IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ВЕЩЕСТВЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ $K(\sqrt{2})$

И. УРБЯЛИС

Начало изучению распределения простых множителей алгебраических числовых полей как объектов, подлежащих многомерной интерпретации, положил Э. Гекке [6]. Им изучен главный член в многомерном асимптотическом законе распределения простых идеальных чисел. Г. Радемахер [8–10] для случая вещественного квадратичного поля, а затем И. Кубилюс [4–5] для любого поля алгебраических чисел получили оценку остаточного члена в законе Гекке, причем точность оценки такая же, какую можно получить в законе простых рациональных чисел без применения метода тригонометрических сумм. Естественно ожидать, что привлечение метода тригонометрических сумм позволит существенно улучшить эту оценку. Для случая мнимого квадратичного поля это удалось сделать И. Кубилюсу [4]. В настоящей работе, используя метод И. Кубилюса и новые оценки тригонометрических сумм И. М. Виноградова [2] и Н. М. Коробова [3], доказывается весьма точная оценка остаточного члена асимптотического закона распределения простых чисел вещественного квадратичного поля в секторе. Для простоты берется поле $K(\sqrt{2})$.

Каждое целое число α поля $K(\sqrt{2})$ будет иметь вид $\alpha=k+l\sqrt{2}$, ему сопряженное $\alpha'=k-l\sqrt{2}$, где k и l — целые рациональные числа. Норма целого числа α будет обозначаться

$$N(\alpha)=\alpha\alpha'=k^2-2l^2=N(k,\ l).$$

Основная единица равняется $\eta=1+\sqrt{2}$, и каждую единицу мы получим, заставляя r в выражении

$$\pm(1+\sqrt{2})^r$$

пробегать все целые рациональные числа. Два числа, отличающиеся лишь множителем, являющимся единицей, называются ассоциированными.

Характер Гекке [6] первого рода mod 1 равняется

$$\lambda^m(\alpha)=\exp\left(ia\ln\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|\right)=\exp\left(ia\ln\left|\frac{k+\sqrt{2}l}{k-\sqrt{2}l}\right|\right)=\lambda^m(k,\ l),$$

причем здесь и в дальнейшем

$$a=\frac{\pi m}{\ln(1+\sqrt{2})},\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Когда $m=0$, характер является главным и равняется 1.

Пусть $s=\sigma+ti$ — комплексное переменное. При помощи характера $\lambda^m(\alpha)$ образуем Z-функцию Гекке

$$Z(s,\ \lambda^m)=\sum_{\alpha}{}^{*}\ \lambda^m(\alpha)\,|\,N(\alpha)\,|^{-s},$$

где знаком * указывается, что при суммировании из каждой системы ассоциированных чисел берется только по одному представителю. Z-функция Гекке является целой для всякого неглавного характера $\lambda^m(\alpha)$. Если же $m=0$, то $Z(s,\ \lambda^0)=Z(s)$ является регулярной во всей плоскости, кроме точки $s=1$, где она имеет простой полюс.

Гекке [6] вывел для функции $Z(s,\ \lambda^m)$ функциональное уравнение

$$Z(s,\ \lambda^m)=\varkappa(\lambda^m)\ \psi(s,\ m)\ Z(1-s,\ \lambda^{-m}), \tag{1}$$

где

$$|\,\varkappa(\lambda^m)\,|=1,$$

$$\psi(s,\ m)=A^{1-2s}\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\,(1-s-ai)\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\,(1-s+ai)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\,(s+ai)\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\,(s-ai)\right)}, \tag{2}$$

$$A=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Обозначая

$$F(k,\ l)=a\ln\left|\,\frac{\alpha}{\alpha'}\,\right|-t\ln|\,N(\alpha)\,|, \tag{3}$$

имеем

$$Z(s,\ \lambda^m)=\sum_{\alpha}{}^{*}\ \frac{e^{iF(k,l)}}{|\,N(\alpha)\,|^{\sigma}}.$$

Условимся относительно следующих обозначений:

$$U=\sqrt{|\,t^2-a^2\,|},\qquad V=|\,t\,|+|\,a\,|,$$

$$T=|\,t\,|+10,\qquad M=|\,m\,|+5,$$

$$E(m)=\begin{cases}1, & \text{если } m=0,\\ 0 & \text{в других случаях,}\end{cases}$$

$$\varepsilon_l=\begin{cases}1, & \text{если } l=1,\\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

В наших рассуждениях буквы $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{27}$ будут обозначать абсолютные положительные постоянные.

Лемма 1. *Если* $-1\leqslant\sigma\leqslant 2,\ |\,t\,|\geqslant 5M$, *то*

$$\psi(s,\ m)=\left(\frac{AU}{2}\right)^{1-2\sigma}e^{-i\Theta(t,m)}+O(|\,t\,|^{-2\sigma}),$$

где

$$\Theta(t,\ m)=2t\ln\frac{AU}{2e}+a\ln\left|\,\frac{t+a}{t-a}\,\right|-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}t.$$

Кроме того, в области $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$ *имеют место оценки*:

а) $\psi(s, m) \ll U^{1-2\sigma}$ *при* $|t \pm a| > c_0$;

б) $\psi(s, m) \ll \dfrac{|t+a|^{\frac{1}{2}-\sigma}}{|s-1-ai|}$ *при* $|t-a| \leqslant c_0$, $|t+a| > c_0$;

в) $\psi(s, m) \ll \dfrac{|t-a|^{\frac{1}{2}-\sigma}}{|s-1+ai|}$ *при* $|t+a| \leqslant c_0$, $|t-a| > c_0$;

г) $\psi(s, 0) \ll \dfrac{1}{|s-1|^2}$ *при* $|t| \leqslant c_0$.

Доказательство. Из формулы Стирлинга следует, что при

$$-1 \leqslant \sigma \leqslant 2, \quad |t+a| > c_0$$

$$\ln \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s-ai)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+ai)\right)} = \left(\frac{1}{2}-\sigma\right) \ln \frac{|t+a|}{2} - (t+a)\, i \ln \frac{|t+a|}{2e} +$$

$$+ \frac{\pi}{4}\, i \operatorname{sgn}(t+a) + O\left(\frac{1}{|t+a|}\right), \tag{4}$$

а при $-1 \leqslant \tau \leqslant 2$, $|t-a| > c_0$

$$\ln \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+ai)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-ai)\right)} = \left(\frac{1}{2}-\sigma\right) \ln \frac{|t-a|}{2} - (t-a)\, i \ln \frac{|t-a|}{2e} +$$

$$+ \frac{\pi}{4}\, i \operatorname{sgn}(t-a) + O\left(\frac{1}{|t-a|}\right). \tag{5}$$

Так как $|a| < 4M$, то при $|t| \geqslant 5M$ имеем, что

$$|t \pm a| \asymp t, \quad \operatorname{sgn}(t+a) = \operatorname{sgn}(t-a) = \operatorname{sgn} t.$$

Из (2), (4) и (5) следует асимптотическое выражение для $\psi(s, m)$, приведенное в формулировке леммы.

Оценка а) следует отсюда непосредственно. Оценки б), в) и г) получаются из (2), (4) и (5) и поведения Г-функции в окрестности полюса.

Лемма 2. *Пусть*

$$-\frac{1}{2} \leqslant \sigma_1 \leqslant 0, \qquad 1 \leqslant \sigma_2 \leqslant 2.$$

В области

$$\sigma_1 - \ln^{-1} MT \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2 + \ln^{-1} MT, \quad |t| \geqslant E(m) \tag{6}$$

имеет место оценка

$$Z(s, \lambda^m) \ll (MT)^{\frac{1-2\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-\sigma)} \ln MT.$$

Доказательство. Составим вспомогательные функции

$$\Phi_j(s, \lambda^m) = \frac{Z(s, \lambda^m)}{f_j(s)}, \qquad j = 1, 2,$$

где

$$f_j(s)=\exp\left(\left(\ln M+\ln(s+3)+\frac{\pi}{2}\,\delta_j\, i\right)\frac{1-2\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-s)\right)\cdot\ln\left(M(s+3)\right),$$

$\delta_1=-1$, $\delta_2=1$, причем берутся главные значения логарифмической функции. В области (6) функции $\Phi_j(s,\ \lambda^m)$ регулярные. Нетрудно убедиться, что

$$f_j(s)\asymp(MT)^{\frac{1-2\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-\sigma)}\ e^{\frac{\pi}{2}t(\operatorname{sgn} t+\delta_j)\frac{1-2\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}\ln MT. \tag{7}$$

Оценим функции $\Phi_j(s,\ \lambda^m)$ на контуре области (6). Имеем

$$Z(\sigma_2+\ln^{-1}MT+it,\ \lambda^m)\ll Z(1+\ln^{-1}MT)\ll\ln MT.$$

Отсюда, из функционального уравнения (1) и леммы 1 получаем:

$$\left|Z(\sigma_1-\ln^{-1}MT+it,\ \lambda^m)\right|=$$

$$=\left|\psi(\sigma_1-\ln^{-1}MT+it,\ m)\right|\cdot\left|Z(1-\sigma_1+\ln^{-1}MT-it,\ \lambda^{-m})\right|\ll$$

$$\ll(MT)^{1-2\sigma_1+2\ln^{-1}MT}\cdot\left|Z(1+\ln^{-1}MT)\right|\ll(MT)^{1-2\sigma_1}\ln MT.$$

Если $m=0$, то функция $Z(s)$ совпадает с Z-функцией Дедекинда. Тогда на отрезках

$$|t|=1,\quad \sigma_1-\ln^{-1}55\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2+\ln^{-1}55$$

имеет место оценка

$$Z(s)\ll 1.$$

Из полученных оценок и из формулы (7) получаем на контуре области (6), что

$$\Phi_j(s,\ \lambda^m)\ll 1.$$

Используя представление Θ – рядом ([6], стр. 34) функции $Z(s,\ \lambda^m)$ имеем, что в области (6)

$$\Phi_j(s,\ \lambda^m)<e^{BT},$$

где B не зависит от s.

Доказанные свойства функции $\Phi_j(s)$ позволяют применить известную теорему Фрагмена – Линделёра ([7], теорема 170). Тогда во всей области (6) имеем

$$\Phi_j(s,\ \lambda^m)\ll 1.$$

Используя полученную оценку для функции $\Phi_1(s,\ \lambda^m)$, когда $t\geqslant 0$ и для функции $\Phi_2(s,\ \lambda^m)$, когда $t\leqslant 0$, получаем утверждение леммы.

Как частные случаи леммы 2 получаются следующие леммы.

Лемма 3. *В области*

$$-\frac{1}{4}\leqslant\sigma\leqslant 2,\qquad |t|\geqslant E(m)$$

имеет место оценка

$$Z(s,\ \lambda^m)\ll(MT)^{\frac{3}{2}}\ln MT.$$

Лемма 4. *В области*

$$0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \geqslant E(m)$$

имеет место оценка

$$Z(s,\ \lambda^m) \ll (MT)^{1-\sigma} \ln MT.$$

Лемма 5.

$$Z(0,\ \lambda^m) \ll M \ln M.$$

Лемма 6. *Пусть* $y \geqslant 1$, l *— целое рациональное число,* $0 \leqslant l \leqslant 3$, b *— вещественное число,*

$$-1 < b \leqslant \frac{5}{4}, \qquad l+1 \geqslant \frac{32}{25}(1-2b),$$

$$\eta(b) = \min_{j=0,1,\ldots,l} |b+j| \neq 0 \quad \text{и} \quad b \neq 1.$$

Для всех вещественных u *и* v

$$\int\limits_{b+iu}^{b+iv} \frac{y^s \psi(s,\ m)}{s(s+1)\ldots(s+l)}\, ds \ll M^{1-2b} y^b \left(\eta^{-1}(b) + E(m)(b-1)^{-2} + \varepsilon_{l+1} \ln M\right) + y^{\frac{1}{4}-\frac{l}{2}}.$$

Доказательство. Обозначаем

$$I(u,\ v) = \int\limits_{b+iu}^{b+iv} \frac{y^s \psi(s,\ m)}{s(s+1)\ldots(s+l)}\, ds,$$

$$J(u,\ v) = \int\limits_{u}^{v} t^{-l-1}\, U^{1-2b}\, e^{-i\Theta_1(t)}\, dt, \tag{8}$$

где

$$\Theta_1(t) = \Theta(t,\ m) - t \ln y.$$

Из формулы (2) получаем:

$$\psi(\bar{s},\ m) = \overline{\psi(s,\ m)}.$$

Отсюда

$$\left| I(0,\ -u) \right| = \left| I(0,\ u) \right|$$

и

$$\left| I(u,\ v) \right| \leqslant \left| I(0,\ u) \right| + \left| I(0,\ v) \right|.$$

Ввиду этого, лемму достаточно доказать для интегралов $I(0,\ u)$ и $u > 0$.

Пусть $a > 0$, $0 < u \leqslant c_1 M$, где c_1 достаточно велико, тогда:

$$I(0,\ u) \ll I\left(0,\ \frac{1}{2}a\right) + I\left(\frac{1}{2}a,\ a-c_2\right) + I(a-c_2,\ a+c_2) + I(a+c_2,\ c_1 M).$$

При помощи леммы 1 имеем:

$$I\left(0,\ \frac{1}{2}a\right) \ll y^b M^{1-2\sigma}\left(\eta^{-1}(b) + \varepsilon_{l+1} \ln M\right),$$

$$I\left(\frac{1}{2}a,\ a-c_2\right) \ll y^b M^{-l-1} M^{\frac{1}{2}-b} \int\limits_{\frac{1}{2}a}^{a-c_2} |t-a|^{\frac{1}{2}-b}\, dt \ll y^b M^{1-2b},$$

где

$$|t+a| \asymp M, \quad |s+j| \asymp |t| \asymp M, \qquad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ l.$$

Далее,

$$I(a-c_2,\ a+c_2) \ll y^b M^{-l-1} \int\limits_{a-c_2}^{a+c_2} \frac{|t+a|^{\frac{1}{2}-\sigma}}{|s-1-ai|}\,dt \ll$$

$$\ll y^b M^{-b} |b-1|^{-1} \int\limits_{a-c_2}^{a+c_2} dt \ll y^b M^{-b} |b-1|^{-1},$$

$$I(a+c_2,\ c_1 M) \ll y^b M^{-l-1} M^{1-2b} M \ll y^b M^{1-2b}.$$

Кроме того, когда $m=0$, будем иметь

$$I(0,\ 5c_1) = I(0,\ c_2) + I(c_2,\ 5c_1) \ll y^b \left((b-1)^{-2} + \eta^{-1}(b)\right) +$$

$$+ y^b \ll y^b \left((b-1)^{-2} + \eta^{-1}(b)\right).$$

Из этих соотношений имеем:

$$I(0,\ u) \ll y^b M^{1-2b} \left(\eta^{-1}(b) + E(m)\ (b-1)^{-2} + \varepsilon_{l+1} \ln M\right). \tag{9}$$

Пусть $u > c_1 M$. Из леммы 1 и из условия, что $l+1 \geqslant \frac{32}{25}(1-2b)$, получаем:

$$I(c_1 M,\ u) = y^b \left(\frac{A}{2}\right)^{1-2b} J(c_1 M,\ u) + y^b \int\limits_{c_1 M}^{u} O\left(t^{-2b-l-1}\right) dt =$$

$$= y^b \left(\frac{A}{2}\right)^{1-2b} J(c_1 M,\ u) + O\left(y^b M^{-2b}\right). \tag{10}$$

Оценим интеграл $J(c_1 M,\ u)$. Имеем:

$$J(c_1 M,\ u) = \int\limits_{t=c_1 M}^{u} \frac{t^{-l-1} u^{1-2b}}{\Theta_1'(t)} e^{-i\Theta_1(t)}\, d\Theta_1(t), \tag{11}$$

где

$$\Theta_1'(t) = 2(\ln U - \ln z), \quad z = 2y^{\frac{1}{2}} A^{-1}.$$

Исследуем несколько случаев.

1°. $z \leqslant 15M$, $c_1 = 30$.

Из условия $l+1 \geqslant \frac{32}{25}(1-2b)$ получаем, что функция $t^{-l-1} U^{1-2b}$ убывает в интервале $[30M,\ u]$, а в том же самом интервале функция $\Theta_1'(t)$ есть положительная, возрастает и $\gg 1$. Тогда функция

$$\frac{t^{-l-1} U^{1-2b}}{\Theta_1'(t)}$$

убывает в интервале $[30M,\ u]$ и из второй теоремы о среднем имеем:

$$J(30M,\ u) \ll M^{-2b-l} \left| \int\limits_{t=30M}^{t=u} de^{-i\Theta_1(t)} \right| \ll M^{-2b-l}. \tag{12}$$

2°. $z > 15M$, $c_1 = 8$. Обозначаем

$$u_1 = \left(z^2 - z^{\frac{3}{2}} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = \left(z^2 + z^{\frac{3}{2}} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2ᵃ. $8M < u \leqslant u_1$. Нетрудно убедиться, что числитель первого множителя подинтегрального выражения формулы (11) в указанном интервале убывает и является положительным; знаменатель является отрицательным убывает по абсолютной величине и стремится к $\ln(1-z^{-\frac{1}{2}})$. Указанная дробь или будет во всем интервале монотонная, или в этом же интервале будет иметь экстремум. В первом случае для интеграла $J(8M,\ u_1)$ применяем вторую теорему о среднем. Во втором случае этот интеграл разбиваем на два интеграла:

$$J(8M,\ u_0),\ J(u_0,\ u_1),$$

где u_0 — точка экстремума, и каждому отдельно тоже применяем вторую теорему о среднем. В обоих случаях получаем:

$$J(8M,\ u_1) \ll \left| \frac{t^{-l-1}\ U^{1-2b}}{\ln U - \ln z} \right|_{t=8M} + \left| \frac{t^{-l-1}\ U^{1-2b}}{\ln U - \ln z} \right|_{t=u_1} \ll M^{-2b-l} + \\ + z^{-2b-l+\frac{1}{2}} \ll z^{-2b-l+\frac{1}{2}}.$$

2ᵇ. $u_1 < u \leqslant u_2$. Из формулы (8) имеем:

$$J(u_1,\ u_2) \ll \int\limits_{u_1}^{u_2} t^{-l-1}\ U^{1-2b}\ dt \ll (u_2 - u_1)\ z^{-l-2b} \ll z^{-l-2b+\frac{1}{2}}.$$

2ᵛ. $u > u_2$. Как и в 1° случае из $\Theta_1'(u_2) \gg z^{-\frac{1}{2}}$ получаем

$$J(u_2, u) \ll z^{-2b-l+\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, для каждого $u > 8M$ во втором случае имеем

$$J(8M,\ u) \ll z^{-2b-l+\frac{1}{2}} \ll y^{-b-\frac{l}{2}+\frac{1}{4}}. \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в (10), для каждого $u > c_1 M$, где $c_1 = 30$, если $z \leqslant 15M$, и $c_1 = 8$, если $z > 15M$, получаем:

$$I(c_1 M,\ u) \ll M^{-2b}\ y^b + y^{\frac{1}{4}-\frac{l}{2}}.$$

Последняя оценка вместе с (9) доказывает лемму.

Лемма 7. *Пусть* $x \geqslant 1$. *Тогда*

$$\sum_{0 < N(\alpha) \leqslant x}^{*} \lambda^m(\alpha) - E(m)\ c_3 x \ll M^{\frac{2}{3}}\ x^{\frac{1}{3}} \ln M + x^{\frac{1}{2}} + M \ln x.$$

Доказательство. Лемма тривиальна при $x \ll M$; поэтому будем считать $x > c_4 M$, где c_4 достаточно велико.

Из теоремы о вычетах и леммы 3 имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s+3}\ Z(s,\ \lambda^m)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\ ds = \frac{x^3}{3!}\ Z(0,\ \lambda^m) + \\ + E(m)\ \frac{c_3}{4!}\ x^4 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty} \frac{x^{s+3}\ Z(s,\ \lambda^m)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\ ds. \tag{14}$$

Обозначаем

$$S(x,\ \lambda^m)=\frac{1}{3!}\sum_{0<N(\alpha)\leqslant x}^{*}\lambda^m(\alpha)\left(x-N(\alpha)\right)^3.$$

Из соотношения ([7], теорема 209)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^{s+3}\,ds}{s(s+1)(s+2)(s+3)}=\begin{cases}\frac{1}{3!}(y-1)^3 & \text{для}\quad y\geqslant 1,\\ 0 & \text{для}\quad 0<y<1\end{cases}$$

и того, что ряд

$$Z(s,\ \lambda^m)=\sum_{\alpha}^{*}\lambda^m(\alpha)\left|N(\alpha)\right|^{-s}$$

сходится равномерно при $\sigma=2$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^{s+3}Z(s,\ \lambda^m)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\,ds=$$

$$=\sum_{\alpha}^{*}\lambda^m(\alpha)\left|N(\alpha)\right|^3\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\left(\frac{x}{|N(\alpha)|}\right)^{s+3}}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\,ds=$$

$$=\frac{1}{3!}\sum_{0<N(\alpha)\leqslant x}^{*}\lambda^m(\alpha)\left(x-N(\alpha)\right)^3=S(x,\ \lambda^m).$$

Из функционального уравнения (1) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty}\frac{x^{s+3}Z(s,\ \lambda^m)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\,ds=\varkappa(\lambda^m)\sum_{\alpha}^{*}\lambda^{-m}(\alpha)\left|N(\alpha)\right|^{-4}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty}\frac{(x|N(\alpha)|)^{s+3}\,\psi(s,\ m)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\,ds.$$

Полученные результаты подставляем в формулу (14):

$$S(x,\ \lambda^m)=\frac{x^3}{3!}Z(0,\ \lambda^m)+E(m)\,c_3\frac{x^4}{4!}+$$
$$+\varkappa(\lambda^m)\sum_{\alpha}^{*}\lambda^{-m}(\alpha)\left|N(\alpha)\right|^{-4}W(y),\tag{15}$$

где

$$W(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty}\frac{y^{s+3}\,\psi(s,\ m)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\,ds.$$

и

$$y=\left|N(\alpha)\right|x.$$

Обозначаем

$$z=M^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$$

и для обеих сторон соотношения (15) применяем оператор

$$\Delta_z F(x) = \sum_{l=0}^{3} (-1)^l C_3^l F(x+lz) = \int_x^{x+z} dy_1 \int_{y_1}^{y_1+z} dy_2 \int_{y_2}^{y_2+z} F'''(y_3)\, dy_3.$$

Тогда

$$\Delta_z \frac{x^4}{3!} Z(0, \lambda^m) = z^3 Z(0, \lambda^m) \ll z^3 M \ln M,$$

где последний результат получен из леммы 5. Далее,

$$\Delta_z E(m) c_3 \frac{x^4}{4!} = E(m)\left(c_3 xz^3 + O(z^4)\right).$$

Переходим к оценке $\Delta_z W(y)$. Из формулы (2) и 1 леммы имеем

$$W(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^{s+3}\psi(s, m)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\, ds,$$

где

$$b = -1 + \frac{1}{\ln y}.$$

Из леммы 6 имеем

$$W(y) \ll M^3 y^2 \ln y = K(y, m).$$

Отсюда уже следует

$$\Delta_z W\left(\left|N(\alpha)\right| x\right) \ll K\left(\left|N(\alpha)\right| x, m\right). \tag{16}$$

Эту самую величину оценим другим способом. Для небольших x новая оценка будет точнее. Для этого оценим $W'''(y)$. Обозначим

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} \frac{y^{s+3}\psi(s, m)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\, ds.$$

Отсюда получаем:

$$\Phi(y) = P_0(y) + P_1(y) + W(y), \tag{17}$$

где: $P_0(y) = \frac{y^3\psi(0, m)}{3!}$ — вычет подынтегральной функции в точке $s=0$, а $P_1(y)$ — в случае $m \neq 0$ означает сумму вычетов этой же функции соответственно в точках $s = 1 \pm ai$, и в случае $m=0$ означает вычет в точке $s=1$.

Для всех ограниченных y, $y>0$ интегралы

$$\Phi_l(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} \frac{y^{s+3-l}\psi(s, m)}{s(s+1)\cdots(s+3-l)}\, ds, \qquad (l=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому ([7], теорема 205)

$$\Phi_l(y) = \Phi^{(l)}(y), \qquad (l=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Тогда из формулы (17) имеем

$$W'''(y) = -P_0'''(y) - P_1'''(y) + \Phi'''(y)$$

или

$$W'''(y) = -\psi(0, m) - P_1'''(y) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} \frac{y^s}{s} \psi(s, m)\, ds. \tag{18}$$

Используя еще раз лемму 1, переносим контур интегрирования последнего интеграла до прямой $\sigma = \frac{1}{6}$. Теперь вычислим вычет подинтегральной функции в точках $s = 1 \pm ai$, когда $m \neq 0$ или в точке $s = 1$, когда $m = 0$. Для достаточно малых окружностей C с центрами в точках $s = 1 \pm ai$, соответственно в точке $s = 1$

$$\frac{d^3}{dy^3} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{y^{s+3} \psi(s, m)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{y^s}{s} \psi(s, m)\, ds.$$

Отсюда получаем, что $P_1'''(y)$ является вычетами функции $\frac{y^s}{s}\psi(s, m)$ соответственно в точках $s = 1 \pm ai$, когда $m \neq 0$, или в точке $s = 1$, когда $m = 0$. Таким образом,

$$W'''(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{6}-i\infty}^{\frac{1}{6}+i\infty} \frac{y^s}{s} \psi(s, m)\, ds - \psi(0, m).$$

Из лемм 1 и 6 получаем

$$W'''(y) \ll L(y, m),$$

где

$$L(y, m) = M + y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{6}} M^{\frac{2}{3}} \ln M.$$

Согласно последней оценке, имеем

$$\Delta_z W\left(\left| N(\alpha) \right| x\right) = \int\limits_{|N(\alpha)|x}^{|N(\alpha)|(x+z)} dy_1 \int\limits_{y_1}^{y_1+|N(\alpha)|z} dy_2 \int\limits_{y_2}^{y_2+|N(\alpha)|z} W'''(y_3)\, dy_3 \ll$$

$$\ll L\left(\left| N(\alpha) \right| x\right) \left| N(\alpha) \right|^3 z^3. \tag{19}$$

Из оценок (16) и (19) имеем

$$\sum_{\alpha}{}^{*} \lambda^{-m}(\alpha) \left| N(\alpha) \right|^{-4} \Delta_z W\left(\left| N(\alpha) \right| x\right) \ll$$

$$\ll z^3 \sum_{0 < N(\alpha) \leqslant x} N(\alpha)^{-1} L\left(N(\alpha)\, x,\ m\right) + \sum_{N(\alpha) > x}{}^{*} N(\alpha)^{-4} K\left(N(\alpha)\, x,\ m\right).$$

При помощи частичного суммирования и тривиальной оценки

$$\sum_{0 < N(\alpha) \leqslant x}{}^{*} 1 \ll x$$

получаем, что эта сумма

$$\ll z^3 \left(M^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \ln M + x^{\frac{1}{2}} + M \ln x\right).$$

Применяя введенный нами оператор к обеим сторонам соотношения (15) и учитывая полученные оценки, имеем

$$\Delta_z S(x, \lambda^m) = z^3 E(m) c_3 x + O\left(z^3 (M^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \ln M + x^{\frac{1}{2}} + M \ln x)\right).$$

Обозначаем

$$H(x, \lambda^m) = \sum_{0 < N(\alpha) \leqslant x}^{*} \lambda^m(\alpha).$$

Тогда

$$\Delta_z S(x, \lambda^m) = \int\limits_x^{x+z} dy_1 \int\limits_{y_1}^{y_1+z} dy_2 \int\limits_{y_2}^{y_2+z} H(y_3, \lambda^m)\, dy_3 =$$

$$= z^3 E(m) c_3 x + O\left(z^3 (M^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \ln M + x^{\frac{1}{2}} + M \ln x)\right). \tag{20}$$

Исследуем случай, когда $m = 0$. Тогда из (20) будем иметь:

$$z^3 H(x, \lambda^0) \leqslant \Delta_z S(x, \lambda^0) \leqslant z^3 H(x + 3z, \lambda^0) \tag{21}$$

Таким образом,

$$H(x, \lambda^0) \leqslant c_3 x + O(x^{\frac{1}{2}}).$$

Обозначаем

$$u = x + 3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$$

и из второго неравенства (21) находим

$$H(u, \lambda^0) \geqslant c_3 u + O(u^{\frac{1}{2}}).$$

Отсюда следует

$$H(x, \lambda^0) = c_3 x + O(x^{\frac{1}{2}}). \tag{22}$$

Пусть $m \neq 0$. Тогда из (22) имеем $(x < y_3 \leqslant x + 3z)$

$$\left| H(y_3, \lambda^m) - H(x, \lambda^m) \right| \leqslant \sum_{x < N(\alpha) \leqslant x+3z}^{*} 1 = O(z) + O(x^{\frac{1}{2}}).$$

Таким образом

$$H(y_3, \lambda^m) = H(x, \lambda^m) + O(z) + O(x^{\frac{1}{2}}).$$

Полученный результать подставляем в формулу (20)

$$\left(H(x, \lambda^m) + O(z) + O(x^{\frac{1}{2}})\right) z^3 = E(m) c_3 x z^3 +$$

$$+ O\left(z^3 M^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \ln M\right) + O\left(z^3 x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(z^3 M \ln x\right),$$

или

$$H(x, \lambda^m) - E(m) c_3 x \ll M^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \ln M + x^{\frac{1}{2}} + M \ln x.$$

Лемма доказана.

Заметим, что для наших целей достаточна и менее точная оценка по сравнению с полученной в лемме 7. Доказательство ее проще. Результат леммы 7 интересен сам по себе.

Лемма 8. *Пусть* $X \geqslant 1$. *В области* $\sigma > \frac{1}{2}$

$$Z(s, \lambda^m) = \sum_{0 < N(\alpha) \leqslant X}^{*} \lambda^m(\alpha) N(\alpha)^{-s} + E(m) c_3 \frac{X^{1-s}}{s-1} - H_1(X, \lambda^m) X^{-s} + s \int_X^{\infty} H_1(u, \lambda^m) u^{-1-s} du,$$

где

$$H_1(u, \lambda^m) = \sum_{0 < N(\alpha) \leqslant u}^{*} \lambda^m(\alpha) - E(m) c_3 u.$$

Доказательство совпадает с [4], лемма 7.

Лемма 9. *В области* $\sigma \geqslant 0{,}9$ *справедливо тождество*

$$Z(s, \lambda^m) = \sum_{0 < N(\alpha) \leqslant c_4 V^4}^{*} \lambda^m(\alpha) N(\alpha)^{-s} + O(1).$$

Доказательство совпадает с [4], лемма 8.

Лемма 10. *Пусть* $n \geqslant 1$ — *целое рациональное число,*

$$X > 0, \quad X \leqslant x \leqslant 3X, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{2}{3} x.$$

Тогда справедливо одно из неравенств

$$\left| \frac{\partial^k F}{\partial y^k} \right| \geqslant (k-1)!\ c_6^k V X^{-k}, \qquad (k = n, n+1). \tag{23}$$

Кроме того, всегда существует такое c_7, *что*

$$\left| \frac{\partial^n F}{\partial y^n} \right| \leqslant c_7^n (n-1)!\ V X^{-n}. \tag{24}$$

Доказательство. Каждому $X > 0$, $X \leqslant x \leqslant 3X$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{2}{3} x$ тождество (3) можно записать в виде

$$F(x, y) = -(t-a) \ln (x + \sqrt{2} y) - (t+a) \ln (x - \sqrt{2} y).$$

Простой подсчет приводит нас к формуле

$$\frac{\partial^n F}{\partial y^n} = (n-1)!\ (\sqrt{2})^n W^n \cdot \left((-1)^n (t-a) e^{-n\varphi} + (t+a) e^{n\varphi}\right), \tag{25}$$

где

$$W = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2y^2}}, \qquad \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{x + \sqrt{2} y}{x - \sqrt{2} y}.$$

Очевидно, что в вышеуказанной области функции W и φ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\frac{1}{3X} \leqslant W \leqslant \frac{3}{X}, \tag{26}$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \ln (3 + 2\sqrt{2}). \tag{27}$$

Кроме того, выражение

$$\left| (-1)^k (t-a) e^{-k\varphi} + (t+a) \right| e^{k\varphi}$$

для одного из двух последовательных значений k $(k=n,\ n+1)$ всегда будет равняться

$$\left|t-a\right|e^{-k\varphi}+\left|t+a\right|e^{k\varphi}$$

и $\geqslant Ve^{\pm k\varphi}$, где верхний знак берется при $\operatorname{sgn} t=\operatorname{sgn} a$, а нижний при $\operatorname{sgn} t\neq \neq \operatorname{sgn} a$. Отсюда и из формул (25), (26), (27) получаем (23).

Для доказательства утверждения (24) пишем

$$\left|(-1)^n(t-a)e^{-n\varphi}+(t+a)e^{n\varphi}\right|\leqslant\left|t-a\right|e^{-n\varphi}+\left|t+a\right|e^{n\varphi}\leqslant 2V\operatorname{ch} n\varphi.$$

Отсюда, из формул (25), (26) и (27) следует (24).

Лемма 11. *Пусь n — натуральное число, $n>1$, $b_0, \ldots, b_{n+1}$ — вещественные числа,*

$$b_{n+1}=\frac{b}{q}+\frac{\Theta}{q^2},$$

где b и q — целые рациональные числа, $q>0$, $(b, q)=1$, $|\Theta|<1$;

$$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n+1}x^{n+1},$$

P — целое рациональное число, $P>1$,

$$P^{\sqrt{n}\ln n}<q<P^{n-\sqrt{n}\ln n}.$$

Тогда

$$\sum_{l=0}^{P-1} e^{2\pi i f(l)}\ll P^{1-\frac{c_8}{n^2\ln n}}.$$

Эта оценка получена Н. М. Коробовым (см. [3], теорема 1).

Лемма 12. *Пусть $n>1$ — натуральное число, $b_0, \ldots, b_n$ — вещественные числа,*

$$b_n=\frac{b}{q}+\frac{\Theta}{q^2},$$

где b и q — целые рациональные числа,

$$q>0,\quad (a, q)=1,\quad |\Theta|\leqslant 1;\quad f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n,$$

P и Q — целые рациональные числа, $P>0$,

$$P^{\varepsilon_1}\leqslant q\leqslant P^{n-\varepsilon_2},$$

где ε_1, ε_2 — две абсолютные постоянные, удовлетворяющие условию

$$0<\varepsilon_j\leqslant 1\qquad (j=1,\ 2).$$

Тогда

$$\sum_{l=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(l)}\ll e^{c_9 n\ln^2 n}P^{1-\frac{c_{10}}{n^2\ln n}}.$$

Эта оценка является частным случаем одного из результатов И. М. Виноградова [1].

Лемма 13. *Пусть*

$$V\geqslant 50;\quad \ln V_0=\ln^{\frac{2}{3}}V(\ln\ln V)^{\frac{1}{3}},\quad \ln V_{00}=\ln^{\frac{3}{4}}V(\ln\ln V)^2,\quad V_0\leqslant X\leqslant V_{00};$$

Y — целое рациональное число

$$0 \leqslant Y \leqslant Y' < \frac{2}{3} x + 1, \quad X \leqslant x \leqslant 3X.$$

Тогда

$$S = \sum_{Y \leqslant l \leqslant Y'} e^{iF(x,l)} \ll X \exp\left(-c_{11} \ln^{-\frac{2}{3}} V (\ln\ln V)^{-\frac{1}{3}} \ln X\right).$$

Доказательство. Для $V \ll 1$ лемма очевидна, поэтому будем считать, что $V > c_{12}$, где c_{12} достаточно велико.

Положим

$$n = \left[\frac{u \ln V}{\ln X}\right], \qquad u = 1 + \ln^{-\frac{1}{3}} V;$$

$$P = \left[c_7^{-1} V^{-\frac{1}{k+2}} X^{1-\frac{\rho}{k+2}}\right], \quad \rho = \frac{c_8}{k \ln k},$$

где k наименьшее из чисел n, $n+1$, удовлетворяющее условию (23). Имеем:

$$V^{\frac{u}{k+1}} < X \leqslant V^{\frac{u}{k-1}},$$

$$\ln^{\frac{1}{4}} V (\ln\ln V)^{-2} \ll k \ll \ln^{\frac{1}{3}} V (\ln\ln V)^{-\frac{1}{3}}.$$

Далее, при $V > c_{12}$, $\rho < 1$

$$V^{-\frac{1}{k+2}} X^{1-\frac{\rho}{k+2}} > \exp\left(\frac{1}{k+2} \ln^{\frac{2}{3}} V\right) \gg \exp c_{13} \ln^{\frac{1}{3}} V (\ln\ln V)^{\frac{1}{3}}.$$

Следовательно, $P > 2$ при $V > c_{12}$.

Пусть

$$r = \left[\frac{Y' - Y}{P}\right].$$

Имеем

$$S = \sum_{j=0}^{r-1} S_j + O(P),$$

где

$$S_j = \sum_{Y + jP \leqslant l < Y + (j+1)P} e^{jF(x,l)} =$$

$$= \sum_{0 \leqslant l \leqslant P} \exp\left(2\pi i \sum_{\nu=0}^{k+1} b_\nu l^\nu + i \frac{l^{k+2}}{(k+2)!} \frac{\partial^{k+2}}{\partial y^{k+2}} F\left(x, Y + (j + \vartheta_l) P\right)\right),$$

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial y^\nu} F(x, Y + jP),$$

$$0 \leqslant \vartheta_l < 1.$$

В силу леммы 10

$$\frac{l^{k+2}}{(k+2)!} \frac{\partial^{k+2}}{\partial y^{k+2}} F\left(x, Y + (j + \vartheta_l) P\right) \ll c_7^{k+2} P^{k+2} V X^{-k-2} \ll X^{-\rho}.$$

Тогда

$$S_j = \sum_{0 \leqslant l < P} \exp\left(2\pi i \sum_{\nu=0}^{k+1} b_\nu l^\nu\right) + O(PX^{-\rho}).$$

Заметим, что при $V>c_{12}$

$$|b_{k+1}|\leqslant\frac{c_7^{k+1}}{2\pi(k+1)}\,VX^{-k-1}\ll\exp\left((k+1)\ln c_7+(1-u)\ln V\right)\ll$$

$$\ll\exp\left(c_{14}\ln^{\frac{1}{3}}V-\ln^{\frac{2}{3}}V\right),$$

т. е. $|b_{k+1}|<1$.

Введем обозначение:

$$q=\left[\frac{1}{|b_{k+1}|}\right].$$

Имеем $q>1$,

$$\left|\,b_{k+1}-\frac{\operatorname{sgn}b_{k+1}}{q}\,\right|=\frac{\dfrac{1}{|b_{k+1}|}-\left[\dfrac{1}{|b_{k+1}|}\right]}{\dfrac{1}{|b_{k+1}|}\,q}<\frac{1}{q^2}.$$

Далее, в силу леммы 10

$$qP^{-\sqrt{k}\ln k}\gg c_7^{-k-1}(k+1)\,V^{-1}\,X^{k+1}\cdot c_7^{\sqrt{k}\ln k}\,V^{\frac{\sqrt{k}\ln k}{k+2}}\,X^{-\sqrt{k}\ln k+\frac{\rho\sqrt{k}\ln k}{k+2}}\gg$$

$$\gg\exp\left(\ln(k+1)+(\sqrt{k}\ln k-k-1)\ln c_7+\left(-1+\frac{\sqrt{k}\ln k}{k+2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+u-\frac{\sqrt{k}\ln k}{k+1}\,u+\frac{\sqrt{k}\ln k}{(k+1)\,(k+2)}\,u\rho\right)\ln V\right)\gg$$

$$\gg\exp\left(-c_{15}\ln^{\frac{1}{3}}V+\left(\ln^{-\frac{1}{3}}V-\frac{\sqrt{k}\ln k}{(k+1)\,(k+2)}\cdot\left(1-u\rho+\frac{k+2}{\ln^{\frac{1}{3}}V}\right)\right)\ln V\right)\gg$$

$$\gg\exp\left(-c_{15}\ln^{\frac{1}{3}}V+\ln^{\frac{2}{3}}V-c_{16}\ln^{\frac{5}{8}}V(\ln\ln V)^4\right)>1$$

при $V>c_{12}$.

С другой стороны, тоже по лемме 10

$$qP^{-k+\sqrt{k}\ln k}\ll c_6^{-k-1}\,V^{-1}\,X^{k+1}\,(k+1)\,c_7^{k-\sqrt{k}\ln k}\,\cdot$$

$$\cdot\,V^{\frac{k-\sqrt{k}\ln k}{k+2}}\,X^{-k+\sqrt{k}\ln k-\frac{(-k+\sqrt{k}\ln k)\rho}{k+2}}<$$

$$<\exp\left(\ln(k+1)+(k-\sqrt{k})\ln c_7-(k+1)\ln c_6+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{k-\sqrt{k}\ln k}{k+2}-1+\frac{1+\sqrt{k}\ln k}{k-1}\,u+\frac{(k-\sqrt{k}\ln k)\,\rho u}{(k+2)\,(k-1)}\right)\ln V\right)=$$

$$=\exp\left(\ln(k+1)+(k-\sqrt{k})\ln c_7-(k+1)\ln c_6+\right.$$

$$+\frac{1}{(k+2)\,(k-1)}\left(-k+3\sqrt{k}\ln k+4+(k-\sqrt{k}\ln k)\,\rho u+\right.$$

$$\left.\left.+(k+2)\,(1+\sqrt{k}\ln k)\ln^{-\frac{1}{3}}V\right)\ln V\right)\ll$$

$$\ll\exp\left(c_{17}\ln^{\frac{5}{8}}V(\ln\ln V)^4-c_{18}\ln^{\frac{3}{4}}V(\ln\ln V)^2\right)<1.$$

Таким образом, при $V > c_{12}$, имеем:

$$P^{\sqrt{k}\ln k} < q < P^{k-\sqrt{k}\ln k}.$$

Поэтому, к сумме S_j можно применить лемму 11:

$$S_j \ll P^{1-\rho'} + PX^{-\rho} \ll P^{1-\rho}$$

и

$$S \ll XP^{-\rho} + P \ll X^{1-c_{11}\frac{\rho}{k}}.$$

Тогда

$$S \ll X \exp\left(-\frac{1}{k^2 \ln k} \ln X\right) \ll X \exp\left(-c_{11} \ln^{-\frac{2}{3}} V (\ln\ln V)^{-\frac{1}{3}} \ln X\right),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 14. *Пусть* $V \geqslant 50$, $V_{00} \leqslant X \leqslant c_{19} V^3$, *где* V_{00} — *число леммы* 13, Y — *целое рациональное число*,

$$0 \leqslant Y \leqslant Y' < \frac{2}{3}x + 1, \qquad X \leqslant x \leqslant 3X.$$

Тогда

$$\sum_{Y \leqslant l \leqslant Y'} e^{iF(x,l)} \ll X \exp\left(c_{20} \ln^{\frac{1}{4}} V - c_{21} \ln^{-\frac{1}{2}} V (\ln\ln V)^3 \ln X\right).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 13, только вместо леммы 11 берется лемма 12.

Лемма 15. *В области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{2} c_{11} \ln^{-\frac{2}{3}} V (\ln\ln V)^{-\frac{1}{3}},$$

$V \geqslant 50$, *справедлива оценка*

$$Z(s, \lambda^m) \ll \exp(c_{22} \ln\ln V).$$

Доказательство. В тождестве леммы 9

$$Z(s, \lambda^m) = \sum_{0 < N(\alpha) < c_5 V^3}^{*} \lambda^m(\alpha) N(\alpha)^{-s} + O(1)$$

оценим имеющуюся сумму при $V > c_{23}$, где c_{23} достаточно велико.

В плоскости x, y рассмотрим последовательность трапеций:

$$3^{\nu-1} V_0 \leqslant x \leqslant 3^{\nu} V_0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \nu_1,$$

$$3^{\nu_1} V_0 \leqslant x \leqslant c_{24} V^{\frac{2}{3}}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{2}{3} x,$$

где V_0 число из леммы 13,

$$\nu_1 = \left[\frac{\ln \frac{c_5 V^3}{V_0^2}}{2 \ln 3}\right].$$

Имеем

$$\sum_{0 < N(\alpha) \leqslant c_5 V^3}^{*} \lambda^m(\alpha) N(\alpha)^{-s} = \sum_{\substack{0 < k \leqslant V_0 \\ 0 \leqslant l < \frac{2k}{3}}} \frac{\lambda^m(k, l)}{N(k, l)^s} + \sum_{\nu=1}^{\nu_1} \sum_{\substack{3^{\nu-1} V_0 < k \leqslant 3^{\nu} V_0 \\ 0 \leqslant l_1 \leqslant l < \frac{2k}{3}}}' \frac{\lambda^m(k, l)}{N(k, l)^s} +$$

$$+ \sum_{\substack{3^{\nu_1} V_0 < k \leqslant c_{24} V^{\frac{3}{2}} \\ 0 \leqslant l_1 \leqslant l < \frac{2k}{3}}}' \frac{\lambda^m(k, l)}{N(k, l)^s}, \tag{28}$$

где $'$ обозначает, что суммирование ведется только по тем целым точкам (k, l), для которых $N(k, l) \leqslant c_5 V^3$.

Первую сумму оцениваем тривиально:

$$\sum_{\substack{0<k\leqslant V_0 \\ 0\leqslant l<\frac{2k}{3}}} \frac{\lambda^m(k, l)}{N(k, l)^s} \ll \sum_{\substack{0<k\leqslant V_0 \\ 0\leqslant l<\frac{2k}{3}}} (k^2-2l^2)^{-\sigma} \ll$$

$$\ll \sum_{1\leqslant k\leqslant V_0} k^{-1+c_{11}\ln^{-\frac{2}{3}} V(\ln\ln V)^{-\frac{1}{3}}} \ll V_0^{c_{11}\ln^{-\frac{2}{3}} V(\ln\ln V)^{-\frac{1}{3}}} \ll 1.$$

Для оценки остальных слагаемых в формуле (28) берем одну сумму и при помощи формулы (3) записываем

$$S_\nu = \sum_{\substack{X<k\leqslant X'\leqslant 3X \\ 0\leqslant l_1\leqslant l<\frac{2k}{3}}}{}' \frac{\lambda^m(k, l)}{N(k, l)^s} = \sum_{\substack{X<k\leqslant X'\leqslant 3X \\ 0\leqslant l_1\leqslant l<\frac{2k}{3}}}{}' \frac{e^{iF(k, l)}}{N(k, l)^\sigma},$$

где

$$X=3^{\nu-1} V_0 \quad \text{при} \quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu_1+1,$$

и

$$X'=c_{24} V^{\frac{3}{2}} \quad \text{при} \quad \nu=\nu_1+1.$$

Преобразуя эту сумму по Абелю, получаем:

$$S_\nu = \sum_{\substack{X<k\leqslant X'\leqslant 3X \\ 0\leqslant l_1\leqslant l<\frac{2k}{3}}}{}' \frac{e^{iF(k, l)}}{N(k, l)^\sigma} \ll X^{-2\sigma} \sum_{X<X_1<k\leqslant X_2\leqslant 3X} \max_{0\leqslant Y\leqslant Y'<\frac{2}{3}x+1} \left| \sum_{Y\leqslant l\leqslant Y'} e^{iF(k, l)} \right|.$$

Если $V_{00}\leqslant X\leqslant c_{19} V^{\frac{3}{2}}$, где V_{00} · число лемм 13 и 14, то по лемме 14 имеем:

$$S_\nu \ll X^{2(1-\sigma)} \cdot \exp\left(c_{20}\ln^{\frac{1}{4}} V - c_{21}\ln^{-\frac{1}{2}} V(\ln\ln V)^3 \ln X\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(c_{20}\ln^{\frac{1}{4}} V + c_{11}\ln^{\frac{1}{12}} V(\ln\ln V)^{\frac{5}{3}} - c_{21}\ln^{\frac{1}{4}} V(\ln\ln V)^5\right) < 1$$

при $V>c_{23}$, где c_{23} достаточно велико.

Если $V_0\leqslant X\leqslant V_{00}$, то по лемме 13 имеем:

$$S_\nu \ll X^{2(1-\sigma)} \exp\left(-c_{11}\ln^{-\frac{2}{3}} V(\ln\ln V)^{-\frac{1}{3}} \ln X\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(c_{11}\ln^{-\frac{2}{3}} V(\ln\ln V)^{-\frac{1}{3}} \ln X - c_{11}\ln^{-\frac{2}{3}} V(\ln\ln V)^{-\frac{1}{3}} \ln X\right) \leqslant 1.$$

Так как число трапеций, имеющих хотя бы одну точку (k, l), для которой $N(k, l) \leqslant c_5 V^3$, есть $\ll \ln V$, из полученных оценок выводим лемму.

Из леммы 15 посредством методов [4] выводятся следующие утверждения.

Лемма 16. *Функция* $Z(s, \lambda^m)$ *не имеет нулей в области*

$$\sigma \geqslant 1 - c_{25} \ln^{-\frac{2}{3}} MT (\ln\ln MT)^{-\frac{4}{3}}.$$

Лемма 17. *При* $x > 3$

$$\sum_{0 < N(\pi) \leqslant x}^{*} \lambda^m(\pi) = E(m) \int_2^x \frac{du}{\ln u} +$$

$$+ O\left(x \exp\left(- \frac{c_{26} \ln x}{\ln^{\frac{2}{3}} M (\ln\ln M)^{\frac{4}{3}} + \ln^{\frac{2}{5}} x (\ln\ln x)^{\frac{4}{3}}} \right) \ln^3 Mx \right),$$

где сумма берется по простым числам π *поля* $K(\sqrt{2})$.

Теорема. *Пусть* $x > 3$,

$$w(\alpha) = \frac{1}{4 \ln (1 + \sqrt{2})} \ln \left| \frac{\alpha}{\alpha'} \right|, \quad \{ w(\alpha) \} = w(\alpha) - [w(\alpha)].$$

Число простых чисел π *поля* $K(\sqrt{2})$, *удовлетворяющих условиям*

$$0 < N(\pi) \leqslant x, \quad 0 \leqslant w_1 \leqslant \{ w(\pi) \} < w_2 \leqslant 1,$$

выражается формулой

$$\sum_{\substack{0 < N(\pi) \leqslant x \\ w_1 \leqslant \{ w(\pi) \} < w_2}}^{*} 1 = (w_2 - w_1) \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(x \exp\left(- c_{27} \ln^{\frac{3}{5}} x (\ln\ln x)^{-\frac{4}{3}} \right) \right).$$

Кафедра общей математики
Каунасского политехнического
института

Поступило в редакцию
15.XII.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Виноградов. Избранные труды, Москва (1952).
2. И. М. Виноградов. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$, Изв. АН СССР, серия матем., **22**, № 2 (1958), 161–164.
3. Н. М. Коробов. Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел, Доклады АН СССР, **123**, № 1 (1958), 28–31.
4. И. П. Кубилюс. О некоторых задачах геометрии простых чисел, Мат. сб., **31** (73): 3 (1952), 507–542.
5. И. П. Кубилюс. Об одной задаче многомерной аналитической теории чисел, Ученные труды Вильнюсского ГУ, Серия мат. физ. и хим. наук, **4** (1955), 5–43, на литовском языке. Резюме на русск. яз.
6. E. Hecke. Über neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, Math. Z., **6** (1920), 11–51.
7. E. Landau. Einführung ind die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale (1 927).
8. H. Rademacher. Primzahlen reell-quadratischen Zahlkörper in Winkelräumen, Math. Ann., **111** (1935), 209–228.
9. H. Rademacher. Über die Anzahl der Primzahlen eines reell-quadratischen Zahlkörpers, deren Konjungierte unterhalb gegebener Grenzer liegen, Acta arithm., **1** (1935). 67–77.
10. H. Rademacher. On prime numbers of real quadratic fields in rectangles, Trans Amer. Math. Soc., **39** (1936), 380–398.

REALIOJO KVADRATINIO KŪNO $K(\sqrt{2})$ PIRMINIŲ SKAIČIŲ PASISKIRSTYMAS

J. URBELIS

(*Reziumė*)

Darbe įrodoma ši teorema:

Tegul $x>3$, α – kūno $K(\sqrt{2})$ sveikas skaičius, $N(\alpha)$ – skaičiaus norma,

$$w(\alpha)=\frac{1}{4\ln(1+\sqrt{2})}\ln\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|, \quad \left\{w(\alpha)\right\}=w(\alpha)-\left[w(\alpha)\right].$$

Kūno $K(\sqrt{2})$ neasocijuotų pirminių skaičių π, tenkinančių sąlygas

$$0<N(\pi)\leqslant x, \quad 0\leqslant w_1\leqslant\left\{w(\pi)\right\}<w_2\leqslant 1,$$

skaičius Q yra išreiškiamas formule

$$Q=(w_2-w_1)\int\limits_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(x\exp\left(-c\ln^{\frac{3}{5}}x(\ln\ln x)^{-\frac{4}{3}}\right)\right),$$

kur c teigiama konstanta.

DIE VERTEILUNG DER PRIMZAHLEN DES REELL-QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPERS $K(\sqrt{2})$

J. URBELIS

(*Zusammenfassung*)

Im vorliegenden Artikel wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei $x>3$, α – eine ganze Zahl in Körper $K(\sqrt{2})$, $N(\alpha)$ – Norma dieser Zahl,

$$w(\alpha)=\frac{1}{4\ln(1+\sqrt{2})}\ln\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|, \quad \left\{w(\alpha)\right\}=w(\alpha)-\left[w(\alpha)\right].$$

Die Anzahl Q der nicht-assoziierten Primzahlen in Körper $K(\sqrt{2})$, welche die Bedingungen

$$0<N(\pi)\leqslant x, \quad 0\leqslant w_1\leqslant\left\{w(\pi)\right\}<w_2\leqslant 1$$

erfüllen, wird mit folgender Formel

$$Q=(w_2-w_1)\int\limits_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(x\exp\left(-c\ln^{\frac{3}{5}}x(\ln\ln x)^{-\frac{4}{3}}\right)\right)$$

darstellen, wo c positive Konstante ist.