IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ОБОБЩЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

Пусть $\{c_k\}$ – произвольно выбранная последовательность комплексных чисел. Обобщенной производной $D_1 y$ функции $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$, аналитической в начале координат, назовем, следуя А. О. Гельфонду и Л. Ф. Леонтьеву[1], выражение

$$D_1 y=\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} y_k x^{k-1}.$$

Рассмотрим уравнение бесконечного порядка в обобщенных производных с полиномиальными коэффициентами

$$Ly\equiv\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, D_1^k y(x)=f(x), \qquad D_1^0 y\equiv y, \tag{1}$$

где

$$P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s, \quad k=0,1,\ldots; \quad p=\sup_{k\geqslant 0}\{n_k-k\}, \qquad 0\leqslant p\leqslant\infty.$$

В настоящей работе уравнение (1) изучается в предположении, что $p<\infty$ (в этом случае уравнение будем называть квазирегулярным). Аналитическую в круге $|x|<R$ функцию $y(x)$ будем считать решением уравнения (1) в этом круге, если ряд в левой части (1) сходится равномерно внутри круга $|x|<R$ к $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$.

Лемма 1. *Если $y(x)$ – аналитическое решение уравнения (1), удовлетворяющее ему в каком-нибудь круге $|x|<R$, $R>0$, то его тейлоровские коэффициенты удовлетворяют бесконечной системе*

$$\sum_{l=0}^{r} y_l \sum_{k=0}^{l} \tau_{l,k} a_{r+k-l}^k+\sum_{l=r+1}^{\infty} y_l \sum_{k=l-r}^{l} \tau_{l,k} a_{r+k-l}^k=f_r, \qquad 0\leqslant r\leqslant p-1, \tag{2}$$

$$\sum_{l=r-p}^{r} y_l \sum_{k=0}^{l} \tau_{l,k} a_{r+k-l}^k+\sum_{l=r+1}^{\infty} y_l \sum_{k=l-r}^{l} \tau_{l,k} a_{r+k-l}^k=f_r, \qquad r\geqslant p,$$

где

$$\tau_{l,0}=1, \quad \tau_{0,0}=1 \quad \tau_{l,k}=c_{l-1}\cdot c_{l-2}\cdot\ldots\cdot c_{l-k}, \quad l\geqslant k\geqslant 1.$$

Для доказательства надо подставить выражения $D_1^k y(x)=\sum_{l=k}^{\infty}\tau_{l,k}\, y_l\, x^{l-k}$ в (1) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа; в результате, после изменения порядка суммирования, законного в силу равномерной сходимости ряда в левой части (1), приходим к соотношениям (2).

§ 1. Неособое квазирегулярное уравнение

Всюду в этом параграфе предполагается, что величины $\gamma_n=\sum_{k=0}^{n}\tau_{n,k}\, a_{k+p}^k$ отличны от нуля при $n=0, 1, 2, \ldots$ Уравнение (1) в этом случае назовем неособым квазирегулярным уравнением (н. к. ур.).

Пусть $\{\sigma_k\}$ — какая-либо последовательность, мажорирующая $|c_k|$, A_s^k — числа, мажорирующие $|a_s^k|$. Положим

$$\gamma_{r,m}=\sum_{k=\{0,\, m-r\}}^{m}\tau_{m,k}\, a_{r+k-m}^k;\quad \{a, b\}=\max(a, b);$$

$$t_{m,k}=\sigma_{m-1}\sigma_{m-2}\ldots\sigma_{m-k},\ m\geqslant k\geqslant 1;\quad t_{m,0}=1;$$

$$\delta_{r,m}=\sum_{k=\{0,\, m-r\}}^{m} t_{m,k}\, A_{r+k-m}^k;\quad \delta_n=\sum_{k=0}^{n} t_{n,k}\, A_{k+p}^k=\delta_{n+p,n};\quad \gamma_n=\gamma_{n+p,n}.$$

Обозначим через (2′) систему, полученную отбрасыванием первых p уравнений системы (2).

Лемма 2. *Пусть последовательность положительных чисел A_k удовлетворяет условию*

$$\varlimsup_{m\to\infty}\sum_{s=1}^{m-1}\frac{\delta_{s+p,m}A_s}{|\gamma_s|A_m}=q<1. \tag{3}$$

Тогда система (2′) имеет единственное решение в классе S_A последовательностей x_k таких, что $\sum_{k=0}^{\infty}A_k|x_k|<\infty$, если только последовательность $\left\{\frac{f_{r+p}}{\gamma_r}\right\}$ принадлежит S_A. При этом

$$\sum_{m=0}^{\infty}A_m|y_m|\leqslant B_1\sum_{s=0}^{\infty}A_s\left|\frac{f_{s+p}}{\gamma_s}\right|, \tag{4}$$

где B_1 не зависит от $\{f_s\}$.

Для доказательства достаточно буквально повторить доказательство леммы 2 из [2].

Лемма 3. *Пусть положительные числа A_k удовлетворяют условиям:*

1) $\sup\limits_{m\geqslant 1}\frac{A_0^m t_{m,m}}{A_m}<\infty$;

2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\delta_n}{A_n}}\leqslant\frac{1}{D}$;

3) $\sup\limits_{m\geqslant 1}\frac{\delta_{r,m}}{A_m}=\alpha_r<\infty,\quad r=0, 1, \ldots, p-1$;

4) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}\geqslant D>0$;

5) $\varlimsup\limits_{m\to\infty}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{\delta_{s+p,m}A_s}{|\gamma_s|A_m}=C<\infty$.

Пусть, далее, $K_A(D)$ — банахово пространство, состоящее из аналитических в круге $|x|<D$ функций $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$ таких, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m |y_m| = \|y\| < \infty.$$

Тогда, какова бы ни была функция $y(x)\in K_A(D)$, ряд $Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, D_1^k y(x)$ сходится регулярно внутри круга $|x|<D$. Кроме того, если $Ly = \sum_{k=0}^{\infty} l_k x^k$, то функция $L_1 y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{l_{m+p}}{\gamma_m} x^m$ принадлежит $K_A(D)$ и $\|L_1 y\| \leqslant B\|y\|$, где B не зависит от y.

Доказательство. Возьмем любое $R<D$ и оценим сначала выражение

$$S_R = \sum_{r=0}^{p-1} R^r \sum_{l=0}^{r} \frac{A_l |y_l|}{A_l} \delta_{r,l} + \sum_{r=p}^{\infty} R^r \left\{ \frac{|y_{r-p}| A_{r-p} |\gamma_{r-p}|}{A_{r-p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=r-p+1}^{\infty} \frac{A_m |y_m|}{A_m} \delta_{r,m} \right\} = S_{1,R} + S_{2,R}.$$

Имеем

$$S_{1,R} \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} A_l |y_l| \cdot \frac{1}{A_l} \sum_{r=0}^{p-1} R^r \delta_{r,l} < (R^p+1) \sum_{r=0}^{p-1} \alpha_r \sum_{l=0}^{\infty} A_l |y_l| < \infty;$$

$$S_{2,R} = R^p \sum_{r=p}^{\infty} |y_{r-p}| A_{r-p} \cdot \frac{|\gamma_{r-p}| R^{r-p}}{A_{r-p}} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m |y_m| \cdot \sum_{r=p}^{m+p-1} \frac{\delta_{r,m} R^r A_{r-p} |\gamma_{r-p}|}{A_m A_{r-p} |\gamma_{r-p}|} \leqslant$$

$$\leqslant R^p \sup_{r\geqslant p} \frac{\delta_{r-p} R^{r-p}}{A_{r-p}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k |y_k| + R^p \sup_{k\geqslant 0} \frac{R^k \delta_k}{A_k} \cdot$$

$$\cdot \sup_m \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\delta_{s+p,m} A_s}{A_m |\gamma_s|} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} A_s |y_s| < \infty.$$

Нетрудно проверить, что при любом $R<\infty \sum_{k=0}^{\infty} \max_{|x|\leqslant R} |P_k(x)\, D_1^k y(x)| \leqslant S_R$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, D_1^k y(x)$ сходится равномерно внутри круга $|x|<D$, и его сумма Ly аналитична в этом круге.

Утверждения леммы относительно $L_1 y$ вытекают из оценок

$$\frac{A_m |l_{m+p}|}{|\gamma_m|} \leqslant \frac{A_m}{|\gamma_m|} \sum_{=m}^{\infty} |y_l| |\gamma_{m+p,l}|; \qquad \|L_1 y\| = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m |l_{m+p}|}{|\gamma_m|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{|\gamma_m|} \sum_{l=m}^{\infty} |y_l| |\gamma_{m+p,l}| = \sum_{l=0}^{\infty} A_l |y_l| \cdot \frac{1}{A_l} \sum_{m=0}^{l} \frac{A_m}{|\gamma_m|} |\gamma_{m+p,l}| \leqslant$$

$$\leqslant \|y\| \left[1 + \sup_{l\geqslant 1} \frac{1}{A_l} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{A_m \delta_{m+p,l}}{|\gamma_m|} \right]; \qquad |l_k| \leqslant F_k \sum_{m=0}^{\infty} A_m |y_m|, \quad k=0,1,2,\ldots$$

Введем подкласс $K'_A(D)$ аналитических в круге $|x|<D$ функций $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$, у которых $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_{k+p}|A_k}{|\gamma_k|}<\infty$. Этот подкласс непуст и становится B-пространством, если принять

$$\|y\|_{K'_A}=\sum_{k=0}^{p-1}|y_k|+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|y_{k+p}|A_k}{|\gamma_k|}.$$

Лемма 3 утверждает, что если положительные числа A_k удовлетворяют условиям 1)–5), то оператор Ly является ограниченным оператором, действующим из $K_A(D)$ в $K'_A(D)$.

Следствие. Для разрешимости уравнения (1) в классе $K_A(D)$, порожденном последовательностью $\{A_k\}$, удовлетворяющей условиям 1)–5), необходимо, чтобы $f(x)\in K'_A(D)$.

Следующая теорема также указывает необходимые условия разрешимости, но уже иного характера.

Теорема 1. *Предположим, что последовательность A_n удовлетворяет условиям* 4) *и* (3) *и что $f(x)\in K'_A(D)$.*

Тогда, для того, чтобы уравнение (1) *имело в круге $|x|<D$ решение из класса $K_A(D)$, необходимо, чтобы выполнялись соотношения*

$$f^{(s)}(0)=\lambda_s\left(f^{(p)}(0),\ f^{(p+1)}(0),\ \dots\right),\qquad s=0,\ 1,\ \dots,\ p-1, \tag{5}$$

где $\lambda_s(x_1,\ x_2,\ \dots)$ — известные функции.

Доказательство. Если $y(x)$ — решение в круге $|x|<D$ уравнения (1), то его тейлоровские коэффициенты y_k удовлетворяют по лемме 1 системе 2. Но числа y_k в силу леммы 2 однозначно определяются из системы (2′): $y_k=\varphi_k\left(f^{(p)}(0),\ f^{(p+1)}(0),\ \dots\right)$. Подставив эти соотношения в первые p уравнений системы (2), придем к (5). Отметим, что функции φ_k и λ_s, как видно из процесса их построения линейны (аддитивны и однородны) относительно каждого своего аргумента.

Дадим теперь достаточные условня разрешимости уравнения (1) в классе $K_A(D)$.

Теорема 2. *Предположим, что числа A_k удовлетворяют условиям* (3) *и* 1)–4), *$f(x)\in K'_A(D)$ и, кроме того, $f(0)$, $f'(0)$, $\dots$ $f^{(p-1)}(0)$ удовлетворяют p линейным связям* (5).

Тогда уравнение (1) *имеет решение $y(x)$ из класса $K_A(D)$, которое удовлетворяет уравнению в этом круге. Решение единственно в классе $K_A(D)$.*

Доказательство. По лемме 2 система (2′) имеет единственное в S_A решение, которое удовлетворяет и полной системе (2) в силу соотношений (5). Функция $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} y_m x^m$ принадлежит $K_A(D)$ и поэтому аналитична в круге $|x|<D$. Кроме того, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\ D_1^k y(x)$ сходится регулярно внутри этого круга на основании леммы 3, которая здесь применима,

так как условие 5) следует из (3) и 1). Поэтому $Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, D_1^k y(x) \equiv f(x)$ в круге $|x| < D$, потому что все тейлоровские коэффициенты функций Ly и f совпадают в силу системы (2).

Наконец, уравнение (1) имеет единственное решение в $K_A(D)$, так как тейлоровские коэффициенты любого такого решения образуют последовательность из S_A и удовлетворяют системе (2), а последняя имеет единственное решение в S_A.

Теорема 2 доказана. Отметим еще оценку нормы решения. Из неравенства (4) имеем $\|y\| \leqslant B_1 \|f_1\|$, где $f_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_{s+p}}{\gamma_s} x^s$. В то же время из леммы 3 следует, что $\|f_1\| \leqslant B \|y\|$, откуда

$$B_2 \|f_1\| \leqslant \|y\| \leqslant B_1 \|f_1\|, \tag{6}$$

причем конечные положительные числа B_1 и B_2 не зависят от y и f.

Условия 1) – 4) не всегда являются независимыми. Например, если числа c_n, определяющие данную обобщенную производную $D_1 y$, таковы, что $\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{n-1}|} \geqslant 1$ (в частности, для обычной производной $c_{n-1} = n$), то легко показать, что условие 4) следует из 2). Кроме того, для данного уравнения (1) всегда можно указать последовательность чисел A_k, удовлетворяющую условиям (3) и 1) – 4); при этом число D можно выбрать как угодно большим, а также положить $D = +\infty$.

Коротко остановимся на смысле условий 1) – 4). Условие 4) необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция $y(x)$ такая, что $\sum_{k=0}^{\infty} A_k |y_k| < \infty$, была аналитической в круге $|x| < D$. Чтобы охарактеризовать смысл условий 1) – 3), возьмем один частный, но довольно важный случай, когда $A_s^k = |a_s^k| = a_s^k$ и $\sigma_k = |c_k|$, то-есть когда мажорирующие числа A_s^k и σ_k выбраны наилучшим образом и коэффициенты многочленов $P_k(x)$ неотрицательны. В этом случае условие 1) равносильно естественному требованию, чтобы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0)\, D_1^k y(x)\Big|_{x=0}$ сходился для любой функции $y(x)$ из $K_A(D)$.

Если еще дополнительно предположить, что числа c_k неотрицательны, то можно показать, что условие 2) необходимо для того, чтобы оператор Ly в левой части уравнения переводил любую функцию $y(x) \in K_A(D)$ в функцию, аналитическую в круге $|x| < D$. Наконец, условие 3) в этом же случае необходимо для того, чтобы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, D_1^k\, y(x)$ сходился для всех y из K_A в некотором круге $|x| < H$, $H = H(y)$ $H > 0$. Что же касается условия (3), то оно вызвано примененным методом доказательства.

Рассмотрим вопрос о приближенном решении уравнения (1), считая, что условия теоремы 2 выполнены.

Предположим сначала, что правая часть уравнения (1) имеет вид $\tilde{f}_{n+p}(x)=\sum_{s=0}^{p-1} f_s^n x^s+\sum_{s=p}^{n+p} f_s x^s$, где $f_s=f^{(s)}(0)$, $s=p,\ p+1,\ \dots$, а числа f_s^n будут определены ниже.

Решение будем искать в виде многочлена степени n: $y_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k^n x^k$. Из системы (2), учитывая, что $y_k^n=0$ для $k>n$, получим, что искомые коэффициенты y_k^n удовлетворяют уравнениям

$$f_r^n=\sum_{l=0}^{n} y_l \gamma_{r,l}, \qquad r=0,\ 1,\ \dots\ p-1; \tag{7}$$

$$f_r=\sum_{l=r-p}^{n} y_l \gamma_{r,l}, \qquad r=p,\quad p+1,\ \dots\ p+n. \tag{8}$$

Уравнения (8) образуют самостоятельную систему $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестными. Эта система имеет единственное решение, так как ее определитель отличен от нуля. Подставив решение системы (8) в первые p уравнений (7), определим произвольные до этого величины f_s^n, $0\leqslant s\leqslant \leqslant p-1$ так, чтобы выполнялись соотношения (7). Тогда функция $y_n(x)= =\sum_{k=0}^{n} y_k^n x^k$ как многочлен входит в $K_A(D)$ и является решением уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, D_1^k y(x)=\tilde{f}_{n+p}(x),$$

в котором $\tilde{f}_{n+p}(x)\in K_A'(D)$. Функция $Z_n(x)=y(x)-y_n(x)$ также принадлежит $K_A(D)$ и удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=0}^{8} P_k(x)\, D_1^k y(x)=f(x)-\tilde{f}_{n+p}(x)\equiv\sum_{s=0}^{\infty} f_{s,n} x^s=\sum_{s=0}^{p-1}(f_s-f_s^n)\,x^s+\sum_{s=p+n+1}^{\infty} f_s x^s. \tag{9}$$

Правая часть $f(x)-\tilde{f}_{n+p}(x)$ входит в $K_A'(D)$ и удовлетворяет условиям (5), так как функция f удовлетворяет линейным связям (5) по предположению, а $\tilde{f}_{n+p}$ — по самому способу её построения.

По теореме 2 для единственного в $K_A(D)$ решения $Z_n(x)$ уравнения (9) имеем оценку

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k\,|Z_n^{(k)}(0)|}{k!}=\sum_{k=0}^{n} A_k\,|y_k-y_k^n|+\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\,|y_k|\leqslant$$

$$\leqslant B_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k\,|f_{k+p,n}|}{|\gamma_n|}=B_1\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A_k\,|f_{k+p}|}{|\gamma_k|}. \tag{10}$$

Из оценки (10) следует, что $y_n(x)\to y(x)$ равномерно внутри круга $|x|<D$, так как для любого $R<D$

$$\max_{|x|\leqslant R}|y(x)-y_n(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k R^k\,|y_k-y_k^n|}{A_k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|y_k|\,R^k A_k}{A_k}\leqslant$$

$$\leqslant C_1(R)\left(\sum_{k=0}^{n} A_k\,|y_k-y_k^n|+\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\,|y_k|\right)\leqslant C_2(R)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A_k\,|f_{k+p}|}{|\gamma_k|}<\varepsilon$$

для $n>N(\varepsilon)$.

Мы получили следующий результат:

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то для приближенного решения уравнения* (1) *можно воспользоваться следующим способом.* Составим урезанное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\, D_1^k y(x) = f_{n+p}(x) = \sum_{k=0}^{n+p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k, \tag{11}$$

где $y(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k^n x^k$ — многочлен степени не выше n с неопределенными коэффициентами. Приравнивая в обеих частях уравнения (11) коэффициенты при одинаковых степенях x, начиная с p-ой и до высшей — $(n+p)$-ой степени, определяем единственным образом коэффициенты $y_0^n, y_1^n, \ldots y_n^n$. Тогда функция $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k^n x^k$ может служить приближенным выражением для решения $y(x)$ уравнения (1) из $K_A(D)$, причем $y_n(x) \to y(x)$ равномерно внутри круга $|x| < D$ *).

Теоремами 1 — 2 можно пользоваться практически следующим образом. Подбираем положительные числа A_k так, чтобы выполнялись условия (3) и 1) — 4). Предположим, что тейлоровские коэффициенты $f(x)$ убывают достаточно быстро — так, что $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k |f_{k+p}|}{|\gamma_k|} < \infty$. Тогда для существования решения уравнения (1) в классе $K_A(D)$ необходимо и достаточно, чтобы числа $f^{(s)}(0)$, $0 \leqslant s \leqslant p-1$, удовлетворяли p условиям (5), то-есть, фактически первым p уравнениям системы (2), в которые подставлены значения y_j, найденные из остальных уравнений системы. Значит, прежде всего надо решить в S_A систему (2) и, подставив найденные значения y_m в первые p уравнений (2), проверить, удовлетворяют ли числа f_s, $s \leqslant p-1$, соотношениям (5). Если эти соотношения выполняются, то уравнение (1) имеет единственное решение в $K_A(D)$ при данной правой части $f(x)$.

Если же соотношения (5) не выполняются, то из них мы определим, как нужно изменить („исправить") величины $f(0), f'(0), \ldots f^{(p-1)}(0)$, чтобы уравнение (1) было разрешимо.

Представляет интерес получить критерий разрешимости, эквивалентный условиям (5), но не требующий предварительного определения коэффициентов y_k. Этот критерий можно установить с помощью метода приближенного решения, описанного в теореме 3. Именно, можно доказать, что справедлив следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $\{A_k\}$ — *произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям* (3) *и* 1 (—4), *а* $f(x) \in K'_A(D)$.

Указанным в предыдущей теореме способом составим последовательность многочленов $\{y_n(x)\}$. Тогда:

1) последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится к некоторой аналитической в круге $|x| < D$ функции $Z(x)$ равномерно внутри круга $|x| < D$;

*) Стоит отметить, что функция $y_n(x)$, вообще говоря, не является решением уравнения (11).

2) существуют пределы величин $\left(Ly_n(x)\right)^{(r)}\Big|_{x=0}$, где $Ly=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)\,D^k y(x)$, при неограниченном возрастании n и при любом фиксированном $r=0,\ 1,\ \ldots\ p-1$;

3) для того, чтобы существовало решение из класса $K_A(D)$ уравнения (1) при заданной правой части f из $K'_A(D)$, необходимо и достаточно выполнение следующих p условий

$$\lim_{n\to\infty}\left(Ly_n(x)\right)^{(r)}\Big|_{x=0}=\frac{f^{(r)}(0)}{r!}, \qquad r=0,\ 1,\ \ldots\ p-1; \tag{12}$$

4) если условия (12) имеют место, то в классе $K_A(D)$ существует единственное решение $y(x)$ уравнения (1), причем $y_n(x)\to y(x)$ равномерно внутри круга $|x|<D$. На доказательстве этой теоремы мы не будем здесь останавливаться.

В заключение остановимся на одном частном типе неособого квазирегулярного уравнения. Пусть $p=\sup\limits_{k\geqslant 0}(n_k-k)=0$, то-есть, $n_k\leqslant k$ для всех $k\geqslant 0$. В этом случае линейные связи (5), которым должна удовлетворять правая часть $f(x)$, отпадают; упрощаются и условия 1)—4), а именно, исчезает условие 3). Далее, как легко видеть, функция $y_n(x)$, получаемая указанным в теореме 3 процессом, будет обычным полиномиальным решением урезанного уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\,D_1^k\,y(x)=f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Таким образом, если для уравнения (1) $p=0$, $\gamma_n\neq 0$, $n=0,\ 1,\ \ldots$, а коэффициенты a_s^k, $0\leqslant s\leqslant k-1$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, произвольны, то для такого уравнения можно построить классы $K_A(D)$ и $K'_A(D)$ так, что если $f(x)\in K'_A(D)$, то уравнение (1) имеет единственное решение в $K_A(D)$. Частным случаем рассматриваемого типа неособого квазирегулярного уравнения является так называемое регулярное уравнение

$$y(x)+\sum_{k=1}^{\infty}P_k(x)\,D_1^k\,y(x)=f(x),$$

в котором $P_k(x)$ — многочлен степени не выше $k-1$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ Для этого уравнения $\gamma_n\equiv 1$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $K'_A(D)=K_A(D)$. Мы получаем, что для любого регулярного уравнения можно указать свой класс M единственности и разрешимости такой, что для любой правой части f из M уравнение имеет единственное решение в M; при этом класс M содержит совокупность всех многочленов, но не сводится только к ней.

§ 2. Особое квазирегулярное уравнение

Если в квазирегулярном уравнении (1) не все коэффициенты γ_n отличны от нуля, то такое уравнение будем называть особым.

Вначале мы рассмотрим случай, когда в нуль обращается конечное число чисел γ_n, а именно k_0 коэффициентов $\gamma_{m_1},\gamma_{m_2},\ \ldots\ \gamma_{m_{k_0}}$ (индексы m_s расположены в порядке возрастания).

Возьмем какую-нибудь последовательность положительных чисел A_m, удовлетворяющих условиям 1) — 4), и, кроме того, таким условиям

$$6)\quad \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{A_m} \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m_i}}^{m-1} \frac{\delta_{n+p,m} A_n}{|\gamma_n|} < 1, \qquad 7)\quad \sup_{1\leqslant i\leqslant k_0} \sup_m \frac{\delta_{m_i+p,m}}{A_m} = T < \infty.$$

Легко убедиться, что такую последовательность всегда можно построить. Тогда для $m \geqslant N_1 > p + m_{k_0}$

$$\frac{1}{A_m} \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m_i}}^{m-1} \frac{\delta_{n+p,m} A_n}{|\gamma_n|} \leqslant q < 1,$$

и система

$$y_n = \frac{f_{n+p}}{\gamma_n} - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\gamma_{n+p,m}\, y_m}{\gamma_n}, \qquad n = N_1,\ N_1+1,\ \ldots,$$

которая получается выбрасыванием из системы (2′) первых N_1, уравнений, имеет единственное решение в S_A, если $\left\{\frac{f_{n+p}}{\gamma_n}\right\} \in S_A$; при этом

$$\sum_{m=N_1}^{\infty} A_m |y_m| \leqslant B_1 \sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{|f_{n+p}| A_n}{|\gamma_n|}.$$

В системе (2) остается N_1+p первых уравнений с N_1 неизвестными $(y_0,\ y_1,\ \ldots\ y_{N_1-1})$ такого вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{N_1-1} c_{m,s} y_m = f_s - \sum\limits_{m=N_1}^{\infty} c_{m,s} y_m, & s = 0,\ 1,\ \ldots\ p-1, \\ \sum\limits_{m=s-p}^{N_1-1} c_{m,s} y_m = f_s - \sum\limits_{m=N_1}^{\infty} c_{m,s} y_m, & s = p,\ p+1,\ \ldots,\ p+N_1-1. \end{cases} \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что все ряды в правых частях (13) сходятся в силу условий 1) — 4) и 6) — 7), если $\{y_m\} \in S_A$.

Из уравнений системы (13), начиная с (N_1-1+p)-го и кончая $(m_{k_0}+p+1)$-ым, определяем последовательно и однозначно коэффициенты y_{N_1-1}, y_{N_1-2}, $\ldots$ $y_{m_{k_0}+1}$ (через величины f_s и y_k, $k \geqslant N_1$). Оставшиеся числа y_s, $0 \leqslant s \leqslant m_{k_0}$, удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m_{k_0}} c_{m,s}\, y_m = f_s - \sum_{m=m_{k_0}+1}^{\infty} c_{m,s} y_m \equiv d_s, \qquad s = 0,\ 1,\ \ldots\ p-1, \\ &\gamma_{s-p} y_{s-p} + \sum_{m=s+1-p}^{m_{k_0}} c_{m,s}\, y_m = f_s - \sum_{m=m_{k_0}+1}^{\infty} c_{m,s} y_m \equiv d_s, \quad s = p, p+1, \ldots p + m_{k_0}. \end{aligned} \tag{14}$$

Мы получили систему $m_{k_0}+p+1$ уравнений с m_0+1 неизвестными. Пусть r — ранг матрицы F этой системы. Легко заметить, что $m_{k_0}+1-k_0 \leqslant r \leqslant m_{k_0}+1$. Для существования решения системы (14) необходимо, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла $m_{k_0}+1+p-r$ линейным связям (на коэффициенты $f^{(k)}(0)$, $k \leqslant m_{k_0}+p$); в случае выполнения этих условий решение системы (14) существует и зависит от $m_{k_0}+1-r$ произвольных постоянных.

Каждому решению $(y_0, y_1, \ldots y_{m_{k_0}})$ системы (14) соответствует однозначно последовательность $(y_0, y_1, \ldots y_{m_{k_0}}, y_{m_{k_0}+1}, y_{m_{k_0}+2}, \ldots y_{N_1-1}\, y_{N_1}, y_{N_1+1}, \ldots)$, удовлетворяющая полной системе (2); при этом числа y_k, $k \geqslant m_{k_0}+1$ однозначно определены через y_s, $s \leqslant m_{k_0}$. Если составить функцию $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m x^m$, то, как нетрудно проверить, $y(x)$ будет решением в круге $|x| < D$ уравнения (1) из класса $K_A(D)$. Действительно,

$$\sum_{m=N_1}^{\infty} A_m |y_m| \leqslant B_1 \sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{|f_{n+p}| A_n}{|\gamma_n|} < \infty, \quad \text{и} \quad y(x) \in K_A(D).$$

Остается только установить, что выражение

$$S(R) = \sum_{r=0}^{p} R^r \sum_{m=r+1}^{\infty} |y_m| \delta_{r,m} + \sum_{r=p+1}^{\infty} R^r \sum_{m=r-p}^{\infty} |y_m| \delta_{r,m} = S_{1,R} + S_{2,R}$$

остается конечным при любом $R < D$. Оценка для $S_{1,R}$ получается без всяких изменений точно так же, как в лемме 3, а величина $S_{2,R}$ оценивается по тому же плану, что и в этой лемме, только используются условия 1)—4) и 6)—7). В итоге мы получили такой результат.

Теорема 5. *Пусть числа γ_n обращаются в нуль конечное число раз $(\gamma_{m_1} = \gamma_{m_2} = \ldots = \gamma_{m_{k_0}} = 0)$, последовательность положительных чисел A_m удовлетворяет условия 1)—4) и 6)—7), а правая часть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ такова, что $\sum_{n=m_{k_0}+1}^{\infty} \frac{A_n |f_{n+p}|}{|\gamma_n|} < \infty$. Тогда для того, чтобы уравнение (1) имело решение в K_A, необходимо и достаточно, чтобы правая часть $f(x)$ удовлетворяла $m_{k_0}+1+p-r$ линейным условиям, где r, $m_{k_0}+1-k_0 \leqslant r \leqslant m_{k_0}+1$, — некоторое число, определяемое коэффициентами многочленов $P_k(x)$ и не зависящее от $f(x)$.*

Если эти условия выполняются, то уравнение (1) разрешимо в классе K_A, причем решение зависит от $m_{k_0}+1-r$ произвольных постоянных.

Можно, как и в предыдущем параграфе, дать оценку нормы решения и указать видоизмененный способ редукции для приближенного решения, но мы уже не будем на этом останавливаться.

Следствие. Пусть квазирегулярное уравнение (1) таково, что разве лишь конечное число $(k_0 \geqslant 0)$ коэффициентов γ_n обращается в нуль. Пусть, далее, $K_A'(D)$ — класс функций, определенный последовательностью A_m, для которой выполняются условия 1)—4) и 6)—7) (если $k_0 = 0$, то условия 6)—7) заменяются условием (3)). Тогда разность между числом условий на правую часть $f(x) \in K_A'(D)$, необходимых и достаточных для разрешимости уравнения в классе $K_A(D)$, и между числом произвольных постоянных в решении из K_A, равна $p = \sup_{k \geqslant 0} \{n_k - k\}$. Этот факт найдет естественное объяснение несколько ниже, когда будет показано, что оператор Ly является нормально-разрешимым оператором.

Для практического применения теоремы 4 важно иметь достаточно простые условия, при выполнении которых может обращаться в нуль только конечное число чисел γ_n. Одним из таких признаков является, как легко показать, например, следующий: $\sup\limits_{k\geqslant 0}\{n_n-k\}=p$ достигается конечное число раз, а коэффициенты c_l оператора обобщенной производной $D_1 y$ таковы, что $|c_l|\to\infty$ при $l\to\infty$.

Этот признак выполняется, например, для уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{q} a_s^k x^s\right) y^{(k)}(x)=f(x)$$

к которому применима, таким образом, теорема 5.

Квазирегулярное уравнение (1), у которого бесчисленное число коэффициентов обращается в нуль, назовем существенно особым. Исследование такого уравнения в классах типа $K_A(D)$ не позволяет получить таких простых закономерностей, вроде теорем 1, 2, 5. Более того, на примерах можно показать, что в случае существенно особого уравнения возможно любое число условий на правую часть, необходимых для разрешимости, и любое число произвольных постоянных в решении. Положим, например, $D_1 y=\frac{y(x)-y(0)}{x}$. Тогда

$$D_1^k y(x)=x^{-k}\left[y(x)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n\right].$$

Рассмотрим уравнение $a_0 y - x a_0 D_1 y = g(x)$, эквивалентное соотношению $a_0 y(0)=g(x)$. Очевидно, что в данном случае решение существует, если $g(x)$ удовлетворяет счетному числу условий $\left(0=g'(0)=g''(0)=\ldots\right)$ и зависит от счетного же числа произвольных постоянных $y'(0)$, $y''(0)$, ...

Если же рассмотреть уравнение $a_0 y - x a_0 D_1 y + a_2 D_1^2 y = g(x)$, то оно будет эквивалентно соотношению

$$y(x)=\left[g(x)-a_0 y(0)\right]x^2(a_2)^{-1}+y(0)+xy'(0).$$

Решение существует (при $a_2\neq 0$) для любой аналитической в начале координат функции $g(x)$, аналитично в том же круге, что и $g(x)$, и зависит от двух произвольных постоянных $y(0)$ и $y'(0)$.

§ 3. Некоторые классы квазирегулярных уравнений

Прежде чем рассмотреть некоторые конкретные классы квазирегулярных уравнений, запишем, какой вид принимают условия 1) – 4) и (3) в случае, когда

$$Dy\equiv y',\quad p=0,\quad \sigma_k=|c_k|=k+1,\quad A_m^k=|a_m^k|.$$

Тогда $t_{m,k}=\frac{m!}{(m-k)!}$, условие 3) отпадает, а остальные запишутся так:

1) $$\sup_m \frac{|a_0^m|\,m!}{A_m}<\infty;$$

2) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\delta_n}{A_n}}\leqslant\frac{1}{D};\qquad \delta_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}|a_k^k|;$$

3) $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sum\limits_{s=1}^{m-1} \frac{\delta_{s,m} A_s}{|\gamma_s| A_m} < 1; \qquad \delta_{s,m} = \sum\limits_{k=m-s}^{m} \frac{m!}{(m-k)!} |a_{s+k-m}^k|.$

4) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{A_n} \geqslant D > 0.$

Теорема 6. *Предположим, что для уравнения*

$$y(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^k x^k y^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \qquad P_k(x) = \sum_{s=0}^{k-1} a_s^k x^s, \tag{15}$$

выполняются следующие условия:

А) $\gamma_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!\, a_k^k}{(n-k)!} \neq 0,\ n = 0, 1, \ldots;$ Б) *функция* $F(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, P_n(x)}{t^n}$

аналитична в замкнутом бицилиндре T_{R_0}: $|x| \leqslant R_0$, $|t| \geqslant R_1 = \delta R_0$;

В) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\gamma_n|} = \alpha > 1 + \delta;$ Г) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\, |a_n^n|} = D_1 < \infty.$

Тогда, если функция $f(x)$ аналитична в круге $|x| \leqslant R$ $\left(\text{где } R > \frac{R_0(1+\delta)}{\alpha}\right)$, то уравнение (15) имеет решение, аналитическое в круге $|x| < R\alpha$ и удовлетворяющее уравнению в круге $|x| < \frac{R\alpha}{D_1+1}$. Решение единственно в классе функций, аналитических в замкнутом круге $|x| \leqslant R_0(1+\delta)$. Последовательность решений $y_n(x)$ урезанных уравнений сходится к $y(x)$ равномерно внутри круга $|x| < \frac{R\alpha}{D_1+1}$.

Доказательство. Положим $A_m = Q^m$, где $Q > R_0(1+\delta) = R_0 + R_1$, и проверим выполнение условий 1), 2), 4) и (3). В силу Г) и Б)

$$\underset{k \leqslant m-1}{|a_k^m|} \leqslant B \frac{(R_1)^m}{m!\,(R_0)^k}; \qquad |a_k^k| \leqslant A(\varepsilon) \frac{(D_1+\varepsilon)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots;$$

1) $$\sup_m \frac{A_0^m\, m!}{A_m} \leqslant \sup_m B \left(\frac{R_1}{Q}\right)^m < \infty;$$

2) $\delta_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} |a_k^k| \leqslant A(\varepsilon)(1 + D_1 + \varepsilon)^n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\delta_n} \leqslant 1 + D_1$, и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{\delta_n}{A_n}} \leqslant \frac{1+D_1}{Q} \leqslant \frac{1}{D}, \quad \text{если} \quad D \leqslant \frac{Q}{1+D_1}.$$

Выполнение условия 4) очевидно (если $D \leqslant Q$), и осталось проверить условие (3):

$$\underset{n \leqslant m-1}{\delta_{n,m}} \leqslant m! \sum_{k=0}^{m} \frac{|a_{n+k-m}^k|}{(m-k)!} \leqslant m!\, B \sum_{k=0}^{m} \frac{R_1^k R_0^{m-k-n}}{(m-k)!\, k!} = BR_0^{-n}(R_1 + R_0)^m =$$

$$= B(1+\delta)^m R_0^{m-n};$$

$$\frac{1}{A_m} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\delta_{n,m} A_n}{|\gamma_n|} \leqslant E(\varepsilon) \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(1+\delta)^m Q^{n-m} R_0^{m-n}}{(\alpha-\varepsilon)^n} \leqslant$$

$$\leqslant H(\varepsilon) \cdot m \left[\left(\frac{(1+\delta) R_0}{Q}\right)^m + \left(\frac{1+\delta}{\alpha-\varepsilon}\right)^m\right] < \eta < 1$$

для $m > m_0(\eta)$. Таким образом условия (3) и 1) – 4) выполнены, если положить $D = \inf\left\{Q, \frac{Q}{1+D_1}\right\} = \frac{Q}{1+D_1}$. По теореме 2 находим, что если $f(x) \in K'_A(D)$, то-есть, если $\bar{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{\gamma_k} x^k \in K_A(D)$, то уравнение (15) имеет единственное в K_A решение, удовлетворяющее ему в круге $|x| < D$. Если через A_R обозначить пространство функций, аналитических в круге $|x| < R$, а через $\bar{A}_R$ – в замкнутом круге $|x| \leqslant R$, то, очевидно, $A_Q \supset K_A(D) \supset A_Q$. Кроме того, если $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|f_k|} < \frac{\alpha}{Q}$, то $\bar{f} \in \bar{A}_Q \subset K_A$. Если решение единственно в K_A, то оно подавно единственно в $\bar{A}_Q$. Итак, если $f(x)$ аналитична в круге $|x| \leqslant \frac{Q}{\alpha}$, где $Q > R_0 + R_1$, то уравнение (1) имеет решение, аналитическое в круге $|x| < Q$ и удовлетворяющее ему в круге $|x| < \frac{Q}{1+D_1}$. При этом однородное уравнение имеет только нулевое решение в классе функций, аналитических в круге $|x| \leqslant Q$. Так как для однородного уравнения Q можно взять как угодно близким к $(1+\delta)R_0$, то единственность имеет место в классе функций, аналитических в круге $|x| \leqslant (1+\delta)R_0$. Для завершения доказательства остается только заменить Q на $R\alpha$. Можно также показать, что если R_1 и R_2 – точные радиусы аналитичности функций $y(x)$ и $f(x)$, то $R_2\alpha \leqslant R_1 \leqslant R_2(1+D_1)$.

Теорема 6 была доказана ранее иным методом (сведением к интегральному уравнению) в работе [3] (см. теорему 7 этой статьи; следует только иметь в виду, что в формулировке теоремы 7 условие 2) на стр. 117 лишнее, так как оно вытекает из условия 4), ибо, как легко показать $\left(\text{в обозначениях (3)}, \ \beta \leqslant 1 + D\right)$. Кроме того, в теореме 7 получен более узкий класс единственности, чем в теореме 6 настоящей работы, а именно, класс функций, аналитических в круге $|x| \leqslant (1+D_1)R$ (имеем $1 + D_1 \geqslant \alpha > 1 + \delta$).

Следует отметить, что методом данной работы может быть получена и теорема 6 из [3], и таким образом, все результаты статьи [3], относящиеся к конкретным классам квазирегулярных уравнений, укладываются в схему развитой здесь общей теории.

В то же время изложенный здесь метод позволяет найти и новые результаты, которые не удалось получить методом работы [3]. Приведем без доказательства некоторые из этих результатов.

Теорема 7. *Пусть для уравнения* (15) *выполняются условия* A (–B) *и, кроме того,* $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k^k|} = H < \infty$. *Тогда, если $f(x)$ – экспоненциальная функция степени $I < \frac{\alpha}{R_0+R_1}$, то уравнение* (15) *имеет решение $y(x)$ – экспоненциальную функцию типа не выше $\frac{I}{\alpha}$, удовлетворяющую ему в круге $|x| < \frac{\alpha}{HI}$.* Решение единственно в классе экспоненциальных функций типа $< \frac{1}{R_0+R_1}$. Если $y_n(x)$ – приближенное решение (полиномиальное решение урезанного уравнения) то $y_n(x) \to y(x)$ равномерно внутри круга $|x| < \frac{\alpha}{HI}$.

Теорема 8. *Пусть для уравнения* (15) *выполняются условия* А)—В) *и* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\delta_n}{|\gamma_n|}<\infty$. *Пусть, далее,* $R_2=\max\left\{R_1, \frac{R_0+R_1}{\alpha}\right\}$. *Тогда для любой функции* $f(x)$, *аналитической в круге* $|x|<R$, $R>R_2$, *уравнение* (15) *имеет решение* $y(x)$, *аналитическое в круге* $|x|<R\alpha$ *и удовлетворяющее ему в круге* $|x|<R$. Единственность имеет место в классе функций $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k x^k$, аналитических в круге $|x|<R\alpha$ и таких, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\delta_n|y_n|}<\frac{1}{R_2}$. Если же $f(x)$ — экспоненциальная функция степени σ, то решение также является экспоненциальной функцией степени $\leqslant\frac{\sigma}{\alpha}$ и удовлетворяет уравнению при всех конечных x.

Можно также рассмотреть уравнение Эйлера бесконечного порядка

$$y(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n y^{(n)}(x)=f(x)$$

и получить для него теорему 3 из [4], доказанную там несколько иным методом.

Приведем в заключение один результат для дифференциального уравнения бесконечного порядка с быстро растущими многочленными коэффициентами фиксированной степени:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(x)\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s=f(x), \tag{16}$$

где

$$\infty>p'=\sup_{k\geqslant 0}\{n_k\}>0; \qquad p=\sup_{k\geqslant 0}\{n_k-k\}<\infty \tag{17}$$

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant p}\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{|a_s^k|}{(k!)^{\mu}}}=d<\infty, \qquad \mu>0. \tag{18}$$

Обозначим через B_0 класс $\left[\frac{1}{1+\mu}, (1+\mu)\alpha^{-\frac{1}{1+\mu}}\right)$, то-есть, совокупность целых функций, у которых порядок $<\frac{1}{1+\mu}$, или порядок $=\frac{1}{1+\mu}$, но тип $<(1+\mu)\alpha^{-\frac{1}{1+\mu}}$. Из общей теории, изложенной в § 2, можно вывести следующий результат:

Теорема 9. *Пусть для уравнения* (16) *имеют место условия* (17)—(18), *и* $f(x)\in B_0$. *Тогда для того, чтобы уравнение* (16) *имело решение в классе* B_0, *необходимо и достаточно, чтобы правая часть* $f(x)$ *удовлетворяла* $q+p$ *линейным условиям; в случае, если эти условия выполняются, решение зависит от* q *произвольных постоянных.* Число q определяется коэффициентами a_s^k (точнее, несколькими первыми из них, для $k\leqslant k_1$) и не зависит от $f(x)$, $y(x)$ и μ.

§ 4. Применение теории нормально-разрешимых операторов

Результаты настоящей работы становятся более прозрачными, если к исследованию квазирегулярного уравнения (1) привлечь теорию нормально-разрешимых операторов [5]−[7]. (Мы предполагаем, что читатель знаком с этой теорией хотя бы в объёме § 11 работы [7] или § 2 работы [6].)

Начнем с неособого квазирегулярного уравнения. Вопрос о разрешимости уравнения (1) в классе K_A при условии, что соответствующая последовательность A_k удовлетворяет условиям (3) и 1) – 4), а правая часть принадлежит K'_A, эквивалентен в силу лемм 1 – 3 вопросу о разрешимости в S_A системы (2), в которой правая часть $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ принадлежит пространству S'_A последовательностей $(x_0, x_1, \ldots)$ таких, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A_k |x_{k+p}|}{|\gamma_k|} < \infty$. Множества S_A и S'_A будут банаховыми пространствами, если положить

$$\| X \|_{S_A} = \| X \| = \sum_{k=0}^{\infty} A_k |x_k|; \qquad \| X \|_{S'_A} = \| X \|' = \sum_{k=0}^{p-1} |x_k| + \sum_{k=p}^{\infty} \frac{|x_k| A_{k-p}}{|\gamma_{k-p}|}.$$

Тогда систему (2) можно переписать коротко так

$$MY = F, \quad Y(y_0, y_1, \ldots) \in S_A, \quad F(f_0, f_1, \ldots) \in S'_A.$$

где, на основании лемм 1 – 3, M – ограниченный оператор, действующий из S_A в S'_A, Запишем систему (2) теперь в таком виде:

$$(MY)_k \equiv \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} y_l = f_k, \qquad k = 0, 1, \ldots p-1) \tag{19}$$

$$(MY)_k \equiv \sum_{l=k-p}^{\infty} a_{k,l} y_l = f_k, \qquad k = p, \; p+1, \ldots \tag{20}$$

Представим оператор MY в виде суммы двух операторов

$$MY = M_1 Y + M_2 Y; \qquad M_1 Y = (0, 0, \ldots 0, (MY)_p, \; (MY)_{p+1}, \ldots);$$

$$M_2 Y = \Big((MY)_1, (MY)_2, \ldots (MY)_{p-1}, \; 0, 0, \ldots\Big).$$

Очевидно, что $M_1 Y$ и $M_2 Y$ – ограниченные линейные операторы, действующие из S_A в S'_A.

Если числа A_k удовлетворяют условиям (3) и 1) – 4), то система (20), как было показано (лемма 2), имеет единственное решение в S_A для любой последовательности $(f_p, f_{p+1}, \ldots)$ такой, что $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{A_s |f_{s+p}|}{|\gamma_s|} < \infty$. Иначе говоря, для разрешимости в пространстве S_A уравнения

$$M_1 Y = b,$$

где $b \in S'_A$, необходимо и достаточно выполнение p условий

$$(b)_0 = (b)_1 = \ldots = (b)_{p-1} = 0.$$

Очевидно, что множество значений оператора $M_1 Y$ замкнуто в S'_A. Следовательно, оператор $M_1 Y$ будет ограниченным нормально-разрешимым оператором, действующим из S_A в S'_A, с конечной d – характеристикой $(0, p)$.

Покажем, что весь оператор MY также будет нормально-разрешимым (н.-р.) оператором с той же d - характеристикой.

В силу известной теоремы Аткинсона – Крейна – Красносельского – Гохберга для оператора M_1 найдется такое число ρ, что всякий ограниченный линейный оператор R, действующий из S_A в S'_A и такой, что $\| R - M_1 \| < \rho$, будет н.-р. оператором с конечной d-характеристикой (α, β), причем

$p-\beta=0-\alpha\geqslant 0$. Но $\alpha\geqslant 0$, откуда $\alpha=0$ и $p-\beta=0$, $p=\beta$. Итак, любой ограниченный линейный оператор R такой, что $\| R-M_1\| < \rho$, имеет ту же d-характеристику $(0, p)$, что и M_1.

Обозначим через QY оператор, определенный соотношениями

$$(QY)_k=\begin{cases} y_k\frac{\rho}{2\,\|M_2\|}, & 0\leqslant k\leqslant p-1,\\ y_k, & k\geqslant p.\end{cases}$$

Очевидно, что QY преобразует взаимно-однозначно и непрерывно S_A в S_A и S'_A в S'_A. Рассмотрим уравнение

$$(QM)\,Y=F_1, \qquad F_1\in S'_A. \tag{21}$$

Так как $QM=QM_2+QM_1=QM_2+M_1=\frac{\rho}{2\,\|M_2\|}M_2+M_1$, то $\|QM-M_1\|\leqslant\frac{\rho}{2}$, и QM — н.-р. оператор с характеристикой $(0, p)$. Но любой элемент F_1 из S'_A можно представить единственным образом в виде $F_1=QF$, $F\in S'_A$; кроме того, если Y — любой элемент из S_A, то

$$(QM)\,Y=Q\,(MY), \qquad MY\in S'_A.$$

Поэтому уравнение (21) перепишется так

$$Q\,[MY-F]=0, \qquad MY-F\in S'_A,$$

или, в силу того, что Q имеет обратный, $MY-F=0$. Итак, уравнение (21) эквивалентно уравнению $MY=F$, и оператор MY будет н.-р, оператором с характеристикой $(0, p)$. Это означает, что уравнение (1) разрешимо в K_A тогда и только тогда, когда правая часть $f(x)$ из K'_A удовлетворяет p линейным условиям; если эти условия выполнены, то решение в K_A единственно.

Выясним теперь смысл этих условий. Согласно общей теории н.-р. операторов, они имеют вид

$$\Psi_j(F)=0, \qquad j=0,\ 1,\ \dots\ p-1,$$

где Ψ_j — нетривиальные решения из $(S'_A)^*$ „сопряженного" уравнения

$$M_\tau\Psi=0,$$

в котором M_τ — „сопряженный" к M оператор, определяемый равенством

$$M_\tau\,\varphi=\varphi\,(MY), \quad \varphi\in(S'_A)^*, \quad M_\tau\,\varphi\in(S_A)^*.$$

Найдем матричное представление оператора $M_\tau\,\varphi$. Линейный функционал $\varphi=\varphi\,(X)\in(S'_A)^*$ имеет вид (8)

$$\varphi\,(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k x_k,$$

где $X\,(x_k)\in S'_A$, а $\{\eta_k\}$ — произвольная последовательность конечных чисел такая, что $\sup\limits_{k\geqslant p}\frac{|\eta_k|\,|\gamma_{k-p}|}{A_{k-p}}<\infty$, то-есть последовательность из $(S'_A)^0$ — пространства, взаимного с S'_A. Запишем систему (2) (то-есть, (19) и (20)) в таком виде

$$(MY)_k\equiv\sum_{l=0}^{\infty}b_{k,l}\,y_l=f_k, \qquad k=0,\ 1,\ \dots$$

Тогда

$$\varphi(MY)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k\sum_{l=0}^{\infty}b_{k,l}y_l=\sum_{l=0}^{\infty}y_l\sum_{k=0}^{\infty}b_{k,l}\eta_k.$$

Изменение порядка суммирования нетрудно обосновать, показав, что в силу условий 1) – 5) $\sum_{l=0}^{\infty}|y_l|\sum_{k=0}^{\infty}|b_{k,l}||\eta_k|<\infty$ для любых последовательностей $\{y_l\}\in S_A$ и $\{\eta_k\}$ из $(S'_A)^0$ $\Big($пространства $(S'_A)^*$ и $(S'_A)^0$ изометричны$\Big)$. Отсюда

$$M_\tau\varphi(Y)=\sum_{l=0}^{\infty}y_l\sum_{k=0}^{\infty}b_{k,l}\eta_k=\sum_{l=0}^{\infty}t_ly_l;$$

$$t_l=\sum_{k=0}^{\infty}b_{k,l}\eta_k,\qquad l=0,\ 1,\ \ldots;\qquad \{t_l\}\in(S_A)^0.$$

Таким образом, сопряженный к MY оператор $M_\tau\psi$ порожден матрицей, транспортированной к матрице, порождающей оператор MY, то-есть, k матрице системы (2). Теперь можно сформулировать полученный результат.

Теорема 10. *Предположим, что последовательность положительных чисел A_k удовлетворяет условиям* (3) *и* 1 (–4). *Тогда для того, чтобы уравнение* (1) *было разрешимо в классе $K_A(D)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}f_mx^m\in K'_A(D)$, *то-есть* $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|f_{m+p}|A_m}{|\gamma_m|}<\infty$;

2) *имеют место p соотношений вида*

$$\sum_{m=0}^{\infty}f_m\eta_m^{(k)}=0,\qquad k=0,\ 1,\ \ldots\ p-1,$$

где $(\eta_0^{(k)},\ \eta_1^{(k)},\ \ldots)$ – *решение „транспортированной" к* (2) *системы*

$$(HZ)_l\equiv\sum_{m=0}^{\infty}b_{m,l}z_m=0,\qquad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\tag{22}$$

из пространства последовательностей $\{z_m\}$ *таких, что*

$$\sup_{m\geqslant p}\left|\frac{z_m\gamma_{m-p}}{A_m}\right|<\infty.$$

Иначе говоря, последовательность $(f_0,\ f_1,\ \ldots)$ тейлоровских коэффициентов правой части $f(x)$ должна быть ортогональна к p решениям из пространства $(S'_A)^0$ однородной транспонированной $\Big($относительно (2)$\Big)$ системы (22).

Заметим еще, что $b_{k,l}=0$ для $k\geqslant p$ и $l<k-p$ $\Big($см. систему (2)$\Big)$. Поэтому система (22) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{l+p}b_{k,l}y_k=0,\qquad l=0,\ 1,\ \ldots$$

Перейдем теперь к несущественно особому квазирегулярному уравнению (то-есть к особому уравнению, у которого обращается в нуль конечное число коэффициентов $\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2}, \ldots \gamma_{m_{k_0}}$).

Представим оператор MY, как и выше, в виде суммы двух операторов

$$M_2 Y=\Big((MY)_0, (MY)_1, \ldots (MY)_{N-1}, 0, 0, \ldots\Big)$$

$$M_1 Y=\Big(0, 0, \ldots 0, (MY)_N, (MY)_{N+1}, \ldots\Big)$$

причем $N=m_{k_0}+p+1$. Из результатов, изложенных в § 2 (стр. 53—54), следует, что оператор $M_1 Y$ является н.-р. оператором с характеристикой $(N-p, N)$ (так как первые N координат оператора $M_1 Y$ равны нулю, то это дает N условий; в то же время, если записать выражения для координат оператора $M_1 Y$, то заметим, что они не содержат первых $N-p$ координат решения $y_0, y_1, \ldots y_{N-p-1}$, которые, таким образом, остаются произвольными).

Как и выше, в случае неособого квазирегулярного уравнения, находим, что $MY=M_1 Y+M_2 Y$ будет н.-р, оператором с конечной d-характеристикой (α, β), причем

$$\beta-\alpha=p; \quad N-p-\alpha=N-\beta\geqslant 0, \quad N=m_{k_0}+p+1,$$

откуда

$$0\leqslant\alpha\leqslant m_{k_0}+1, \quad p\leqslant\beta\leqslant m_{k_0}+1+p.$$

Мы получаем, что для того, чтобы уравнение (1) было разрешимо в K_A для данной правой части f из K'_A, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(f_0, f_1, \ldots)$ была ортогональна ко всем β решениям из пространства $(S'_A)^0$ однородной транспонированной системы

$$\sum_{k=0}^{l+p} b_{k,l} z_k=0, \qquad l=0, 1, 2, \ldots$$

Ростовский государственный университет

Поступило в редакцию 13.III.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Гельфонд и А. Ф. Леонтьев. Об одном обобщении ряда Фурье, Матем. сборник, т. **29** (71): 3 (1951), 477—500.
2. Ю. Ф. Коробейник. Об аналитических решениях уравнения бесконечного порядка с многочленными коэффициентами, Известия ВУЗ'ов, (1959), № 3 (10), 130—146.
3. Ю. Ф. Коробейник. Об одном методе исследования дифференциального уравнения бесконечного порядка, Матем. сборник, 1962, т. **56** (98):1, 107—128.
4. Ю. Ф. Коробейник. Об одном классе дифференциальных уравнений бесконечного порядка с переменными коэффициентами, Известия ВУЗ'ов, 1962, № 4 (29), 73—80.
5. А. В. Аткинсон. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сборник, 1951, т. **28** (70): 1, 3—14.
6. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, 1957, т. **XII**, в. 2 (74), 43—118.
7. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 1958, т. **XIII**, в. 5 (83), 3—120.
9. Л. В. Канторович и И. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, ГИФМЛ, 1959.

BEGALINĖS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SU APIBENDRINTOMIS IŠVESTINĖMIS KLAUSIMU

J. F. KOROBEINIKAS

(Reziumė)

Sakysime, $\{c_k\}$ yra bet kaip fiksuota kompleksinių skaičių seka ir $y(z)=\sum_{k=0}^{n} y_k z^k$ – analizinė taške $z=0$ funkcija. Reiškinys

$$D_1 y=\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} y_k z^{k-1}$$

yra vadinamas apibendrinta Gelfondo – Leontjevo prasme funkcijos $y(z)$ išvestinė.

Darbe tiriami lygties

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) D_1^k y(x)=f(x)$$

analiziniai sprendiniai. Leidžiame, kad

$$D_1^0 y=y, \quad D_1^k y=D_1(D_1^{k-1} y), \quad P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s,$$

$k=0, 1, 2, \ldots$ ir $p=\sup_{k\geqslant 0}\{n_k-k\}<+\infty$.

ONE CLASS OF THE EQATIONS OF INFINITE ORDER IN GENERALIZED DERIVATIVES

J. F. KOROBEINIK

(Summary)

Let $\{c_k\}$ be some arbitrary fixed succession of complex numbers. We shall name a generalized derivative in Gelfond-Leonteff's sence $D_1 y$ of any function $y(z)$, analytic in the origin, the following expression:

$$D_1 y=\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} y_k z^k.$$

In this article the author studies analytic solutions of the equation of infinite order in generalized derivatives:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) D_1^k y(x)=f(x)$$

where

$$D_1^0 y=y, \quad D_1^k y\equiv D_1(D_1^{k-1} y), \quad P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s, \qquad k=0, 1, 2, \ldots$$

and

$$p=\sup_{k\geqslant 0}\{n_k-k\}<\infty.$$