mathscr{P}$, $\mathscr{E}_2\times\mathscr{P}'$, $\mathscr{E}\times\mathscr{P}$ соответственно формулами

$$\lambda_1(b)=\Big(\varphi_1(b),\ \psi_1(b)\Big), \qquad \lambda_2(e_1)=\Big(\varphi_1'(e_1),\ \psi_2(e_1)\Big),$$

$$\lambda(b)=\Big(\varphi_1(b),\ \psi(b)\Big), \qquad \mu_1(x_1)=\Big(\varphi_2(x_1),\ \psi_1'(x_1)\Big),$$

$$\mu_2(q)=\bigl(\varphi_2'(q),\ \psi_2'(q)\bigr),\qquad \mu(x_1)=\bigl(\varphi_2(x_1),\ \psi'(x_1)\bigr),$$

$$\chi_1(b)=\bigl(\varphi(b),\ \psi_1(b)\bigr),\qquad \chi_2(e_1)=\bigl(\varphi'(e_1),\ \psi_2(e_1)\bigr),$$

$$\chi(b)=\bigl(\varphi(b),\ \psi(b)\bigr).$$

Далее, обозначим через $z^{r+1}_{\lambda_1}$, $z^{r+1}_{\lambda_2}$, z^{r+1}_{λ}, $z^{r+1}_{\mu_1}$, $z^{r+1}_{\mu_2}$, z^{r+1}_{μ}, $z^{r+1}_{\chi_1}$, $z^{r+1}_{\chi_2}$, z^{r+1}_{χ} первые препятствия к распространению этих секущих поверхностей на $(r+1)$-мерные остовы базисных пространств, классы когомологий которых обозначим соответственно через

$$Z^{r+1}_{E_1'\times P_1}\in H^{r+1}\bigl(B,\ \pi_r(C_1\times F_1)\bigr),\qquad Z^{r+1}_{E_2\times P_1'}\in H^{r+1}\bigl(E_1,\ \pi_r(C_1\times F_2)\bigr),$$

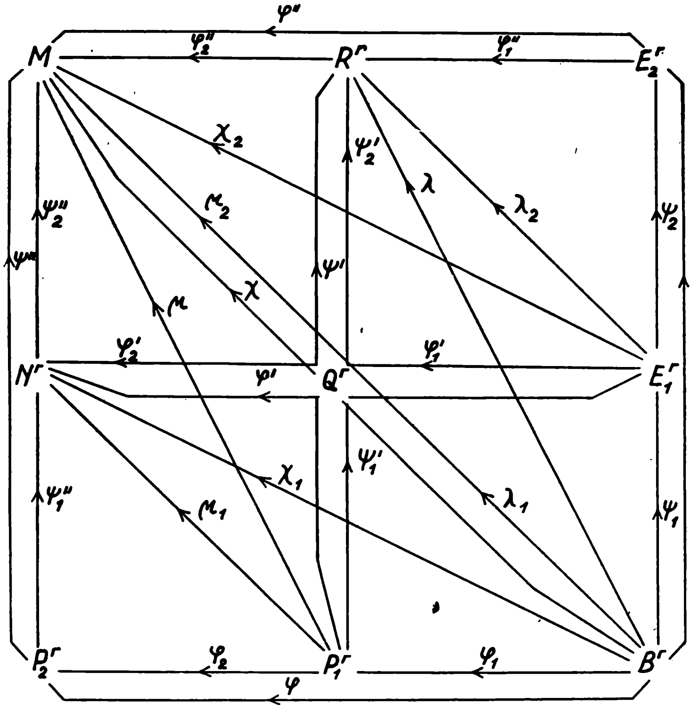
$$Z^{r+1}_{E\times P_1}\in H^{r+1}\bigl(B,\ \pi_r(C_1\times F)\bigr),\qquad Z^{r+1}_{E_1'\times P_2}\in H^{r+1}\bigl(P_1,\ \pi_r(C_2\times F_1)\bigr),$$

$$Z^{r+1}_{E_1'\times P_2'}\in H^{r+1}\bigl(Q,\ \pi_r(C_2\times F_2)\bigr),\qquad Z^{r+1}_{E'\times P_2}\in H^{r+1}\bigl(P_1,\ \pi_r(C_2\times F)\bigr),$$

$$Z^{r+1}_{E_1'\times P}\in H^{r+1}\bigl(B,\ \pi_r(C\times F_1)\bigr),\qquad Z^{r+1}_{E_2\times P'}\in H^{r+1}\bigl(E_1,\ \pi_r(C\times F_2)\bigr),$$

$$Z^{r+1}_{E\times P}\in H^{r+1}\bigl(B,\ \pi_r(C\times F)\bigr).$$

Для r-мерных остовов базисных пространств расслоений и секущих поверхностей в этих расслоениях имеет место коммутативная диаграмма



Коммутативность этой диаграммы вытекает из определения секущих поверхностей и пространств.

Расслоенные пространства $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_1\times\mathscr{P}_1$; $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_1'\times\mathscr{P}_2$; $\mathscr{E}\times\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_1$; $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_1\times\mathscr{P}$; $\mathscr{E}_2\times\mathscr{P}_1'$, $\mathscr{P}_1'$; $\mathscr{E}_1\times\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_1$ индуцируют соответственно по два расслоения

$$
\begin{array}{ll}
\overline{\mathscr{E}}{}_2'(R',\ Q,\ F_1,\ \overline{p}{}_2'), & G_2(R',\ E_1,\ C_1\times F_1,\ \overline{g}_2);\\
\overline{\mathscr{E}}{}_2''(M_1,\ N,\ F_1,\ \overline{p}{}_2''), & H_2(M_1,\ Q,\ C_2\times F_1,\ \overline{h}_2);\\
\overline{\mathscr{P}}{}_2''(M_2,\ R,\ C_1,\ \overline{f}{}_2''), & H(M_2,\ P_1,\ C_1\times F,\ \overline{h});\\
\overline{\overline{\mathscr{E}}}{}_2''(M_1',\ N,\ F_1,\ \overline{\overline{p}}{}_2''), & K_2(M_1',\ E_1,\ C\times F_1,\ \overline{k}_2);\\
H_2'(M_2',\ Q,\ C_1\times F_2,\ \overline{h}{}_2'), & \overline{\overline{\mathscr{P}}}{}_2''(M_2',\ R,\ C_1,\ \overline{\overline{f}}{}_2'');\\
H_1(N',\ P_1,\ C_1\times F_1,\ \overline{h}_1), & \overline{\mathscr{P}}{}_2'(N',\ Q,\ C_1,\ \overline{f}{}_2').
\end{array}
$$

Пространства $R'\subset E_1\times Q$, $M_1\subset Q\times N$, $M_2\subset P_1\times R$, $M_1'\subset E_1\times N$, $M_2'\subset Q\times R$, $N'\subset P_1\times Q$ состоят из пар $(e_1,\ q)\in R'$, $(q,\ n)\in M_1$, $(x_1,\ r)\in M_2$, $(e_1,\ n)\in M_1'$, $(q,\ r)\in M_2'$, $(x_1,\ q)\in N'$. Из определения пространств Q, N, R и проекций g_1, h_1, g, k_1, g_2 ясно, что условия $p_1(e_1)=g_1(q)$, $p_1'(q)=h_1(n)$, $f_1(x_1)=g(r)$, $p_1(e_1)=k_1(n)$, $f_1'(q)=g_2(r)$, $f_1(x_1)=g_1(q)$ всегда удовлетворяются. Проекции этих расслоений зададим формулами

$$
\begin{array}{lll}
\overline{p}{}_2'(q,\ e_1)=q, & \overline{g}_2(q,\ e_1)=e_1 & \overline{p}''(n,\ q)=n,\\
\overline{h}_2(n,\ q)=q, & \overline{f}{}_2''(x_1,\ r)=x_1, & \overline{h}(x_1,\ r)=r,\\
\overline{\overline{p}}{}_2''(e_1,\ n)=n, & \overline{k}_2(e_1,\ n)=e_1, & \overline{h}{}_2'(q,\ r)=q,\\
\overline{\overline{f}}{}_2''(q,\ r)=r, & \overline{h}(x_1,\ q)=x_1, & \overline{f}{}_2'(x_1,\ q)=q.
\end{array}
$$

Определим тогда секущие поверхности над r-мерными остовами базисных пространств индуцированных расслоений

$$
\begin{array}{cccccc}
\overline{\mathscr{E}}{}_2', & G_2, & \overline{\mathscr{E}}{}_2'', & H_2, & \overline{\mathscr{P}}{}_2'', & H,\\
\overline{\overline{\mathscr{E}}}{}_2'', & K_2, & H_2', & \overline{\overline{\mathscr{P}}}{}_2'', & H_1, & \overline{\mathscr{P}}{}_2'
\end{array}
$$

соответственно формулами

$$
\begin{array}{ll}
\overline{\psi}{}_2'(q)=\Big(q,\ \psi_1 g_1(q)\Big), & \overline{\lambda}_2(e_1)=\Big(\lambda_1 p_1(e_1),\ e_1\Big),\\
\overline{\psi}{}_2''(n)=\Big(n,\ \psi_1' h_1(n)\Big), & \overline{\mu}_2(q)=\Big(\mu_1 p_1'(q),\ q\Big),\\
\overline{\mu}(x_1)=\Big(x_1,\ \lambda f_1(x_1)\Big), & \overline{\varphi}''(r)=\Big(\varphi_1 g(r),\ r\Big),\\
\overline{\psi}{}_2''(n)=\Big(n,\ \psi_1 k_1(n)\Big), & \overline{\chi}_2(e_1)=\Big(\chi_1 p_1(e_1),\ e_1\Big),\\
\overline{\overline{\mu}}(q)=\Big(q,\ \lambda_2 f_1'(q)\Big), & \overline{\overline{\varphi}}{}_2''(r)=\Big(\varphi_1' g_2(r),\ r\Big),\\
\overline{\mu}_1(x)=\Big(x_1,\ \lambda_1 f_1(x_1)\Big), & \overline{\varphi}{}_2'(q)=\Big(\varphi_1 g_1(q),\ q\Big).
\end{array}
$$

Обозначим через $z^{r+1}_{\overline{\psi}{}_2'}$, $z^{r+1}_{\overline{\lambda}_2}$, $z^{r+1}_{\overline{\psi}{}_2''}$, $z^{r+1}_{\overline{\mu}_2}$, $z^{r+1}_{\overline{\mu}}$, $z^{r+1}_{\overline{\varphi}{}_2''}$, $z^{r+1}_{\overline{\psi}''}$, $z^{r+1}_{\overline{\chi}_2}$, $z^{r+1}_{\overline{\overline{\mu}}}$, $z^{r+1}_{\overline{\overline{\varphi}}{}_2''}$, $z^{r+1}_{\overline{\mu}_1}$, $z^{r+1}_{\overline{\varphi}{}_2'}$ первые препятствия к распространению этих секущих поверхностей на $(r+1)$-мерные остова базисных пространств, а классы их когомологий обозначим соответственно через

$$
Z^{r+1}_{\overline{E}{}_2'}\in H^{r+1}\Big(Q,\ \pi_r(F_1)\Big),\qquad Z^{r+1}_{G_2}\in H^{r+1}\Big(E_1,\ \pi_r(C_1\times F_1)\Big),
$$

$$Z^{r+1}_{\bar{E}_2''} \in H^{r+1}\Big(N,\ \pi_r(F_1)\Big), \qquad Z^{r+1}_{H_2} \in H^{r+1}\Big(Q,\ \pi_r(C_2 \times F_1)\Big),$$

$$Z^{r+1}_{\bar{P}_2''} \in H^{r+1}\Big(R,\ \pi_r(C_1)\Big), \qquad Z^{r+1}_{H} \in H^{r+1}\Big(P_1,\ \pi_r(C_1 \times F)\Big),$$

$$Z^{r+1}_{\bar{\bar{E}}_2''} \in H^{r+1}\Big(N,\ \pi_r(F_1)\Big), \qquad Z^{r+1}_{K_2} \in H^{r+1}\Big(E_1,\ \pi_r(C \times F_1)\Big),$$

$$Z^{r+1}_{H_2'} \in H^{r+1}\Big(Q,\ \pi_r(C_1 \times F_2)\Big), \qquad Z^{r+1}_{\bar{\bar{P}}_2''} \in H^{r+1}\Big(R,\ \pi_r(C_1)\Big),$$

$$Z^{r+1}_{H_2} \in H^{r+1}\Big(P_1,\ \pi_r(C_1 \times F_1)\Big), \qquad Z^{r+1}_{\bar{P}_2'} \in H^{r+1}\Big(Q,\ \pi_r(C_1)\Big).$$

Произведениями расслоенных пространств $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{P}_1$; $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_1' \times \mathscr{P}_2$; $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{E} \times \mathscr{P}_1$; $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{P}$; $\mathscr{P}_1'$, $\mathscr{E}_2 \times \mathscr{P}_1'$; $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{P}_1$ называются расслоения

$$\begin{gathered}
\mathscr{E}_1 \times (\mathscr{E}_1 \times \mathscr{P}_1)\,(\overline{R}',\ B,\ F_1 \times F_1 \times C_1,\ g_0),\\
\mathscr{E}_1' \times (\mathscr{E}_1' \times \mathscr{P}_2)\,(\overline{M}_1,\ P_1,\ F_1 \times F_1 \times C_2,\ h_0),\\
\mathscr{P}_1 \times (\mathscr{P}_1 \times \mathscr{E})\,(\overline{M}_2,\ B,\ C_1 \times C_1 \times F,\ k_0),\\
\mathscr{E}_1 \times (\mathscr{E}_1 \times \mathscr{P})\,(\overline{M}_1',\ B,\ F_1 \times F_1 \times C,\ k_{00}),\\
\mathscr{P}_1' \times (\mathscr{E}_2 \times \mathscr{P}_1')\,(\overline{M}_2',\ E_1,\ C_1 \times C_1 \times F_2,\ k_{20}),\\
\mathscr{P}_1 \times (\mathscr{P}_1 \times \mathscr{E}_1)\,(\overline{N}',\ B,\ C_1 \times C_1 \times F_1,\ k_{10}),
\end{gathered}$$

проекции которых задаются формулами

$$\begin{aligned}
&g_0(e_1,\ q) = p_1(e_1) = g_1(q), && h_0(q,\ n) = p_1'(q) = h_1(n),\\
&k_0(x_1,\ r) = f_1(x_1) = g(r), && k_{00}(e_1,\ n) = p_1(e_1) = k_1(n),\\
&k_{20}(q,\ r) = f_1'(q) = g_2(r), && k_{10}(x_1,\ q) = f_1(x_1) = g_1(q).
\end{aligned}$$

Секущие поверхности над r-мерными остовами базисных пространств в этих произведениях расслоений определим соответственно формулами

$$\lambda'(b) = \Big(\lambda_1(b),\ \psi_1(b)\Big), \qquad \mu'(x_1) = \Big(\mu(x_1),\ \psi_1'(x_1)\Big),$$

$$\chi'(b) = \Big(\varphi_1(b),\ \lambda(b)\Big), \qquad \chi''(b) = \Big(\chi_1(b),\ \psi_1(b)\Big),$$

$$\chi_2'(e_1) = \Big(\varphi_2'(e_1),\ \lambda_2(e)\Big), \qquad \chi_1'(b) = \Big(\varphi_1(b),\ \lambda_1(b)\Big),$$

Первые препятствия к распространению этих секущих поверхностей обозначим через $z^{r+1}_{\lambda'}$, $z^{r+1}_{\mu'}$, $z^{r+1}_{\chi'}$, $z^{r+1}_{\chi''}$, $z^{r+1}_{\chi_2'}$, $z^{r+1}_{\chi_1'}$, а классы когомологий их обозначим соответственно через

$$\begin{gathered}
Z^{r+1}_{E_1 \times (E_1 \times P_1)} \in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(F_1 \times F_1 \times C_1)\Big),\\
Z^{r+1}_{E_1' \times (E_1' \times P_2)} \in H^{r+1}\Big(P_1,\ \pi_r(F_1 \times F_1 \times C_2)\Big),\\
Z^{r+1}_{P_1 \times (P_1 \times E)} \in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(C_1 \times C_1 \times F)\Big),\\
Z^{r+1}_{E_1 \times (E_1 \times P)} \in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(F_1 \times F_1 \times C)\Big),\\
Z^{r+1}_{P_1' \times (E_2 \times P_1')} \in H^{r+1}\Big(E_1,\ \pi_r(C_1 \times C_1 \times F_2\Big),\\
Z^{r+1}_{P_1 \times (P_1 \times E_1)} \in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(C_1 \times C_1 \times F_1)\Big).
\end{gathered}$$

По заданным двум расслоенным пространствам $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{P}_1$, $\bar{\mathscr{E}}_2'$; $\mathscr{E}_1$, G_2; $\mathscr{E}_1' \times \mathscr{P}_2$, $\bar{\mathscr{E}}_2''$; $\mathscr{E}_1'$, H_2; $\mathscr{P}_1$, H; $\mathscr{E} \times P_1$, $\bar{\mathscr{P}}_2''$; $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{P}$, $\bar{\bar{\mathscr{E}}}''$ $\mathscr{E}_1$, K_2; $\mathscr{P}_1'$, H_2';

$\mathscr{E}_2\times\mathscr{P}'_1$, $\bar{\bar{\mathscr{P}}}''_2$; $\mathscr{P}_1$ H_1; $\mathscr{E}_1\times\mathscr{P}_1$, $\bar{\mathscr{P}}'_2$ построим сложные расслоенные пространства

$$G(\bar{R}', B, Y_1, g'_0), \qquad H'(\bar{M}_1, P_1, Y_2, h'_0),$$
$$K(\bar{M}_2, B, X, k'_{00}), \qquad K_0(\bar{M}'_1, B, Y, k'_0),$$
$$K'_2(\bar{M}'_2, E_1, X_2, k'_{20}), \qquad K'_1(\bar{N}', B, X_1, k'_{10}),$$

проекции которых определяются формулами

$$g'_0=g_1\circ\bar{p}'_2=\bar{p}_1\circ\bar{g}_2, \qquad h'_0=h_1\circ\bar{p}''_2=p'\circ\bar{h}_2,$$
$$k'_{00}=f_1\circ\bar{h}=g\circ\bar{f}''_2, \qquad k'_0=k_1\circ\bar{\bar{p}}''_2=p_1\circ\bar{k}_2,$$
$$k'_{20}=f'_1\circ\bar{h}_2=g_2\circ\bar{\bar{f}}''_2, \qquad k'_{10}=f_1\circ\bar{h}_1=g_1\circ\bar{f}'_2,$$

а секущие поверхности — формулами

$$\lambda_0(b)=\left(\lambda_1(b),\ \psi_1(b)\right), \qquad \mu_0(x_1)=\left(\mu_1(x_1),\ \psi'_1(x_1)\right),$$
$$\chi_0(b)=\left(\varphi_1(b),\ \lambda(b)\right), \qquad \chi'_0(b)=\left(\chi_1(b),\ \psi_1(b)\right),$$
$$\lambda_{20}(e_1)=\left(\varphi'_1(e_1),\ \lambda_2(e_1)\right), \qquad \chi_{10}(b)=\left(\varphi_1(b),\ \lambda_1(b)\right).$$

Слои задаются формулами

$$Y_1=(\bar{p}'_2)^{-1}(C_1\times F_1)=\bar{g}_2^{-1}(F_1), \qquad Y_2=(\bar{p}''_2)^{-1}(C_2\times F_1)=\bar{h}_2^{-1}(F_1),$$
$$X=\bar{h}^{-1}(C_1)=(\bar{f}''_2)^{-1}(C_1\times F), \qquad Y=(\bar{\bar{p}}''_2)^{-1}(C\times F_1)=\bar{k}_2^{-1}(F_1),$$
$$X_2=\bar{h}_2^{-1}(C_1)=\bar{\bar{f}}''_2(C_1\times F_2), \qquad X_1=\bar{h}_1^{-1}(C_1)=(\bar{f}'_2)^{-1}(C_1\times F_1).$$

Пусть $z^{r+1}_{\lambda_0}$, $z^{r+1}_{\mu_0}$, $z^{r+1}_{\chi_0}$, $z^{r+1}_{\chi'_0}$, χ_{20}, χ_{10} первые препятствия к распространению секущих поверхностей λ_0, μ_0, χ_0, χ'_0, λ_{20}, χ_{10} на $(r+1)$-мерные остова базисных пространств. Классы когомологий этих препятствий обозначим соответственно через

$$Z^{r+1}_G\in H^{r+1}\left(B,\ \pi_r(Y_1)\right), \qquad Z^{r+1}_{H'}\in H^{r+1}\left(P_1,\ \pi_r(Y_2)\right),$$
$$Z^{r+1}_K\in H^{r+1}\left(B,\ \pi_r(X)\right), \qquad Z^{r+1}_{K_0}\in H^{r+1}\left(B,\ \pi_r(Y)\right),$$
$$Z^{r+1}_{K'_1}\in H^{r+1}\left(E_1,\ \pi_r(X_2)\right), \qquad Z^{r+1}_{K'_1}\in H^{r+1}\left(B,\ \pi_r(X_1)\right).$$

При высказанных условиях имеют место следующие соотношения [1]:

$$
\begin{aligned}
&Z^{r+1}_{P'_1}=p_1\ Z^{r+1}_{P_1}, && Z^{r+1}_{P'_1}=p_2^*\ Z^{r+1}_{P'_1},\\
&Z^{r+1}_{P''_1}=p^*\ Z^{r+1}_{P_1}, && Z^{r+1}_{P'_2}=p_1'^*\ Z^{r+1}_{P_2},\\
&Z^{r+1}_{P''_2}=p_2'^*\ Z^{r+1}_{P'_2}, && Z^{r+1}_{P''_2}=p'^*\ Z^{r+1}_{P_2},\\
&Z^{r+1}_{P'}=p_1\ Z^{r+1}_{P}, && Z^{r+1}_{P''}=p_2^*\ Z^{r+1}_{P'},\\
&Z^{r+1}_{P''}=p^*\ Z^{r+1}_{P}, && Z^{r+1}_{E'_1}=f_1^*\ Z^{r+1}_{E_1},\\
&Z^{r+1}_{E''}=f_2^*\ Z^{r+1}_{E'_1}, && Z^{r+1}_{E''_1}=f^*\ Z^{r+1}_{E_1},\\
&Z^{r+1}_{E'_2}=f_1'^*\ Z^{r+1}_{E_2}, && Z^{r+1}_{E''_2}=f'_2\ Z^{r+1}_{E'_2},\\
&Z^{r+1}_{E''_2}=f'^*\ Z^{r+1}_{E_2}, && Z^{r+1}_{E'}=f_1^*\ Z^{r+1}_{E},\\
&Z^{r+1}_{E''}=f_2^*\ Z^{r+1}_{E'}, && Z^{r+1}_{E''}=f^*\ Z^{r+1}_{E},\\
&Z^{r+1}_{E''_2}=g_1^*\ Z^{r+1}_{E_1}, && Z^{r+1}_{E_2\times P'_1}=p_1^*\ Z^{r+1}_{E_1\times P_1},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$\begin{array}{ll}
Z^{r+1}_{E_2''}=h_1^*\,Z^{r+1}_{E_1'}\,, & Z^{r+1}_{E_2'\times P_2'}=p_1'^*\,Z^{r+1}_{E_1'\times P_2}\,,\\
Z^{r+1}_{E''\times P_2}=f_1^*\,Z^{r+1}_{E\times P_1}\,. & Z^{r+1}_{P_2''}=g^*\,Z^{r+1}_{P_1}\,,\\
Z^{r+1}_{E_2''}=k_1^*\,Z^{r+1}_{E_1}\,, & Z^{r+1}_{E_2\times P'}=p_1^*\,Z^{r+1}_{E_1\times P}\,,\\
Z^{r+1}_{E_1'\times P_2}=f_1\;Z^{r+1}_{E_1\times P_1}\,, & Z^{r+1}_{P_2'}=g_1^*\,Z^{r+1}_{P_1}\,,\\
Z^{r+1}_{E_2'\times P_2'}=f_1'^*\,Z^{r+1}_{E_2\times E_2'}\,, & Z^{r+1}_{P_2''}=g_2\;Z^{r+1}_{P_1'}\,,\\
Z^{r+1}_{E_2'}=g_1^*\,Z^{r+1}_{E_1}\,, & Z^{r+1}_{E_2\times P_1'}=p_1^*\,Z^{r+1}_{E_1\times P_1}\,,\\
Z^{r+1}_{E_2''}=h_1^*\,Z^{r+1}_{E_1}\,, & Z^{r+1}_{E_2'\times P_2'}=p_1'^*\,Z^{r+1}_{E_1'\times P_2}\,,\\
Z^{r+1}_{E'\times P_2}=f_1^*\,Z^{r+1}_{E\times P_1}\,, & Z^{r+1}_{P_2''}=g^*\,Z^{r+1}_{P_1}\,,\\
Z^{r+1}_{E_2''}=k_1^*\,Z^{r+1}_{E_1}\,, & Z^{r+1}_{E_2\times P'}=p_1\;Z^{r+1}_{E_1\times P}\,,\\
Z^{r+1}_{E_2'\times P_2'}=f_1'^*\,Z^{r+1}_{E_2\times P_1'}\,, & Z^{r+1}_{P_2''}=g_2^*\,Z^{r+1}_{P_1'}\,,\\
Z^{r+1}_{E_1'\times P_2}=f_1^*\,Z^{r+1}_{E_1\times P_1}\,, & Z^{r+1}_{P_2'}=g_1^*\,Z^{r+1}_{P_1}\,.
\end{array}$$

Для двукратных расслоений классы когомологий связаны равенствами [2]

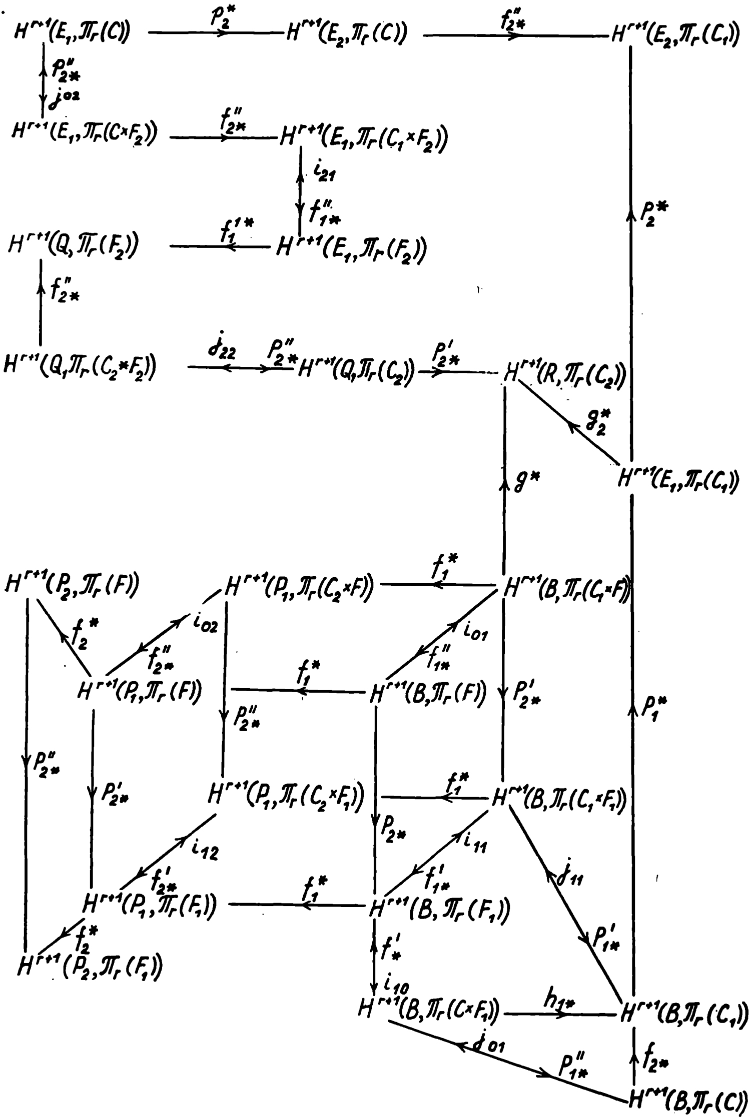
$$\begin{array}{ll}
Z^{r+1}_{P_1}=f_{2*}\,Z^{r+1}_{P}\,, & Z^{r+1}_{P_1'}=f'_{2*}\,Z^{r+1}_{P'}\,,\\
Z^{r+1}_{P_1''}=f''_{2*}\,Z^{r+1}_{P''}\,, & Z^{r+1}_{E_1}=p_{2*}\,Z^{r+1}_{E}\,,\\
Z^{r+1}_{E_1'}=p'_{2*}\,Z^{r+1}_{E'}\,, & Z^{r+1}_{E_1''}=p''_{2*}\,Z^{r+1}_{E''}\,,\\
Z^{r+1}_{P_1}=p'_{1*}\,Z^{r+1}_{E_1\times P_1}\,, & Z^{r+1}_{E_1}=f'_{1*}\,Z^{r+1}_{E_1\times P_1}\,,\\
Z^{r+1}_{P_1'}=p_2'^*\,Z^{r+1}_{E_2\times P_1'}\,, & Z^{r+1}_{E_2}=f''_{1*}\,Z^{r+1}_{E_2\times P_2'}\,,\\
Z^{r+1}_{P_2}=p''_*\,Z^{r+1}_{E_1'\times P_2}\,, & Z^{r+1}_{E_1'}=f'_{2*}\,Z^{r+1}_{E_1'\times P_2}\,,\\
Z^{r+1}_{P_2'}=p''_{2*}\,Z^{r+1}_{E_2'\times P_2'}\,, & Z^{r+1}_{E_2'}=f''_{2*}\,Z^{r+1}_{E_2'\times P_1'}\,,\\
Z^{r+1}_{P_2}=p'_*\,Z^{r+1}_{E\times P_1}\,, & Z^{r+1}_{E}=f''_{1*}\,Z^{r+1}_{E\times P_1}\,,\\
Z^{r+1}_{P_2}=p''_*\,Z^{r+1}_{E'\times P_2}\,, & Z^{r+1}_{E'}=f''_{2*}\,Z^{r+1}_{E'\times P_2}\,,\\
Z^{r+1}_{P}=p''_{1*}\,Z^{r+1}_{E_1\times P}\,, & Z^{r+1}_{E_1}=f'_*\,Z^{r+1}_{E_1\times P}\,,\\
Z^{r+1}_{P'}=p''_{2*}\,Z^{r+1}_{E_2\times P'}\,, & Z^{r\times 1}_{E_2}=f''_*\,Z^{r+1}_{E_2\times P'}\,,\\
Z^{r+1}_{P}=p''_*\,Z^{r+1}_{E\times P}\,, & Z^{r+1}_{E}=f''_*\,Z^{r+1}_{E\times P}\,,\\
Z^{r+1}_{E_1\times P_1}=p'_{2*}\,Z^{r+1}_{E\times P_1}\,, & Z^{r+1}_{E_1}=g_{2*}\,Z^{r+1}_{E\times P_1}\,,\\
Z^{r+1}_{E_1'\times P_2}=p''_*\,Z^{r+1}_{E'\times P_2}\,, & Z^{r+1}_{E_1'}=h_{2*}\,Z^{r+1}_{E'\times P_2}\,,\\
Z^{r+1}_{P_1}=h_*\,Z^{r+1}_{E\times P}\,, & Z^{r+1}_{E\times P_1}=f''_{2*}\,Z^{r+1}_{E\times P}\,,\\
Z^{r+1}_{E_1\times P}=p''_2\,Z^{r+1}_{E\times P}\,, & Z^{r+1}_{E_1}=k_{2*}\,Z^{r+1}_{E\times P}\,,\\
Z^{r+1}_{E_2\times P_1'}=f''_{2*}\,Z^{r+1}_{E_2\times P'}\,, & Z^{r+1}_{P_1'}=h_{2*}\,Z^{r+1}_{E_2\times P'}\,,\\
Z^{r+1}_{P_1}=h_{1*}\,Z^{r+1}_{E_1\times P}\,, & Z^{r+1}_{E_1\times P_1}=f'_{2*}\,Z^{r+1}_{E_1\times P}\,,
\end{array} \qquad (2)$$

$$
\begin{aligned}
&Z^{r+1}_{E_1\times P_1}=h_{2*}\,Z^{r+1}_{E\times P}\,, && Z^{r+1}_{E_1\times P_1}=\bar{p}'_{2*}\,Z^{r+1}_{G}\,,\\
&Z^{r+1}_{E_1}=\bar{g}_{2*}\,Z^{r+1}_{G}\,, && Z^{r+1}_{E'_1\times P_2}=\bar{p}''_{2*}\,Z^{r+1}_{H'}\,,\\
&Z^{r+1}_{E'_1}=\bar{h}_{2*}\,Z^{r+1}_{H'}\,, && Z^{r+1}_{P_1}=\bar{h}_{*}\,Z^{r+1}_{K}\,,\\
&Z^{r+1}_{E\times P_1}=\bar{f}''_{2*}\,Z^{r+1}_{K}\,, && Z^{r+1}_{E_1\times P}=\bar{\bar{p}}''_{2*}\,Z^{r+1}_{K_0}\,,\\
&Z^{r+1}_{E_1}=\bar{k}_{2*}\,Z^{r+1}_{K_0}\,, && Z^{r+1}_{P'_1}=\bar{h}'_{2*}\,Z^{r+1}_{K'_2}\,,\\
&Z^{r+1}_{E_2\times P'_1}=\bar{\bar{f}}''_{2*}\,Z^{r+1}_{K'_2}\,, && Z^{r+1}_{P_1}=\bar{h}_{1*}\,Z^{r+1}_{K_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{E^1\times P_1}=\bar{f}'_{2*}\,Z^{r+1}_{K'_1}\,. &&
\end{aligned}
$$

Наконец, классы когомологий в произведениях расслоенных пространств связаны соотношениями [3]

$$
\begin{aligned}
&Z^{r+1}_{E_1\times P_1}=i_{11}\,Z^{r+1}_{E_1}+j_{11}\,Z^{r+1}_{P_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{E_2\times P'_1}=i_{21}\,Z^{r+1}_{E_2}+j_{12}\,Z^{r+1}_{P'_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{E\times P_1}=i_{01}\,Z^{r+1}_{E}+j_{10}\,Z^{r+1}_{P_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{E'_1\times P_2}=i_{12}\,Z^{r+1}_{E'_1}+j_{21}\,Z^{r+1}_{P_2}\,,\\
&Z^{r+1}_{E'_2+P'_2}=i_{22}\,Z^{r+1}_{E'_2}+j_{22}\,Z^{r+1}_{P'_2}\,,\\
&Z^{r+1}_{E'\times P_2}=i_{02}\,Z^{r+1}_{E'}+j_{20}\,Z^{r+1}_{P_2}\,,\\
&Z^{r+1}_{E_1\times P}=i_{10}\,Z^{r+1}_{E_1}+j_{01}\,Z^{r+1}_{P}\,,\\
&Z^{r+1}_{E_2\times P'}=i_{20}\,Z^{r+1}_{E_2}+j_{02}\,Z^{r+1}_{P'}\,,\\
&Z^{r+1}_{E\times P}=i_{00}\,Z^{r+1}_{E}+j_{00}\,Z^{r+1}_{P}\,,\\
&Z^{r+1}_{(E_1\times P_1)\times E_1}=i_{111}\,Z^{r+1}_{E_1\times P_1}+j_{111}\,Z^{r+1}_{E_2}\,,\\
&Z^{r+1}_{(E'_2\times P_2)\times E'_2}=i_{121}\,Z^{r+1}_{E'_2\times P_2}+j_{121}\,Z^{r+1}_{E'_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{P_1\times(E\times P)}=i_{100}\,Z^{r+1}_{P_1}+j_{100}\,Z^{r+1}_{E\times P}\,,\\
&Z^{r+1}_{(E_1\times P)\times E_1}=i_{101}\,Z^{r+1}_{E_1\times P}+j_{101}\,Z^{r+1}_{E_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{P'_1\times(E_2\times P'_1)}=i'_{121}\,Z^{r+1}_{P'_1}+j'_{121}\,Z^{r+1}_{E_2\times P'_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{P_1\times(E_1\times P_1)}=i'_{111}\,Z^{r+1}_{P_1}+j'_{111}\,Z^{r+1}_{E_1\times P_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{E_1\times(E_1\times P_1)}=i''_{111}\,Z^{r+1}_{E_1}+j''_{111}\,Z^{r+1}_{E_1\times P_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{E'_1\times(E'_1\times P_2)}=i_{1\text{-}2}\,Z^{r+1}_{E'_1}+j_{112}\,Z^{r+1}_{E'_1\times P_2}\,,\\
&Z^{r+1}_{P_1\times(P_1\times E)}=i_{110}\,Z^{r+1}_{P_1}+j_{110}\,Z^{r+1}_{P_1\times E}\,,\\
&Z^{r+1}_{E_1\times(E_1\times P)}=i'_{101}\,Z^{r+1}_{E_1}=j'_{101}\,Z^{r+1}_{E_1\times P}\,,\\
&Z^{r+1}_{P'_1\times(E_2\times P'_2)}=i''_{121}\,Z^{r+1}_{P'_1}+j''_{121}\,Z^{r+1}_{E_2\times P'_1}\,,\\
&Z^{r+1}_{P_1\times(P_1\times E_1)}=i_{011}\,Z^{r+1}_{P_2}+j_{011}\,Z^{r+1}_{P_1\times E_1}\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Некоторые гомоморфизмы, связывающие в соотношениях (1), (2), (3) элементы групп когомологий, запишем в диаграмме



Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
12.II.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Шварц. Труды Московского Матем. общества, 10, 217–272 (1961).
2. А. Матузявичюс. Литовский матем. сб., II, 1, 83–90 (1962).
3. А. Матузявичюс. Литовский матем. сб., III, 2, 97–103 (1963).

INDUKUOTŲ DVIGUBŲ SLUOKSNIAVIMŲ KERTAMIEJI PAVIRŠIAI

A. MATUZEVIČIUS

(Reziumė)

Šis straipsnis yra darbų [2] ir [3] tęsinys. Jame nagrinėjami kertamieji paviršiai ir jų pratęsimo kliūtys dvigubų sluoksniavimų indukuotuose sluoksniavimuose, sudėtinguose sluoksniavimuose ir sluoksniavimų sandaugose. Šiame darbe, pritaikant straipsnių [1], [2], [3] rezultatus, nurodomos formulės, rišančios gautų sluoksniavimų charakteringąsias klases.

DIE SCHNITTFLÄCHEN IN ZWEIMALIGER FASERUNG

A. MATUZEVIČIUS

(Zusammenfassung)

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Artikel [2] und [3]. Hier werden die Schnittflächen und die Hindernisse im zweimaligen Faserraume behandelt.