VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

ПОЛНЫЙ ОБЪЕКТ ЦЕНТРО-ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ И ОБЪЕКТ КРУЧЕНИЯ-КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОПУНКТОРОВ

В. И. БЛИЗНИКАС

Введение

Структура многообразия V_n задается при помощи совокупности локальных карт, которые удовлетворяют аксиомам атласа, причем класс атласа определяет и класс многообразия. Будем рассматривать многообразия только класса ω (аналитические многообразия), если специально не указан класс многообразия. Структура дифференцируемого многообразия класса C^ω определяется отношением эквивалентности между атласами [8].

Рассмотрим совокупность координатных систем $\{x^i\}$ класса C^ω в точке (x_0^i) аналитического многообразия V_n. Если $\{x^i\}$ и $\{x^{i'}\}$ две координатные системы многообразия V_n, то

$$S: \quad x^{i'} = x^{i'}(x^i); \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

и

$$\det \left\| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\| \neq 0$$

в окрестности точки (x_0^i). Множество преобразований $\{S\}$ образуют псевдогруппу G. Множество дифференциальных продолжений порядка p всех пребразований псевдогруппы G является псевдогруппой регулярных преобразований в $n(p+1)$-мерном пространстве переменных $(x^i, dx^i, d^2x^i, \ldots, d^p x^i)$ и называется дифференциальным продолжением порядка p данной псевдогруппы [4].

С данной точкой (x_0^i) аналитического многообразия V_n можно ассоциировать специальные группы: n^2-параметрическую группу центро-аффинных преобразований, $n(n+1)$-параметрическую группу дробно-линейных преобразований и др. Если выбрана какая-нибудь ассоциированная группа g, то с каждой точкой (x_0^i) многообразия V_n можно связать некоторое новое пространство W, фундаментальная группа которого изоморфна группе g. При построении теории римановых пространств, пространств аффинной связности и пространств проективной связности в качестве пространств W берутся чаще всего центро-аффинные и центро-проективные пространства и только в отдельных случаях — пространства пункторов или копункторов.

Система функций ξ^A класса дифференцируемости C^r, определенных в точке (x_0^i) многообразия V_n, называется дифференциально-геометрическим объектом класса p, если его компоненты при преобразованиях продолженной псевдогруппы G преобразуются по транзитивному закону

$$\xi^{A'}=\xi^{A'}\left(\xi^{A},\ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}},\ \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}},\ \ldots,\ \frac{\partial^p x^{i'}}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_p}}\right)$$

$$(A,\ B,\ C=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Если на многообразии V_n задано поле некоторого дифференциально-геометрического объекта ξ, то этим в многообразии V_n будет определена некоторая специальная структура, т. е. будет установлена некоторая геометрия в смысле наличия инвариантов и инвариантных операций, присоединенных к объекту ξ относительно преобразований псевдогруппы G. Два объекта ξ и $\bar{\xi}$ определяют одну и ту же геометрию многообразия V_n в том и только в том случае, когда они эквивалентны. Например, геометрия пространства аффинной связности определяется при помощи объекта Γ^i_{jk}:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\ \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\ \Gamma^i_{jk}; \tag{2}$$

проективное пространство Веблена-Уайтхеда — объектом Π^i_{jk}:

$$\Pi^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\ \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\ \Pi^i_{jk}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\ \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}+\frac{2}{n+1}\ \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\ \frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^{k'}}; \tag{3}$$

пространство центро-проективной связности [7] — объектом $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{ij})$:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\ \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\ \Gamma^i_{jk},$$

$$\Gamma_{j'k'}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\ \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\left\{\Gamma_{jk}-\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^j\partial x^k}+\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^p}\ \Gamma^p_{jk}\right\} \tag{4}$$

и т. д. В первых двух примерах объект ξ имеет класс $p=2$, а в третьем — $p=3$.

Если на многообразии V_n задано поле дифференциально-геометрического объекта ξ класса p ($p<v$, где v — класс многообразия V_n), то каждой точке (x^i_0) пространства V_n можно ассоциировать пространство значений объекта ξ, которое гомоморфное N-мерной области евклидова пространства (N-число существенных компонент объекта ξ). Таким образом получается многообразие $n+N$ измерений V_{n+N}, которое называется пространством опорных элементов [6]. Это пространство является топологическим произведением пространства V_n и пространства значений объекта ξ.

При помощи поля дифференциально-геометрического объекта Ξ, заданного на V_{n+N}, определяется внутренняя геометрия многообразия V_{n+N}. При том или ином выборе опорного объекта ξ и фундаментального объекта Ξ получаются различные геометрии. Приведем некоторые примеры таких геометрий:

a) *пространство линейных элементов аффинной связности.* В этом случае:

$$\xi: \quad v^{i'} = \rho \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i \quad (\rho > 0),$$

$$\Xi: \begin{cases} C^{i'}_{j'k'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} C^i_{jk}, \\ \Gamma^{i'}_{j'k'} = \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} + \dfrac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'} \partial x^{l'}} \dfrac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} v^l C^i_{jk} \right\}, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$C^i_{jk}(x, \rho v) = \rho^{-1} C^i_{jk}(x, v);$$

b) *пространство гиперплоских элементов аффинной связности.* В этом случае: ξ — псевдо-ковектор и

$$\Xi: \begin{cases} C^{i'j'}_{k'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} C^{ij}_k, \\ \Gamma^{i'}_{j'k'} = \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} + \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} - \dfrac{\partial^2 x^q}{\partial x^{k'} \partial x^{p'}} v_q \dfrac{\partial x^{p'}}{\partial x^p} C^{ip}_j \right\}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$C^{ik}_j(x, \rho v) = \rho^{-1} C^{ik}_j(x, v);$$

c) *билинейно-метрическое пространство линейных элементов евклидовой связности* [2]. В этом случае роль опорного объекта играет псевдо-вектор, а роль фундаментального объекта — объект $(h_{ij}, \Gamma^i_{jk}, C^i_{jk})$:

$$\Xi: \begin{cases} h_{i'j'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} h_{ij}, \\ C^{i'}_{j'k'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} C^i_{jk}, \\ \Gamma^{i'}{}_{k'} = \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} + \dfrac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'} \partial x^{l'}} \dfrac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} v^l C^i_{jk} \right\}, \end{cases} \tag{7}$$

причем предполагается, что тензор h_{ij} ковариантно постоянен относительно объекта связности $(\Gamma^i_{jk}, C^i_{jk})$. Частными случаями этого пространства являются метрические пространства линейных элементов [1], симплектическое пространство линейных элементов [2], пространство обобщенной евклидовой связности и другие;

d) *пространство опорных тензорных элементов аффинной связности.* Опорный объект — относительный тензор $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ веса r:

$$T^{j'_1 \ldots j'_q}_{i'_1 \ldots i'_p} = \det \left\| \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s} \right\|^{-r} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}, \tag{8}$$

фундаментальный объект:

$$\Xi: \left\{ \begin{aligned} & C^{i'i'_1 \ldots i'_p}_{j'j'_1 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} C^{ii_1 \ldots i_p}_{jj_1 \ldots j_q}, \\ & \Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} + \right. \\ & \quad + \det \left\| \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s} \right\|^{-r} \left[\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'} \partial x^{l'}} \left(\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{j_1}} C^{ii_1 \ldots i_p}_{jkj_2 \ldots j_q} + \cdots + \right. \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{j_q}} C^{ii_1 \ldots i_p}_{jj_1 \ldots j_{q-1} k} \right) - \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} \left(\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{l'} \partial x^{k'}} C^{iki_2 \ldots i_p}_{jj_1 \ldots j_q} + \cdots + \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{\partial^2 x^{i_p}}{\partial x^{l'} \partial x^{k'}} C^{ii_1 \ldots i_{p-1} k}_{jj_1 \ldots j_q} \right) \right] T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \right\}, \end{aligned} \right. \tag{9}$$

причем

$$C^{ii_1 \dots i_p}_{jj_1 \dots j_q}(x, \rho T) = \rho^{-1} C^{ii_1 \dots i_p}_{jj_1 \dots j_q}(x, T),$$

$$C^{ii_1 \dots i_p}_{jj_1 \dots j_q} T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = 0.$$

Аппарат ковариантного дифференцирования хорошо разработан во всех перечисленных пространствах, но для пространств опорных элементов введено только понятие производной Ли для произвольного дифференциально-геометрического объекта этого пространства [5]. В этой статье рассматривается частный случай пространств опорных элементов, вводится понятие инвариантного дифференцирования и строится теория кривизны. Основные результаты этой статьи доложены автором на Первой Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии [3].

§ 1. Многообразие центральных копункторов

1. *Пространство пункторов и копункторов.* С каждой точкой (x^i_0) многообразия V_n ассоциируем n-мерное центро-проективное пространство $P_n(x)$. Каждому преобразованию (1) псевдогруппы G можно однозначно сопоставить центро-проективное преобразование

$$u^{i'} = \frac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} u^i}{-\dfrac{1}{n+1} \dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^j} u^j + 1} \tag{10}$$

координат в пространстве $P_n(x)$. Эта формула определяет гомоморфное отображение псевдогруппы G, которое действует на V_n, на группу дробно-линейных преобразований, действующих в $P_n(x)$.

Геометрический объект u^i $(i = 1, 2, \dots, n)$, заданный на V_n, называется n-мерным пунктором, если при преобразованиях псевдогруппы G его компоненты преобразуются по транзитивному закону (10).

Если Q_n-линейное пространство n измерений, то с псевдогруппой G можно однозначно ассоциировать группу линейных преобразований

$$u_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} u_i - \frac{1}{n+1} \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{i'}} \tag{11}$$

координат (u_i) пространства Q_n. Псевдогруппа G гомоморфно отображается на общую линейную группу. Геометрический объект u_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, заданный на V_n, называется n-мерным копунктором, если при преобразовании (1) псевдогруппы G его компоненты преобразуются по транзитивному закону (11). Копунктор является частным случаем квазитензора второго класса, т. е. линейного дифференциально-геометрического объекта второго класса.

Пространства P_n и Q_n двойственны друг другу.

2. *Многообразия центральных пункторов и центральных копункторов.* Пусть на V_n класса p задано поле пункторов u^i. Таким образом получаем некоторое новое многообразие $2n$ измерений V_{2n}, которое назовем многообразием центральных пункторов W_n. Пространство центральных пункторов

является топологическим произведением многообразия V_n и пространства значений объекта u^i, т. е. n-мерного центро-проективного пространства. Объект u^i будем называть опорным пунктором, а совокупность точки и опорного пунктора — центральным пунктором. Допустимые преобразования координат центрального пунктора (x^i, u^i) определяются формулами:

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x), \\ u^{i'} = \dfrac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} u^i}{-\dfrac{1}{n+1} \dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^j} u^j + 1}. \end{cases} \tag{12}$$

Если на многообразии V_n класса p рассматривается поле копункторов u_i, то каждой точке (x^i) можно отнести пространство значений копунктора u_i, и получить новое многообразие $2n$ измерений, которое назовем многообразием центральных копункторов W_n^*. В этом случае объект u_i будем называть опорным копунктором, а (x^i, u_i) — центральным копунктором. Допустимые преобразования координат центрального копунктора (x^i, u_i) определяются формулами:

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x), \\ u_{i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} u_i - \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{i'}}. \end{cases} \tag{13}$$

Многообразия W_n и W_n^* являются частными случаями пространства опорных элементов Б. Л. Лаптева [5].

Если на многообразии центральных копункторов задано поле дифференциально-геометрического объекта, то этим в многообразии W_n^* будет установлена некоторая геометрия, инвариантная относительно преобразований (13).

§ 2. Полный объект центро-проективной связности пространства W_n^*

3. *Перенесение пункторов и копункторов.* Перенесение копункторов на многообразии V_n определяется объектом центро-проективной связности, закон преобразования которого определяется формулами (4), следующим образом [7]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = u_p \Gamma^p_{ik} + \Gamma_{ik}. \tag{14}$$

Дифференциальный оператор δ:

$$\delta u_i = du_i - u_p \Gamma^p_{ik} dx^k - \Gamma_{ik} dx^k \tag{15}$$

переводит поле копункторов u_i в тензорную пфаффовую форму δu_i, ибо

$$\delta u_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta u_i. \tag{16}$$

Очевидно, что из (14) и (15) следует (16), а из (15) и (16) следует (14).

Параллельное перенесение пункторов на V_n определяется следующей системой дифференциальных уравнений [7]:

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^k} = -u^s \Gamma^i_{sk} + u^i u^s \Gamma_{sk},$$

где $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij})$ – объект центро-проективной связности. Дифференциальный оператор δ^*:

$$\delta^* u^i = du^i + (u^s \Gamma^i_{sk} - u^i u^s \Gamma_{sk})\, dx^k$$

отображает пунктор u^i в проективно-релятивную пфаффовую форму $\delta^* u^i$, т. е.

$$\delta^* u^{i'} = \frac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, \delta^* u^i}{\left\{ -\dfrac{1}{n+1}\, \dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^p}\, u^p + 1 \right\}^2}\,.$$

Теперь построим теорию перенесения копункторов и векторов на многообразии W^*_n.

Теорема 1. *Система* $2n^2(n+1)$ *функций*

$$\Gamma^i_{jk}(x, u), \quad \Gamma_{ij}(x, u), \quad C^{ik}_j(x, u), \quad C^i_j(x, u),$$

заданных на многообразии W^*_n, *определяют инвариантный дифференциальный оператор*

$$\delta T_i = dT_i - T_p (\Gamma^p_{ij}\, dx^j + C^{pj}_i\, du_j) - (\Gamma_{ij}\, dx^j + C^j_i\, du_j), \tag{17}$$

переводящий произвольное поле копункторов T_i *в тензорную пфаффовую форму* δT_i, *тогда и только тогда, когда эти функции образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры*:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} + \left[\left(\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^p} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - u_p \right) \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{k'} \partial x^{p'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^k \partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial x^{k'}} \right] C^{ik}_j \right\}, \tag{18}$$

$$\Gamma_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \Gamma_{ij} - \left(\frac{\partial^2 \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^q} \Gamma^q_{ij} \right\} + \right.$$

$$+ \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \left\{ \frac{\partial^2 \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^k \partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^j} - u_j \right) \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \right\} C^k_i, \tag{19}$$

$$C^{i'j'}_{k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} C^{ij}_k \tag{20}$$

и

$$C^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ C^i_j - \frac{1}{n+1} \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^k} C^{ki}_j \right\}. \tag{21}$$

Доказательство. Если при преобразовании координат (13) многообразия W_n^* система функций Γ^i_{jk}, Γ_{ij}, C^{ik}_j и C^i_j преобразуются по формулам (18), (19), (20) и (21), то выполняя соответствующие вычисления получим

$$\delta T_i = \frac{\partial x^t}{\partial x^{i'}}\, \delta T_i, \tag{22}$$

а это и означает инвариантность дифференциального оператора δ.

Если оператор, определенный формулой (17), является инвариантным, т. е. преобразуется по закону (22), то, подставляя в (22) выражение для $\delta T_{i'}$ и δT_i, мы получим

$$\frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{i'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,T_p\,dx^k+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,dT_i-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{i'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,dx^k-$$

$$-\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\,T_p-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{p'}}\right)\left[\Gamma^{p'}_{i'j'}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\,dx^k+\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,u_j\,dx^k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,du_j-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,dx^k\right)C^{p'j'}_{i'}\right]-$$

$$-\Gamma_{i'j'}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k}\,dx^k-\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,u_j\,dx^k+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,du_j-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,dx^k\right)=$$

$$=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,(dT_i-T_p\,\Gamma^p_{ik}\,dx^k-T_p\,C^{pj}_i\,du_j-\Gamma_{ik}\,dx^k-C^j_i\,du_j).$$

Эти соотношения выполняются тождественно при любом выборе dx^k, du_j и T_p тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{i'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}-\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k}\,\Gamma^{p'}_{i'j'}-\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,u_j\,C^{p'j'}_{i'}+$$

$$+\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\,\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,C^{p'j'}_{i'}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\Gamma^p_{ik}=0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,C^{p'j'}_{i'}-\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,C^{pj}_i=0, \tag{24}$$

$$\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{p'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,C^{p'j'}_{i'}-\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,C^{j'}_{i'}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,C^j_i=0 \tag{25}$$

и

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k}\,\Gamma_{i'j'}-\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\Gamma_{ik}+\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{i'}\,\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}-\\&-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{p'}}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k}\,\Gamma^{p'}_{i'j'}-\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}}\,u_j-\right.\\&\left.-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}}\right)\left(\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{p'}}\,C^{p'j'}_{i'}+C^{j'}_{i'}\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Так как

$$\det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\| \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\| = 1,$$

$$\frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 \ln \det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} +$$

$$+ \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} = 0,$$

то, решая уравнения (23), (24), (25) и (26) относительно $\Gamma^{i'}_{j'k'}$, $C^{i'k'}_{j'}$, $\Gamma_{i'j'}$ и $C^{i'}_{j'}$, получим законы преобразования (18), (19), (20) и (21). Инвариантный дифференциальный оператор δ не является линейным, ибо множество копункторов не образует линейной системы функций.

Дифференциально-геометрический объект $\{ \Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, C^{ik}_j, C^i_j \}$, компоненты которого преобразуются при всяком невырожденном и достаточное число раз дифференцируемом преобразовании (13) по закону, определенному формулами (18), (19), (20) и (21), будем называть *полным объектом центро-проективной связности пространства* W^*_n. Этот объект имеет следующие подобъекты:

$$\{ C^{ik}_j \}, \quad \{ \Gamma^i_{jk}, C^{ik}_j \}, \quad \{ C^i_j, C^{ik}_j \}, \quad \{ \Gamma^i_{jk}, C^{ik}_j, C^i_j \}.$$

Очевидно, что из dx^i и du_i можно составить такую пфаффовую форму Θ_i, которая при преобразовании (13) преобразовалась бы по тензорному закону. В частности, можно положить:

$$\delta u_i = \Theta_i,$$

т. е.

$$\Theta_i = E^j_i du_j - E_{ij} dx^j, \tag{28}$$

где

$$E^i_j = \delta^i_j - u_p C^{pi}_j - C^i_j, \quad E_{ij} = u_p \Gamma^p_{ij} + \Gamma_{ij}. \tag{29}$$

Величины E^i_j, E_{ij} образуют объект (подобъект полного объекта центро-проективной связности), закон преобразования которого имеет вид:

$$E^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} E^i_j, \tag{30}$$

$$E_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ E_{ij} + \left[\left(u_p - \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^p} \right) \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{p'} \partial x^{q'}} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^j \partial x^q} \right] E^q_i \right\}. \tag{31}$$

Из (17) и (28) следует, что

$$\delta T_i = dT_i - T_p (\tilde{\Gamma}^p_{ij} dx^j + \tilde{C}^{pj}_i \Theta_j) - (\tilde{\Gamma}_{ij} dx^j + \tilde{C}^j_i \Theta_j), \tag{32}$$

где

$$\tilde{\Gamma}^p_{ij} = \Gamma^p_{ij} + \tilde{C}^{ps}_i E_{sj}, \tag{33}$$

$$\tilde{C}^{pj}_i = C^{ps}_i \tilde{E}^j_s, \tag{34}$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij} = \Gamma_{ij} + \tilde{C}^r_j E_{ri}, \tag{35}$$

$$\tilde{C}^j_i = C^s_i \tilde{E}^j_s, \quad \tilde{E}_{ij} = \tilde{E}^s_i E_{sj}, \tag{36}$$

$$\tilde{E}^i_j E^k_i = \delta^k_j, \quad \tilde{E}^i_k E^k_j = \delta^i_j. \tag{37}$$

Величины $\tilde{E}^i_j$ образуют тензор, равенство нулю которого означает, что объект (C^{ij}_k, C^i_j) инвариантно присоединен к тензору C^{ij}_k следующим образом:

$$C^i_j = \delta^i_j + u_p C^{pj}_i. \tag{38}$$

Система $2n^2(n+1)$ функций

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij}, \quad \tilde{C}^{kj}_i, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}, \quad \tilde{C}^j_i$$

бразует дифференциально-геометрический объект со следующим законом преобразования:

$$\tilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma^k_{ij}, \tag{39}$$

$$\tilde{C}^{i'k'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} C^{ik}_j, \tag{40}$$

$$\tilde{\Gamma}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \tilde{\Gamma}_{ij} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial^2 \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^i \partial x^j} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n+1} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^p} \tilde{\Gamma}^p_{ij} \right\}, \tag{41}$$

$$\tilde{C}^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \tilde{C}^i_j - \frac{1}{n+1} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^p} \tilde{C}^{pi}_j \right\}. \tag{42}$$

Этот объект

$$\{ \tilde{\Gamma}^i_{jk}, \quad \tilde{C}^{ij}_k, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}, \quad \tilde{C}^i_j \}$$

будем называть *расщепленным объектом центро-проективной связности*. Расщепленный объект центро-проективной связности характерен тем, что его компоненты образованны из объекта $\{ \Gamma^i_{jk}, C^{ij}_k, \Gamma_{ij}, C^i_j \}$ и что он содержит в качестве подобъектов объект аффинной связности $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ и объект центро-проективной связности $\{ \tilde{\Gamma}^i_{jk}, \tilde{\Gamma}_{ij} \}$.

Объект $\{ \tilde{\Gamma}^i_{jk}, \tilde{\Gamma}_{ij} \}$ будем называть *усеченным объектом центро-проективной связности*, $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — *усеченным объектом аффинной связности, объект* $\{ \tilde{\Gamma}^i_{jk}, \tilde{C}^{ij}_k \}$ — *полным усеченным объектом аффинной связности*.

Теорема 2. *Дифференциально-геометрический объект* $\{ \Gamma^i_{jk}, C^{ij}_k \}$ *определяет на многообразии* W^*_n *инвариантный дифференциал*:

$$D^* \xi^i = d\xi^i + \xi^k (\Gamma^i_{kj} dx^j + C^{ij}_k du_j), \tag{43}$$

где $\xi^i = \xi^i(x, u)$ — *произвольное векторное поле на* W^*_n.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Так как инвариантный дифференциал $D^* \xi^i$ в силу (28), (33) и (34) можно представить в следующей форме:

$$D^* \xi^i = d\xi^i + \xi^k (\tilde{\Gamma}^i_{kj}\, dx^j + \tilde{C}^{ij}_k\, \Theta_j), \tag{44}$$

то инвариантный дифференциал произвольного относительного тензора $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ веса P, определенного на W_n^*, имеет вид

$$D^* T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = dT^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} - \sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots k \dots i_p}\, \omega^k_{i_\alpha} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1 \dots k \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}\, \omega^{j_\alpha}_k - P T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}\, \omega^k_k, \tag{45}$$

где

$$\omega^j_i = \tilde{\Gamma}^j_{ik}\, dx^k + \tilde{C}^{jk}_i\, \Theta_k. \tag{46}$$

4. *Производные линейного объекта по опорному копунктору.* Пусть в W_n^* задано поле квазитензора $Q^i(x, u)$ класса m:

$$Q^{i'} = A^{i'}_j \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'_1}}, \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'_1}\, \partial x^{k'_2}}, \dots, \frac{\partial^m x^k}{\partial x^{k'_1} \dots \partial x^{k'_m}} \right) Q^j +$$

$$+ B^{i'} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'_1}}, \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'_1}\, \partial x^{k'_2}}, \dots, \frac{\partial^m x^k}{\partial x^{k'_1} \dots \partial x^{k'_m}} \right), \tag{47}$$

где

$$A^{i'}_j (\delta^k_{k'}, 0, \dots, 0) = \delta^{i'}_j, \quad B^{i'} (\delta^k_{k'}, 0, \dots, 0) = 0.$$

Если функции Q^i являются дифференцируемыми, то

$$\frac{\partial Q^{i'}}{\partial u_{k'}} = \frac{\partial Q^{i'}}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial u_{k'}}.$$

Так как

$$\frac{\partial u_k}{\partial u_{k'}} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$$

и

$$\frac{\partial Q^{i'}}{\partial u_k} = A^{i'}_j \frac{\partial Q^j}{\partial u_k},$$

то

$$\frac{\partial Q^{i'}}{\partial u_{k'}} = A^{i'}_j \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial Q^i}{\partial u_k}. \tag{48}$$

Таким образом, частные производные линейного объекта класса m образуют линейный и однородный дифференциально-геометрический объект класса $m' \, (m' \leqslant m)$, т. е. образуют обобщенный тензор. Класс объекта $\frac{\partial Q^i}{\partial u_k}$ понижается только в том случае, когда $A^{i'}_j$ не зависит от $\frac{\partial^m x^i}{\partial x^{i'_1} \dots \partial x^{i'_m}}$. Например, класс объекта $\{ \tilde{\Gamma}^i_{jk}, \tilde{\Gamma}_{ij} \}$ – три, а $\left\{ \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jk}}{\partial u_p}, \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}}{\partial u_p} \right\}$ – два.

§ 3. Полный объект кручения-кривизны пространства W_n^*

5. *Полный объект кручения.* Тензор кручения усеченного объекта аффинной связности имеет вид:

$$R^i_{jk} = \frac{1}{2}\,(\tilde{\Gamma}^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{kj}), \tag{49}$$

а полный объект кручения усеченного объекта центро-проективной связности — (R^i_{jk}, R_{ij}), где

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\,(\tilde{\Gamma}_{ij} - \tilde{\Gamma}_{ji}). \tag{50}$$

Из (39) и (41) следует, что

$$R^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,R^k_{ij},$$

$$R_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left\{R_{ij} + \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^k}\,R^k_{ij}\right\}. \tag{51}$$

Тензор $\tilde{C}^{ij}_k$ будем называть *первым тензором кручения расщепленного объекта центро-проективной связности**), а объект $(\tilde{C}^{ij}_k, \tilde{C}^i_j)$ — *первым полным объектом кручения* этой связности. Тензор кручения усеченного объекта аффинной связности будем называть *вторым тензором кручения* расщепленного объекта центро-проективной связности, а объект (R^i_{jk}, R_{ij}) — *вторым полным объектом кручения* этой связности. Объект $(R^i_{jk}, R_{ij}, \tilde{C}^{ij}_k, \tilde{C}^i_j)$ естественно назвать *полным объектом кручения расщепленной центро-проективной связности.*

6. *Инвариантные производные.* Так как

$$dT_i = \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k} + \frac{\partial T_i}{\partial u_p}\,\tilde{E}_{pk}\right) dx^k + \frac{\partial T_i}{\partial u_p}\,\tilde{E}^k_p\,\Theta_k,$$

то δT_i можно представить в следующем виде:

$$\delta T_i = \delta_k T_i\, dx^k + \delta^k T_i\,\Theta_k, \tag{52}$$

где

$$\delta_k T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} + \frac{\partial T_i}{\partial u_p}\,\tilde{E}_{pk} - T_p\,\tilde{\Gamma}^p_{ik} - \tilde{\Gamma}_{ik} \tag{53}$$

и

$$\delta^k T_i = \frac{\partial T_i}{\partial u_p}\,\tilde{E}^k_p - T_p\,\tilde{C}^{pk}_i - \tilde{C}^k_i. \tag{54}$$

Теорема 3. *Если T_i — копунктор, то величины $\delta_k T_i$ и $\delta^k T_i$ являются тензорами.*

Доказательство. Подставляя

$$\delta T_{i'} = \delta_{k'} T_{i'}\, dx^{k'} + \delta^{k'} T_{i'}\,\Theta_{k'}$$

---

*) Кососимметрическую часть величин $\tilde{C}^{ij}_k$ будем обозначать через R^{ij}_k.

и δT_i в (22), мы получим

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta_k T_i dx^k + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta^k T_i \Theta_k = \delta_{k'} T_{i'} dx^{k'} + \delta^{k'} T_{i'} \Theta_{k'} .$$

Так как dx^k и Θ_k преобразуются по тензорным законам, то, сравнивая коэффициенты при dx^k и Θ_k, будем иметь

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta_k T_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \delta_{k'} T_{i'},$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta^k T_i = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \delta^{k'} T_{i'} .$$

Отсюда следует, что

$$\delta_{k'} T_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta_k T_i ,$$

$$\delta^{k'} T_{i'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta^k T_i ,$$

т. е. $\delta_k T_i$ и $\delta^k T_i$ — тензоры.

Величины $\delta_k T_i$ и $\delta^k T_i$ будем называть, соответственно, инвариантными производными первого и второго рода копунктора T_i. Следует заметить, что повторное инвариантное дифференцирование при помощи операторов δ_k и δ^k не имеет смысла.

Формулу (45) можно переписать так:

$$D^* T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} = \nabla_k T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} dx^k + \nabla^k T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \Theta_k , \tag{55}$$

где

$$\nabla_k T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} = \frac{\partial T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^k} + \frac{\partial T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}}{\partial u_q} \tilde{E}_{qk} -$$
$$- \sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots l \cdots i_p} \tilde{\Gamma}^l_{i_\alpha k} + \sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1 \cdots l \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \tilde{\Gamma}^{j_\alpha}_{lk} - P T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \tilde{\Gamma}^l_{lk} , \tag{56}$$

$$\nabla^k T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} = \frac{\partial T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}}{\partial u_l} \tilde{E}^k_l -$$
$$- \sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots l \cdots i_p} \tilde{C}^{lk}_{i_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1 \cdots l \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \tilde{C}^{j_\alpha k}_{l} - P T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \tilde{C}^{lk}_{l} . \tag{57}$$

Теорема 4. *Если* $T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ *— p раз ковариантное и q раз контравариантное относительное тензорное поле веса P, то величины* $\nabla_k T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ и $\nabla^k T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ *образуют тензоры.*

Доказательство этой теоремы аналогичное доказательству теоремы 3. Величины $\nabla_k T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ и $\nabla^k T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ будем называть *инвариантными производными*, соответственно, первого и второго рода тензорного поля $T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$.

Частные производные рассматриваемого тензорного поля, как это следует из (56) и (57), можно представить в виде:

$$\frac{\partial T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}}{\partial u_k} = E^k_l \nabla^l T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} + \sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots l \cdots i_p} C^{lk}_{i_\alpha} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1 \cdots l \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} C^{j_\alpha k}_{l} + P T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} C^{lk}_{l}, \tag{58}$$

$$\frac{\partial T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^k} = \nabla_k T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} - E_{lk} \nabla^l T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots l \cdots i_p} \Gamma^l_{i_\alpha k} - \sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1 \cdots l \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \Gamma^{j_\alpha}_{lk} + P T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \Gamma^l_{lk}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^k} = \nabla_k T^{j_1 \cdots j_q}_{j_1 \cdots i_p} - \frac{\partial T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}}{\partial u_l} \tilde{E}_{lk} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \tilde{\Gamma}^l_{i_\alpha k} - \sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1 \cdots l \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \tilde{\Gamma}^{j_\alpha}_{lk} + P T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \tilde{\Gamma}^l_{lk}. \tag{60}$$

7. *Альтернированные производные и тензоры кривизны.* Альтернирование инвариантных производных второго порядка первого рода $\nabla_k \nabla_r T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ приводит к следующим тождествам ($P=0$):

$$2 \nabla_{[k} \nabla_{r]} T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} = \sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots l \cdots i_p} R_{l}{}^{l}{}_{i_\alpha kr} - \sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1 \cdots l \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} R^{j_\alpha}_{lkr} -$$

$$- \frac{\partial T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}}{\partial u_l} R_{lkr} + 2 \nabla_l T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} R^l_{kr}, \tag{61}$$

где

$$R^i_{jkr} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^r} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jr}}{\partial x^k} - 2 \tilde{\Gamma}^s_{j[k} \tilde{\Gamma}^i_{|s|r]} + 2 \tilde{E}_{s[k} \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{|j|r]}}{\partial u_s} \tag{62}$$

и

$$R_{ikr} = \frac{\partial \tilde{E}_{ik}}{\partial x^r} - \frac{\partial \tilde{E}_{ir}}{\partial x^k} - 2 \tilde{E}_{s[k} \frac{\partial E_{|i|r]}}{\partial u_s}. \tag{63}$$

Тензор R^i_{jkr} будем называть *первым тензором кривизны пространства* W^*_n, а R_{ikr} — *первым тензором дополнительной кривизны.* Тождества (61) будем называть *обобщенными тождествами Риччи* для альтернирования инвариантных производных первого рода. Этим тождеством можно придать другой вид, если $\dfrac{\partial T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}}{\partial u_s}$ выразить через $\nabla^s T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ с помощью (58) и ввести новые тензоры

$$K^i_{jkr} = R^i_{jkr} - C^{il}_j R_{lkr} \tag{64}$$

и

$$K_{lkr}=E_l^l\,R_{lkr}\,. \tag{65}$$

Тензор K^l_{jkr} будем называть *первым картановым тензором кривизны* пространства W_n^*, а K_{lkr} — *первым картановым тензором дополнительной кривизны*. Тогда (61) принимает вид

$$2\nabla_{[k}\nabla_{r]}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=\sum_{\alpha=1}^{p}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots l\ldots i_p}K^l_{i_\alpha kr}-$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{q}T^{j_1\ldots l\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}K^{j_\alpha}_{lkr}-\nabla^l T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}R_{lkr}-2\nabla_l T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}R^l_{kr}. \tag{66}$$

Вторую группу обобщенных тождеств Риччи мы получим, рассматривая инвариантные производные второго рода $\nabla^k\nabla^r T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$. Применяя (57) дважды, альтернируя полученное выражение и пользуясь (60), находим

$$2\nabla^{[k}\nabla^{r]}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=-\sum_{\alpha=1}^{p}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots l\ldots i_p}\mathfrak{S}^{lkr}_{i_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{q}T^{j_1\ldots l\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\mathfrak{S}^{j_\alpha kr}_{l}-$$
$$-\frac{\partial T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}}{\partial u_l}\mathfrak{S}^{kr}_l+2\nabla^l T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}R^{kr}_l, \tag{67}$$

где

$$\mathfrak{S}^{jkr}_i=\tilde{E}^r_l\frac{\partial\tilde{C}^{jk}_i}{\partial u_l}-\tilde{E}^k_l\frac{\partial\tilde{C}^{jr}_i}{\partial u_l}+2\tilde{C}^{l[k}_i\,\tilde{C}^{|j|r]}_l \tag{68}$$

и

$$\mathfrak{S}^{kr}_i=\tilde{E}^r_l\frac{\partial\tilde{E}^k_i}{\partial u_l}-\tilde{E}^k_l\frac{\partial\tilde{E}^r_i}{\partial u_l}. \tag{69}$$

Тензор $\mathfrak{S}^{jkr}_i$ будем называть *вторым тензором кривизны* рассматриваемого пространства, а $\mathfrak{S}^{kr}_i$ — *вторым тензором дополнительной кривизны*. Тождества (67) будем называть *обобщенными тождествами Риччи* для альтернирования инвариантных производных второго рода. Если выразим частные производные тензора $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ через инвариантные производные второго рода согласно (58), то тождества (69) примут вид

$$2\nabla^{[k}\nabla^{r]}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=-\sum_{\alpha=1}^{p}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots l\ldots i_p}S^{lkr}_{i_\alpha}+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{q}T^{j_1\ldots l\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}S^{j_\alpha kr}_{l}-\nabla^l T^{j_1\ldots i_q}_{i_1\ldots j_p}S^{kr}_l, \tag{70}$$

где

$$S^{jkr}_i=\mathfrak{S}^{jkr}_i-C^{jl}_i\,\mathfrak{S}^{kr}_i \tag{71}$$

и

$$S^{kr}_i=E^l_i\,\mathfrak{S}^{kr}_l-2R^{kr}_l. \tag{72}$$

Тензор S_i^{jkr} назовем *вторым картановым тензором кривизны пространства* W_n^*, а S_i^{kr} — *вторым картановым тензором дополнительной кривизны.*

Третью группу обобщенных тождеств Риччи мы получим, рассматривая изменения порядка инвариантного дифференцирования первого рода и частного дифференцирования по u_k:

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\nabla_r T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\right)-\nabla_r\left(\frac{\partial T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}}{\partial u_k}\right)=-\sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots l\ldots i_p} L^{lk}_{i_\alpha r}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1\ldots l\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} L^{j_\alpha k}_{lr}+\frac{\partial T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}}{\partial u_l} L^k_{lr}, \tag{73}$$

где

$$L^{ik}_{jr}=\frac{\partial\tilde\Gamma^i_{jr}}{\partial u_k},\qquad L^i_{jk}=\frac{\partial\tilde E_{jk}}{\partial u_i}-\tilde\Gamma^i_{jk}. \tag{74}$$

Тензор L^{jk}_{ir} будем называть *третьим простейшим тензором кривизны* пространства W_n^*, а L^i_{jk} — *третьим простейшим тензором дополнительной кривизны.*

Другой вид третьей группы обобщенных тождеств Риччи мы получим, рассматривая изменения инвариантных дифференцирований первого и второго родов:

$$\nabla^k\nabla_r T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}-\nabla_r\nabla^k T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=\sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots l\ldots i_p} Q^{lk}_{i_\alpha r}-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1\ldots l\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} Q^{j_\alpha k}_{lr}-\frac{\partial T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}}{\partial u_l} Q^k_{lr}-\nabla_l T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\tilde C^{lk}_r, \tag{75}$$

где

$$Q^{ik}_{jr}=\nabla_r\tilde C^{ik}_j-\tilde E^k_l\frac{\partial\tilde\Gamma^i_{jr}}{\partial u_l} \tag{76}$$

и

$$Q^i_{jk}=\nabla_k\tilde E^i_j-\tilde E^i_p L^p_{jk}. \tag{77}$$

Тензор Q^{ik}_{jr} будем называть *третьим тензором кривизны* пространства W_n^*, а Q^i_{jk} — *третьим тензором дополнительной кривизны.* Тождества (75) можно представить в другой форме, если выразить частные производные тензора $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ через инвариантные производные второго рода. В этом случае (75) принимает вид:

$$\nabla^k\nabla_r T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}-\nabla_r\nabla^k T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=\sum_{\alpha=1}^{p} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots l\ldots i_p} P^{lk}_{i_\alpha r}-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{q} T^{j_1\ldots l\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} Q^{j_\alpha k}_{lr}-\nabla^l T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} P^k_{lr}-\nabla_l T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\tilde C^{lk}_r, \tag{78}$$

где

$$P^{ik}_{jr}=Q^{ik}_{jr}-C^{il}_j Q^k_{lr} \tag{79}$$

и

$$P^i_{jk}=E^l_j Q^i_{lk}. \tag{80}$$

Тензор P^{ik}_{jr} назовем *третьим картановым тензором кривизны* пространства W^*_n, а P^l_{jk} — *третьим картановым тензором дополнительной кривизны.*

Из (62) – (65), (68), (69), (71) и (72) следует, что

$$R^i_{j(kr)}=0, \quad R_{i(kr)}=0, \tag{81}$$

$$K^i_{j(kr)}=0, \quad K_{i(kr)}=0, \tag{82}$$

$$\mathfrak{S}^{j(kr)}_i=0, \quad \mathfrak{S}^{(kr)}_i=0 \tag{83}$$

и

$$S^{j(kr)}_i=0, \quad S^{(kr)}_i=0. \tag{84}$$

8. *Обобщенные тождества Бианки.* Рассмотрим вывод аналогов тождеств Бианки для рассмотренных тензоров кривизны. Воспользуемся тем методом, который Э. Картан применил для вывода тождеств Бианки, для тензоров кривизны пространства Финслера [9], а затем Б. Л. Лаптев — в пространстве тензорных опорных элементов с аффинной связностью [6].

Построим карту пространства центральных копункторов с объектом центро-проективной связности, определяя развертку любого однопараметрического множества центральных копункторов

$$x^i=x^i(t), \quad u_i=u_i(t) \tag{85}$$

на аффинное пространство следующими дифференциальными уравнениями

$$dA=dx^i e_i, \quad de_i=\omega^k_i e_k, \tag{86}$$

где $\{A, e_i\}$ — подвижный репер аффинного пространства, а формы ω^i_j определены равенством (46). Если вектор a^i, определенный на W^*_n, отображается в вектор $a^i e_i$ аффинного пространства, то

$$d(a^i e_i)=da^i+\omega^i_k a^k)\, e_i, \tag{87}$$

т. е. бесконечно малое геометрическое изменение вектора $a^i e_i$ является изображением инвариантного дифференциала этого вектора.

Рассмотрим двумерное многообразие центральных копункторов

$$x^i=x^i(t_1, t_2), \qquad u_i=u_i(t_1, t_2)$$

и на нем бесконечно малое однопараметрическое многообразие центральных копункторов, определенное следующими центральными копункторами:

$$\left\{ x^i(t_1, t_2), u_i(t_1, t_2) \right\}, \quad \left\{ x^i(t_1+\Delta t_1, t_2), u_i(t_1+\Delta t_1, t_2) \right\},$$

$$\left\{ x^i(t_1+\Delta t_1, t_2+\Delta t_2), u_i(t_1+\Delta t_1, t_2+\Delta t_2) \right\}, \quad \left\{ x^i(t_1, t_2+\Delta t_2), u_i(t_1, t_2+\Delta t_2) \right\}.$$

Пусть сторонам этого бесконечно малого параллелограмма центральных копункторов (цикла) соответствуют два символа d_1 и d_2 переместимых дифференцирований. При развертывании этого цикла мы придем к численным значениям внешних форм второго порядка

$$[\omega^i_k, dx^k], \quad D\Theta_i-[\Theta_k, \omega^k_i], \quad D\omega^i_j-[\omega^k_j, \omega^i_k].$$

Эти внешние формы характеризуют кручение, кривизну и дополнительную кривизну исходного пространства, за меру которых мы принимаем бесконечно малые преобразования, которым нужно подвергнуть начальный репер развертки цикла и начальное положение ковариантного опорного элемента, координаты которого являются решением системы

$$dx^i=0, \quad \Theta_i=0, \tag{88}$$

чтобы перевести их в конечные положения. Мерой кручения, как и в случае пространств тензорных опорных элементов, служит трансляция, необходимая для замыкания геометрического места точек развертки цикла; мерой кривизны — те бесконечно малы изменения координатных векторов, которые нужно совершить, чтобы получить из начального репера конечный, а мерой дополнительной кривизны — то бесконечно малое изменение координат опорного ковектора, которое нужно совершить, чтобы получить из начального опорного ковектора конечный. Выполнив вычисления мы получим

$$[dx^k, \ \omega_k^i]=\Omega^i, \tag{89}$$

$$D\omega_j^i-[\omega_j^k, \ \omega_k^i]=\Omega_j^i, \tag{90}$$

$$D\Theta_i+[\Theta_k, \ \omega_i^k]=-\Theta_i, \tag{91}$$

где

$$\Omega^i=R_{kr}^i\,[dx^k, \ dx^r]+\tilde{C}_k^{ir}\,[dx^k, \ \Theta_r], \tag{92}$$

$$\Omega_j^i=\frac{1}{2}\,K_{jpq}^i\,[dx^p, \ dx^q]+P_{jp}^{iq}\,[dx^p, \ \Theta_q]+\frac{1}{2}\,S_j^{ipq}\,[\Theta_p, \ \Theta_q], \tag{93}$$

$$\Omega_i=\frac{1}{2}\,K_{ipq}\,[dx^p, \ dx^q]+P_{ip}^q\,[dx^p, \Theta_q]+\frac{1}{2}\,S_i^{pq}\,[\Theta_p, \ \Theta_q]. \tag{94}$$

Тождества, которые являются аналогами тождеств Бианки, мы получим, дифференцируя внешним образом уравнения (89) — (91). Обобщенные тождества Бианки пространства W_n^* имеют вид:

$$D\Omega^i=[\omega_p^i, \ \Omega^p]-[dx^p, \ \Omega_p^i], \tag{95}$$

$$D\Omega_j^i=[\omega_j^p, \ \Omega_p^i]-[\Omega_j^p, \ \omega_p^i], \tag{96}$$

$$D\Omega_i=[\Theta_p, \ \Omega_i^p]+[\Omega_p, \ \omega_i^p]. \tag{97}$$

Если в (95) выполнить вычисления, введя выражения форм Ω^i из (92), Ω_j^i из (93) и ω_j^i из (46) и расположить полученный результат по независимым внешним кубическим формам

$$[dx^k, \ dx^r, \ dx^s], \quad [dx^k, \ dx^r, \ \Theta_s], \quad [dx^k, \ \Theta_r, \ \Theta_s]$$

то, приравнивая нулю проальтернированные коэффициенты при этих формах, получим (71) и следующие соотношения:

$$K_{[pqr]}^i+2\,\nabla_{[p}\,R_{qr]}^i-4\,R_{m[p}^i\,R_{qr]}^m+\tilde{C}_{[p}^{im}\,K_{|m|qr]}=0 \tag{98}$$

и

$$P_{[kr]}^{ij}+\nabla^j\,R_{kr}^i+2\,\tilde{C}_{[k}^{mj}\,R_{|m|r]}^i+\nabla_{[k}\,\tilde{C}_{r]}^{ij}-\tilde{C}_m^{ij}\,R_{kr}^m+\tilde{C}_{[k}^{im}\,P_{|m|r]}^j=0. \tag{99}$$

Аналогичные соотношения, которые следуют из (64), (65), (79), (80), (98), и (99), справедливы и для тензоров R_{jkr}^i, R_{ijk}, Q_{jk}^{ir} и Q_{jk}^i.

Преобразования тождеств (96) дает:

$$\nabla_{[m}\,K_{|j|pq]}^i-2\,K_{js[m}^i\,R_{pq]}^s+P_{j[m}^{is}\,K_{|s|pq]}=0, \tag{100}$$

$$\nabla^m\,K_{jpq}^i-2\,K_{jl[p}^i\,\tilde{C}_{q]}^{lm}-S_j^{ilm}\,K_{lpq}+2\,\nabla_{[p}\,P_{|j|q]}^{im}-2\,P_{jl}^{im}\,R_{pq}^l+2\,P_{j[p}^{il}\,P_{|l|q]}^{m}=0, \tag{101}$$

$$\nabla^{[p}\,P_{jk}^{|i|q]}+\tilde{C}_k^{l[p}\,P_{jl}^{|i|q]}-\frac{1}{2}\,P_{jk}^{il}\,S_l^{pq}-\frac{1}{2}\,\nabla_k\,S_j^{ipq}-S_j^{il[p}\,S_{lk}^{q]}=0 \tag{102}$$

и

$$\nabla^{[m} S_j^{|i|pq]} - S_j^{il[m} S_l^{pq]} = 0. \tag{103}$$

Из (97), в силу (93) и (94), следуют следующие тождества:

$$\nabla_{[m} K_{|i|pq]} + P^l_{i[m} K_{|l|pq]} = 0, \tag{104}$$

$$K^m_{ipq} - \nabla^m K_{ipq} + 2K_{il[p} \tilde{C}^{lm}_{q]} + S^{lm}_i K_{lpq} - 0,$$

$$-2\nabla_{[p} P^m{}_{|i|q]} + 2P^m_{il} R^l_{pq} - 2P^l_{i[p} P^m_{|l|q]} = 0, \tag{105}$$

$$P^{pq}_{ij} + P^{[p}_{il} \tilde{C}_j^{|l|q]} + \frac{1}{2} P^l_{ij} S^{pq}_l - \nabla^{[p} P^{q]}_{ij} + \frac{1}{2} \nabla_j S^{pq}_i + S^{l[p}_i K^{q]}_{lj} = 0, \tag{106}$$

$$S^{[mpq]}_i - \nabla^{[m} S^{pq]}_i + 2S^{l[m}_i S^{pq]}_l = 0. \tag{107}$$

Тождества (98) – (107) аналогичны тождествам Бианки пространства тензорных опорных элементов [6].

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
18.III.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас. К теории кривых метрического пространства линейных элементов, ДАН СССР, 1959, т. **127**, № 1, 9—12.
2. В. И. Близникас. К дифференциальной геометрии билинейно-метрических пространств линейных элементов, Учен. зап. Вильнюсского гос. ун-та, 1960, т. **33**, IX, 97—106.
3. В. И. Близникас. О некоторых многообразиях опорных элементов, Лит. мат. сб., 1963, т. **3**, № 2, 231—232.
4. В. В. Вагнер. Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии. Дополнение к книге О. Веблена и Дж. Уайтхеда «Основания дифференциальной геометрии», ИИЛ, М., 1949.
5. Б. Л. Лаптев. Производная Ли в пространстве опорных элементов. Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 1956, вып. **10**, 227—248.
6. Б. Л. Лаптев. Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. зап. Казанского гос. ун-та, 1958, т. **118**, кн. 4, 75—147.
7. В. Г. Лемлейн. Локальные центро-проективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии, 1964, т. **4**, № 1, 41—132.
8. А. Лихнерович. Теория связностей в целом и группы голономий, ИИЛ, М., 1960.
9. E. Cartan. Les espaces de Finsler, Paris, **79**, 1934.

CENTRINIŲ KOPUNKTORIŲ ERDVĖS CENTROPROJEKTYVINIO SĄRYŠIO PILNAS OBJEKTAS IR SUKIMOSI—KREIVUMO OBJEKTAS

V. BLIZNIKAS

(*Reziumė*)

Darbe yra nagrinėjamas specialus atraminių elementų erdvės [5] atvejis, t. y. kada atraminis elementas yra kopunktorius [7]. Tokia speciali atraminių elementų erdvė yra vadinama centrinių kopunktorių erdve W^*_n [3].

Pilno centroprojektyvinio sąryšio objekto (18), (19), (20) ir (21) pagalba yra įvedamos tenzorinių laukų invariantinių išvestinių sąvokos (56) ir (57). Surastos apibendrintos Riči tapatybės (61), (66), (67), (70), (73), (75) ir (78). Rasti erdvės W^*_n kreivumo ir papildomo kreivumo tenzoriai, ir apibendrintos Bianki tapatybės.

Darbas atliktas tenzoriniu metodu.

DAS VOLLSTÄNDIGE ZENTRAL-PROJEKTIVE ZUSAMMENHANGSOBJEKT UND DAS TORSION-KRÜMMUNGSOBJEKT DER MANNIGFALTIGKEITEN VON ZENTRALKOPUNKTOREN

V. BLIZNIKAS

(Zusammenfassung)

Es seien x^i die Koordinaten eines Punktes einer n-dimmensionalen Mannigfaltigkeit V_n der Klasse p, in der eine Pseudogruppe G von Punkttransformationen mit Formeln (1) gegeben ist. Ein Kopunktor u_i ist das differentialgeometrische Objekt, dessen Komponenten bei Koordinatentransformationen (1) dem Transformationsgesetz (11) genügen.

Ein Punkt samt einem Kopunktor (oder kurz Zentralkopunktor) soll mit (x^i, u_i) bezeichen werden. Der Mannigfaltigkeit W_n^* von Zentralkopunktoren (x^i, u_i) ist $2n$-dimmensionale Mannigfaltigkeit. Ist in einem Bereich unserer Mannigfaltigkeit W_n^* ein differenzierbares Kopunktorfeld $T_i(x, u)$ vorgegeben, so soll sein invariantes Differential δT_i durch Formel (17) bestimmt sein. Ausserdem wird man fordern, dass für das invariante Differential die Relationen (22) bestehen. Aus (17) und (22) folgt, dass die Γ^i_{jk}, C^{ik}_j, Γ_{ij} und C^i_j bei der Transformationen (12) die Transformationsgezetzten (18)–(21) genügen. Dieses Objekt nennt man das vallständige Objekt von Zentral-projektivem Zusammenhang.

Das invariante Differential eines differenzierbaren Vektorfeldes $\xi^i(x, u)$ hat die Form (43). Bezeichnen wir das invariante Differential von Stützkopunktor u_i mit Θ_i, dann ist (28) Wenn

$$\det \| E^i_j \| \neq 0,$$

so kann man die invarianten Ableitungen von ersten und zweiten Gattung des Tensorfeldes $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}(x, u)$ mit Hilfe der Formeln (56) und (57) bestimmen. Die Torsions-, Erganzungstorsions-, Krümmungs- und die Ergänzungskrümmungstensoren der Mannigfaltigkeit W_n^* kann mann durch den Formeln (34), (49), (62)–(65), (68), (69), (71), (72), (74), (76), (77), 7 und (80) einführen.

Die Identitäten (61), (66), (67), (70), (73), (75) und (78) für $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}(x, u)$ sind die verallgemeinerten Identitäten von Ricci. Die verallgemeinerten Bianchischen Identitäten (98)–(107) für Krümmungs- und Ergänzungskrümmungstensoren des Raumes W_n^* sind mit Hilfe der Cartanschen Methode abgeleitet.