О КОМПЛЕКСЕ КОРРЕЛЯТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

К. И. ГРИНЦЕВИЧЮС

Коррелятивным элементом назовем луч и один класс корреляций, связанных с этим лучом. В трехмерном точечном пространстве многообразие всех коррелятивных элементов является пятимерным. Комплексом коррелятивных элементов назовем четырехмерное многообразие коррелятивных элементов. Так как каждому лучу соответствует однопараметрическое многообразие коррелятивных элементов, то комплекс прямых является особым комплексом коррелятивных элементов. В этой заметке рассматривается фундаментальный объект второго порядка комплекса коррелятивных элементов [1].

1. Инфинитезимальное перемещение тетраэдра $\{A_i\}$ в трехмерном про ективном пространстве обозначим

$$dA_i=\omega_i^j A_j \quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Дифференциальные формы ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k\ \omega_k^j].$$

Дифференциалы координат x^i точки $x^i A_i$ определяются формулами

$$dx^i=x^i\,\Theta-x^i\,\omega_j^i, \quad D\Theta=0. \tag{1}$$

Уравнение

$$u_{ij}\,x^i\,y^j=0, \quad U=\det\|u_{ij}\|\neq 0 \tag{2}$$

определяет коррелятивное соответствие, т. е. каждой точке $x^i A_i$ ставит в соответствие плоскость

$$(u_{ij}\,x^i)\ y^j=0,$$

где y^j – координаты текущей точки плоскости.

Инвариантность уравнения (2) относительно преобразований реперов $\{A_i\}$, в силу (1), определяется уравнениями

$$du_{ij}=u_{ik}\,\omega_j^k+u_{kj}\,\omega_i^k+u_{ij}\,\omega, \quad D\omega=0. \tag{3}$$

Уравнения (3) получаем, продифференцировав уравнения (2). Из уравнений (3) следует, что

$$dU=U\,(2\omega_i^i+4\omega),$$
$$du=u\,(2\omega_p^p+2\omega)\ (\mathrm{mod}\ \omega_q^\alpha), \tag{4}$$

где

$$u=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix},$$

$$p,\ q,\ r,\ s,\ t=1,\ 2; \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon,\ \zeta=3,\ 4.$$

Корреляция (2) имеет некоторые инварианты, например,

$$\frac{\det \| u_{ij} \|}{\det \| u_{(ij)} \|} \quad (\text{см. [3]}).$$

Если обозначить

$$\rho = \frac{1}{2} \ln \frac{u^2}{|U|}, \tag{5}$$

то, в силу (4), получаем

$$d\rho + \omega_\alpha^\alpha - \omega_p^p = 0 \quad (\operatorname{mod} \omega_q^\beta). \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений

$$\omega_p^\alpha = 0$$

вполне интегрируема, и первые интегралы этой системы определяют прямую $(A_1 A_2)$.

Система дифференциальных уравнений

$$\omega_p^\alpha = 0, \quad d\rho + \omega_\alpha^\alpha - \omega_p^p = 0$$

также вполне интегрируема, и первые интегралы этой системы, в силу (6), определяют коррелятивный элемент [2], который образуют луч $A_1 A_2$ и один класс

$$e^{2\rho} \left| \det \| u_{ij} \| \right| = \left\{ \left| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{matrix} \right| \right\}^2 \tag{7}$$

корреляций (2), где e — число Непера.

Уравнение (7) следует из уравнения (5). Многообразие всех корреляций в трехмерном пространстве зависит от 15 параметров, а уравнением (5) или (7), при заданом ρ, определяется один 14-параметрический класс корреляций.

2. Величины

$$v_{ij} = u_{[ij]} = \frac{1}{2} (u_{ij} - u_{ji})$$

также удовлетворяют уравнениям (3) и определяют 5-параметрическое многообразие корреляций

$$v_{ij} x^i y^j = 0. \tag{8}$$

Уравнение (7) для v_{ij} принимает вид

$$e^\rho \left| v_{12} v_{34} + v_{13} v_{42} + v_{14} v_{23} \right| = v_{12}^2. \tag{9}$$

Корреляция (8) является нуль-системой линейного комплекса прямых

$$v_{ij} p^{ij} = 0, \tag{10}$$

где p^{ij} — координаты прямой. Коррелятивный элемент (луч $A_1 A_2$ + класс корреляций (9)) назовем кососимметрическим коррелятивным элементом.

3. Величины

$$w_{ij} = u_{(ij)} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji})$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3) и определяют 9-параметрическое многообразие корреляций

$$w_{ij} x^i y^j = 0. \tag{11}$$

Корреляция (11) является полярным соответствием относительно квадрики

$$w_{ij}\, x^i\, x^j = 0. \tag{12}$$

Коррелятивный элемент (луч $A_1 A_2$ + класс полярных соответствий) назовем симметрическим коррелятивным элементом.

Таким образом следует, что всякому коррелятивному элементу общего вида сопоставлен кососимметрический коррелятивный элемент и симметрический коррелятивный элемент.

4. Комплекс коррелятивных элементов определяется уравнениями

$$\lambda\,(d\rho + \omega^\alpha_\alpha - \omega^p_p) = \lambda^p_\alpha\,\omega^\alpha_p,$$

$$[d\lambda^p_\alpha + \lambda^q_\alpha\,\omega^p_q - \lambda^p_\beta\,\omega^\beta_\alpha - 2\lambda\,\omega^p_\alpha - \frac{1}{\lambda}\,\lambda^p_\alpha\,d\lambda,\ \omega^\alpha_p] = 0,$$

где $\lambda \neq 0$. В случае $\lambda = 0$, линейное уравнение этой системы означает линейное уравнение комплекса прямых, описываемого ребром $A_1 A_2$, т. е. комплекс коррелятивных элементов является особым. Этот случай исключаем из рассмотрения и полагаем, что $\lambda = 1$. Тогда предыдущая система примет вид

$$d\rho + \omega^\alpha_\alpha - \omega^p_p = \lambda^p_\alpha\,\omega^\alpha_p,$$

$$[d\lambda^p_\alpha + \lambda^q_\alpha\,\omega^p_q - \lambda^p_\beta\,\omega^\beta_\alpha - 2\,\omega^p_\alpha,\ \omega^\alpha_p] = 0. \tag{13}$$

Будем считать, что независимыми формами в системе (13) являются ω^α_p, следовательно, каждому лучу сопоставлен один класс корреляций, т. е. ρ в уравнении (7) или (9) является функцией от луча $A_1 A_2$.

Из квадратичного уравнения системы (13) следует, что величины λ^p_α образуют линейный неоднородный геометрический объект. Этот объект является фундаментальным объектом первого порядка комплекса коррелятивных элементов [1] и определяет инвариантную прямую

$$x^p = -\frac{1}{2}\,\lambda^p_\alpha\,x^\alpha \tag{14}$$

относительно преобразований реперов нулевого порядка.

5. При движении луча $l = A_1 A_2$, класс корреляций (9) также движется, и характеристика класса линейных комплексов (10) состоит из трех линейных комплексов:

1) специального линейного комплекса

$$p^{34} = 0 \quad \text{и}$$

2) двух линейных комплексов

$$2p^{12} - 2\lambda^{[1}_\alpha\,p^{2]\alpha} + (\pm 2e^{-\rho} + \lambda^{[1}_3\,\lambda^{2]}_4)\,p^{34} = 0. \tag{15}$$

Действительно, дифференцируя уравнение (9), в силу (13), считая, что v_{ij} удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3), получаем

$$v_{12}\,\lambda^p_\alpha\,\omega^\alpha_p + 4\,v_{\alpha[1}\,\omega^\alpha_{2]} = 0.$$

Считая, что полученное уравнение должно быть удовлетворено для всяких значений ω^α_p, получаем

$$v_{12}\,\lambda^1_\alpha - 2\,v_{\alpha 2} = 0,$$

$$v_{12}\,\lambda^2_\alpha + 2\,v_{\alpha 1} = 0. \tag{16}$$

Система уравнений (9) и (16) имеет три решения, а именно: $p^{34}=0$ и (15).

Прямая (14) является сопряженной относительно обоих линейных комплексов (15).

Прямые, принадлежащие обоим линейным комплексам (15), образуют линейную конгруэнцию, определяемую уравнениями:

$$p^{34}=0,$$

$$2p^{12}-2\lambda^{[1}_{\alpha}\, p^{2]\alpha}+\lambda^{[1}_{3}\,\lambda^{2]}_{4}\, p^{34}=0.$$

Каждое из предыдущих уравнений определяет линейный специальный комплекс, и поэтому директрисами этой линейной конгруэнции являются прямые $A_1 A_2$ и (14) [4].

6. Для дальнейшего полагаем, что $\lambda^{p}_{\alpha}=0$. В этом случае прямая (14) является ребром $l^*=A_3 A_4$, система (13) принимает вид

$$d\rho+\omega^{\alpha}_{\alpha}-\omega^{p}_{p}=0, \quad [\omega^{p}_{\alpha}\,\omega^{\alpha}_{p}]=0, \tag{17}$$

а линейные комплексы (15) запишутся так

$$e^{\rho}\, p^{12}\pm p^{34}=0. \tag{18}$$

7. Продолжая систему (17), получаем

$$\begin{gathered} d\rho+\omega^{\alpha}_{\alpha}-\omega^{p}_{p}=0,\\ \omega^{p}_{\alpha}=\lambda^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta}_{q}, \quad \lambda^{pq}_{\alpha\beta}=\lambda^{qp}_{\beta\alpha},\\ [d\lambda^{pq}_{\alpha\beta}+\lambda^{pr}_{\alpha\beta}\,\omega^{q}_{r}+\lambda^{rq}_{\alpha\beta}\,\omega^{p}_{r}-\lambda^{pq}_{\alpha\gamma}\,\omega^{\gamma}_{\beta}-\lambda^{pq}_{\gamma\beta}\,\omega^{\gamma}_{\alpha}, \quad \omega^{\beta}_{p}]=0. \end{gathered} \tag{19}$$

Величины $\lambda^{pq}_{\alpha\beta}$, при изменении только вторичных параметров, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\delta\lambda^{pq}_{\alpha\beta}+\lambda^{pr}_{\alpha\beta}\,\pi^{q}_{r}+\lambda^{rq}_{\alpha\beta}\,\pi^{p}_{r}-\lambda^{pq}_{\alpha\gamma}\,\pi^{\gamma}_{\beta}-\lambda^{pq}_{\gamma\beta}\,\pi^{\gamma}_{\alpha}=0, \tag{20}$$

где δ — символ дифференцирования относительно вторичных параметров и $\pi^{j}_{i}=\omega^{j}_{i}(\delta)$.

Системы величин

$$\lambda^{(pq)}_{\alpha\beta}\equiv\lambda^{pq}_{(\alpha\beta)}, \tag{21}$$

$$\mu_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}=\lambda^{11}_{(\alpha\,|\,(\beta}\,\lambda^{22}_{\gamma)\,|\,\varepsilon)}-\lambda^{12}_{(\alpha\,|\,(\beta}\,\lambda^{12}_{\gamma)\,|\,\varepsilon)}, \tag{22}$$

$$\mu^{pqrs}=\lambda^{(p\,|\,(q}_{33}\,\lambda^{r)\,|\,s)}_{44}=\lambda^{(p\,|\,(q}_{34}\,\lambda^{r)\,|\,s)}_{34}, \tag{23}$$

$$\mu=\lambda^{12}_{34}-\lambda^{21}_{34} \tag{24}$$

удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям (20),

$$\delta\mu_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}-\mu_{\zeta\beta\gamma\varepsilon}\,\pi^{\zeta}_{\alpha}-\mu_{\alpha\zeta\gamma\varepsilon}\,\pi^{\zeta}_{\beta}-\mu_{\alpha\beta\zeta\varepsilon}\,\pi^{\zeta}_{\gamma}-\mu_{\alpha\beta\gamma\zeta}\,\pi^{\zeta}_{\varepsilon}+2\mu_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\,\pi^{p}_{p}=0, \tag{25}$$

$$\delta\mu^{pqrs}+\mu^{tqrs}\,\pi^{p}_{t}+\mu^{ptrs}\,\pi^{q}_{t}+\mu^{pqts}\,\pi^{r}_{t}+\mu^{pqrt}\,\pi^{s}_{t}-2\mu^{pqrs}\,\pi^{\alpha}_{\alpha}=0, \tag{26}$$

$$\delta\mu+\mu\,(\pi^{p}_{p}-\pi^{\alpha}_{\alpha})=0 \tag{27}$$

и, следовательно, являются подобъектами фундаментального объекта второго порядка.

Системы величин

$$\mu_{(\alpha\beta\gamma\varepsilon)}, \tag{28}$$

$$\mu^{(pqrs)} \tag{29}$$

также удовлетворяют уравнениям соответственно (25), (26) и являются геометрическими объектами.

Геометрические объекты (23) и (29) двойственны соответственно объектам (22) и (28).

Примечание. Ни одна система величин

$$\lambda_{33}^{pq}\lambda_{44}^{rs}-\lambda_{34}^{pq}\lambda_{43}^{rs},$$
$$\lambda_{\alpha\beta}^{11}\lambda_{\gamma\varepsilon}^{22}-\lambda_{\alpha\beta}^{12}\lambda_{\gamma\varepsilon}^{21},$$
$$\lambda_{33}^{(p(q}\lambda_{44}^{(rs)}-\lambda_{34}^{(pq)}\lambda_{43}^{(rs)},$$
$$\lambda_{(\alpha\beta)}^{11}\lambda_{(\gamma\varepsilon)}^{22}-\lambda_{(\alpha\beta)}^{12}\lambda_{(\gamma\varepsilon)}^{21},$$
$$\lambda_{33}^{(p|(q}\lambda_{44}^{r)|s)}-\lambda_{34}^{(p|(q}\lambda_{43}^{r)|s)},$$
$$\lambda_{(\alpha|(\beta}^{11}\lambda_{\gamma)|\varepsilon)}^{22}-\lambda_{(\alpha|(\beta}^{12}\lambda_{\gamma)|\varepsilon)}^{21}$$

не образует геометрического объекта.

8. Постоянство геометрической точки $M=t^p A_p$, лежащей на луче l, определяется уравнениями

$$t^p\omega_p^\alpha=0,$$
$$d\frac{t^2}{t^1}+\frac{t^2}{t^1}(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega_1^2-\frac{(t^2)^2}{(t^1)^2}\omega_2^1=0. \qquad (30)$$

Постоянство плоскости $T^{[3}x^{4]}=0$, проходящей через луч l, определяется уравнениями

$$T^{[3}\omega_p^{4]}=0,$$
$$d\frac{T^3}{T^4}-\frac{T^3}{T^4}(\omega_3^3-\omega_4^4)+\omega_4^3-\left(\frac{T^3}{T^4}\right)^2\omega_3^4=0. \qquad (31)$$

Системы (30) и (31) являются вполне интегрируемыми.

Будем считать, что ω_p^α удовлетворяют уравнениям обеих систем (30) и (31). Тогда одна форма из ω_p^α остается независимой, т. е. прямая A_1A_2 описывает пучок прямых в плоскости $T^{[3}x^{4]}=0$ с центром t^pA_p. Соответствующая прямая A_3A_4 описывает линейчатую поверхность и касательная плоскость к этой линейчатой поверхности в точке $\tilde{N}=\tilde{T}^\alpha A_\alpha$ пересекает луч l в точке (в силу (19))

$$\tilde{M}=\lambda_{\alpha\beta}^{p[2}t^{1]}\tilde{T}^\alpha T^\beta A_p.$$

Если точку $\tilde{M}$ обозначить $\tilde{M}=\tilde{t}^p A_p$, то будем иметь

$$\tilde{t}^{[1}\lambda_{\alpha\beta}^{2][2}t^{1]}\tilde{T}^\alpha T^\beta=0. \qquad (32)$$

Так как плоскости $T^{[3}x^{4]}=0$ соответствует точка $N=T^\alpha A_\alpha$ на луче A_3A_4 (точка пересечения), то уравнение (32) определяет соответствие между двумя точками M, $\tilde{M}$ луча l и двумя точками N и $\tilde{N}$ луча l^*. Если любые две точки из этих четырех точек заданы, то соответствие между остальными двумя точками является проективным.

Соответствие (32) определяется компонентами фундаментального геометрического объекта второго порядка. Так как $\lambda_{\alpha\beta}^{pq}=\lambda_{\beta\alpha}^{qp}$, то соответствие (32) является симметрическим относительно пар точек

$$(t^pA_p,\ T^\alpha A_\alpha) \text{ и } (\tilde{t}^pA_p,\ \tilde{T}^\alpha A_\alpha).$$

Если $\mu\neq 0$, то проективное соответствие (32) между точками M и $\tilde{M}$, при заданных N и $\tilde{N}$, является инволюцией тогда и только тогда, когда фиксированные точки N и $\tilde{N}$ совпадают. Также соответствие (32) между точками N и $\tilde{N}$ является инволюцией, когда M и $\tilde{M}$ заданы и совпадают. Эти две инволюции определяются компонентами геометрического объекта (21).

Уравнение (32) разлагается на два линейных множителя относительно T^α и $\tilde{T}^\alpha$, если

$$\begin{vmatrix} \tilde{t}^{[1}\lambda^{2]}_{33}{}^{[2}t^{1]} & \tilde{t}^{[1}\lambda^{2]}_{34}{}^{[2}t^{1]} \\ \tilde{t}^{[1}\lambda^{2]}_{43}{}^{[2}t^{1]} & \tilde{t}^{[1}\lambda^{2]}_{44}{}^{[2}t^{1]} \end{vmatrix} = 0. \tag{33}$$

Уравнение (33) определяет соответствие между точками M и $\tilde{M}$ луча l. Это соответствие определяется компонентами геометрического объекта (23).

Уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^{11}_{\alpha\beta}\tilde{T}^\alpha T^\beta & \lambda^{12}_{\alpha\beta}\tilde{T}^\alpha T^\beta \\ \lambda^{21}_{\gamma\varepsilon}\tilde{T}^\gamma T^\varepsilon & \lambda^{22}_{\gamma\varepsilon}\tilde{T}^\gamma T^\varepsilon \end{vmatrix} = 0 \tag{34}$$

определяет соответствие между точками N и $\tilde{N}$ луча $A_3 A_4$. Это соответствие двойственно соответствию (33) и определяется компонентами геометрического объекта (22).

Соответствие вида (33) рассматривалось автором в [5].

Соответствие (33) имеет четыре двойные точки (действительные, мнимые или совпадающие). Эти четыре двойные точки определяются алгебраическим уравнением четвертого порядка, коэффициентами которого являются компоненты геометрического объекта (29).

Двойные точки соответствия (34) определяются компонентами геометрического объекта (28).

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
23. XII. 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического общества, 1953, т. 2, 275—382.

2. К. И. Гринцевичюс. О коррелятивных элементах, Литовский математический сборник, 1963, т. 3, № 2, 248—249.

3. В. И. Близникас. К дифференциальной геометрии билинейно-метрических пространств линейных элементов, Учен. зап. Вильнюсского гос. ун-та, 1960, т. 33, сер. физ.-мат., IX, 97—106.

4. С. П. Фиников. Теория конгруэнций, М.—Л., 1950

5. К. И. Гринцевичюс. Линейный комплекс, присоединенный к дифференциальной окрестности второго порядка луча комплекса, Успехи матем. наук, 1958, т. XIII, вып. 2(80), 175—180.

APIE KORELIATYVINIŲ ELEMENTŲ KOMPLEKSĄ

K. GRINCEVIČIUS

(Reziumė)

Koreliatyviniu elementu vadiname tiesę ir su ja susijusią koreliacijų klasę. Trimatėje erdvėje visų koreliatyvinių elementų daugdara yra penkiaparametrinė. Koreliatyvinių elementų kompleksu vadiname keturparametrinę tokių elementų daugdarą. Tiesių kompleksas yra ypatingas koreliatyvinių elementų kompleksas. Šiame straipsnelyje tiriamas koreliatyvinių elementų neypatingas kompleksas. Gauti antros eilės fundamentalinio objekto kai kurie poobjekčiai.

ÜBER EINEN KOMPLEX DER KORRELATIVEN ELEMENTE

K. GRINCEVIČIUS

(Zusammenfassung)

Ein korrelatives Element wird von einer Gerade $A_1 A_2$ und einer Klasse (7) der Korrelationen (2) gebildet. Im dreidimensionalen Punktraume hängt die Gesamtheit der korrelativen Elemente von fünf Parametern ab. Mit „Komplex der korrelativen Elemente" verstehen wir eine vierdimensionale Gesamtheit derselben. In dem Artikel wird die Differentialumgebung zweiter Ordnung eines Komplexes der korrelativen Elemente untersucht. Ein Strahlenkomplex ist ein besonderer Komplex der korrelativer Elemente und kommt daher im vorliegenden Artikel nicht in Betracht.