О Z-ФУНКЦИЯХ ГЕККЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ МНИМОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ

К. БУЛОТА

В данной работе рассматривается мнимое квадратичное поле $K(\sqrt{-d})$, которое известным способом ([1], [5], [6]) расширяется до систем идеальных чисел.

Используя в [1] и в [3] полученное приближенное функциональное уравнение дзета-функций Гекке, доказываются некоторые теоремы относительно Z-функций Гекке, а также применением новых оценок для сумм вида

$$\Sigma\tau(\alpha)$$

улучшаются „плотностные" теоремы [2] о расположении нулей дзета-функций Гекке в „критической" полосе

$$\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s = \sigma \leqslant 1.$$

На основе полученных теорем улучшаются остаточные члены в асимптотических формулах распределения простых чисел мнимого квадратичного поля (Кубилюс [6]).

Лемма 1. *Пусть* $x \geqslant 2$, $\tau(\alpha)$ — *число идеальных делителей* α, φ_1 *и* φ_2 — *вещественные, такие, что* $0 \leqslant \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$.

Тогда

$$\sum_{\substack{0 < N\alpha \leqslant x \\ \varphi_1 < \operatorname{Arg} \alpha \leqslant \varphi_2}} \tau(\alpha) = (A_1 \ln x + A_2)(\varphi_2 - \varphi_1)\, x + O\left(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ *и* A_1, A_2 — *некоторые константы, зависящие от поля.*

Лемма доказана в [4]. Она также легко следует из приближенного функционального уравнения Z-функций Гекке мнимого квадратичного поля ([3], теорема 2), теоремы о частных суммах ряда Дирихле (Титчмарш [7]) и методов И. Кубилюса суммирования характеров Гекке.

Лемма 2. *Пусть* $\Omega > 0$, $0 < \Delta < \frac{1}{2}\Omega$, φ_1 *и* φ_2 — *вещественные, такие, что* $0 \leqslant \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant \Omega - 2\Delta$, r — *натуральное число. Тогда существует периодическая функция* $f(\omega)$ *с периодом* Ω, *обладающая следующими свойствами:*

$$\begin{aligned} 1^0.\quad & f(\omega) = 1 && \text{на интервале } [\varphi_1, \varphi_2], \\ & 0 \leqslant f(\omega) \leqslant 1 && \quad ,, \quad [\varphi_1 - \Delta, \varphi_1] \text{ и } [\varphi_2, \varphi_2 + \Delta], \\ & f(\omega) = 0 && \quad ,, \quad [\varphi_2 + \Delta, \varphi_1 + \Omega - \Delta]. \end{aligned} \tag{2}$$

2°. $f(\omega)$ *разлагается в ряд Фурье*

$$f(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{\frac{2\pi i}{\Omega} m\omega}, \tag{3}$$

где

$$a_0=\frac{1}{\Omega}(\varphi_2-\varphi_1+\Delta), \tag{4}$$

$$|a_m|\leqslant\begin{cases}\frac{1}{\Omega}(\varphi_2-\varphi_1+\Delta),\\ \frac{2}{\pi|m|}, \quad (m\neq 0),\\ \frac{2}{\pi|m|}\left(\frac{r\Omega}{\pi|m|\Delta}\right)^r, \quad (m\neq 0).\end{cases} \tag{5}$$

Лемма является обобщением известной леммы И. М. Виноградова. Приводится из [6].

Лемма 3. *Пусть* $x>3$, $X>2$, $X\leqslant x\ln^{-1}x$, Ξ — *характер Гекке второго рода с показателем* m, $|m|\leqslant M$.

Тогда

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ 0<N\mathfrak{a}\leqslant x}} \Xi(\mathfrak{a})\,\Lambda(\mathfrak{a})=E(\Xi)\,x-\sum_{|\gamma|\leqslant X}\frac{x^{\rho}}{\rho}+O\left(\frac{x}{X}\ln^2 MX\right). \tag{6}$$

где:

$\mathfrak{R}$ — *фиксированный класс идеалов поля,*

$\Lambda(\mathfrak{a})$ — *обобщенная функция Мангольдта* ([5], § 6),

$$E(\Xi)=\begin{cases}1, & \Xi=\Xi_0 \text{ — главный характер Гекке,}\\ 0, & \Xi\neq\Xi_0,\end{cases}$$

сумма в правой части (6) *берется по всем нулям* $\rho=\beta+i\gamma$ *функции* $Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})$, *ординаты которых:* $|\gamma|\leqslant X$.

Лемма доказана в [6] (лемма 14).

Лемма 4 (Ван дер Корпут). *Пусть* $f(x)$ — *вещественная,* k *раз дифференцируемая функция, непрерывная вместе со своими производными на интервале* $[a,\ b]$, $b>a>1$.

Пусть, далее, на всем интервале $[a,\ b]$

$$\lambda_k\leqslant|f^{(k)}(x)|\leqslant h_k\lambda_k. \tag{7}$$

Тогда

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)}=O\left\{h_k^{\frac{2}{K}}(b-a)\,\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}}+(b-a)^{1-\frac{2}{K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}}\right\}, \tag{8}$$

где $K=2^{k-1}$.

Это известная лемма Ван дер Корпута, которую можно найти, например, в [7].

Лемма 5. *Пусть* $\Xi(\mathfrak{b})$ — *характер Гекке второго рода с показателем* m *и образующим идеалом* $\mathfrak{m}\neq 0$ (*подробное определение в* [1]), t — *вещественное число,* g — *число единиц поля, которые* $\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$.

Тогда при $n>V=\sqrt{m^2g^2+4t^2}\gg 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}_0\\ N\mathfrak{b}\leqslant n}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{it}}\ll n\delta, \tag{9}$$

где

$$\delta=\begin{cases}\left(Vn^{-\frac{k}{2}}\right)^{\frac{K}{2K^2+K-4}}, \quad V\geqslant n^{\frac{k}{2}-1-\frac{4-K}{2K(K-1)}}, & (10)\\ \left(V^{-1}n^{-\frac{2(K-1)}{K}+\frac{k}{2}}\right)^{\frac{1}{2K-1}}, \quad V\leqslant n^{\frac{k}{2}-1-\frac{4-K}{2K(K-1)}}, & (11)\end{cases}$$

$\mathfrak{R}_0$ — *класс идеалов поля,* $K=2^{k-1}$, $k\geqslant 2$ — *натуральное число.*

Доказательство. Расширим мнимое квадратичное поле $K(\sqrt{-d})$ присоединением идеальных чисел. Как уже говорилось в [1], в этой системе идеальных чисел классу идеалов $\mathfrak{R}_0$ однозначно соответствует двумерная сетка K_0 идеальных чисел. Каждому идеалу $\mathfrak{b}$ соответствует однозначным образом определенное число β сетки K_0, если из каждой группы сопряженных чисел выбрать по одному представителю. Также имеют место равенства:

$$N\mathfrak{b}=N(\beta),$$
$$\Xi(\mathfrak{b})=\Xi(\beta).$$

Систему чисел $\beta\in K_0$ разобъем на классы вычетов по $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$. Если $\beta_j\equiv\vartheta_j\ (\operatorname{mod}\mathfrak{m})$, то числа β_j представимы при некотором базисе ω_{1j}, ω_{2j} в виде

$$\beta_j=x\omega_{1j}+y\omega_{2j}+\vartheta_j, \tag{12}$$

(Кубилюс [5]). Получаем следующее выражение оцениваемой суммы S:

$$S=\frac{1}{g'}\sum_{\vartheta_j}^{\operatorname{mod}\mathfrak{m}}\chi(\vartheta_j)\sum_{\substack{\beta_j\in K_0\\ \beta_j\bar\beta_j\leqslant n}}e^{i(m\arg\beta_j-t\ln\beta_j\bar\beta_j)}.$$

Введем обозначения:

$$F_j(x,y)=mg\arg(x\omega_{1j}+y\omega_{2j}+\vartheta_j)-t\ln(x\omega_{1j}+y\omega_{2j}+\vartheta_j)(x\bar\omega_{1j}+y\bar\omega_{2j}+\bar\vartheta_j),$$
$$Z_{1j}e^{i\varphi_{1j}}=\omega_{1j}(x\omega_{1j}+y\omega_{2j}+\vartheta_j),$$
$$Z_{2j}e^{i\varphi_{2j}}=\omega_{2j}(x\omega_{1j}+y\omega_{2j}+\vartheta_j),$$
$$Ve^{i\Theta}=2t+img.$$

В работе Кубилюса ([5], лемма 9) показано, что производная функции $F_j(x,y)$ выражается следующим образом:

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k}F_j(x,y)=(-1)^k(k-1)!\,VZ_{2j}^k\cos(k\varphi_{2j}+\Theta). \tag{13}$$

Очевидно, что производная по x выражается аналогично, при этом числа Z_{2j}, φ_{2j} заменяются числами Z_{1j} и φ_{1j} соответственно.

Область $\beta_j\bar\beta_j\leqslant n$ представляет собой в плоскости двух переменных x и y некоторый овал, эллиптического типа, который при достаточно большом n содержит внутри себя начало координат. Достаточно оценить сумму S в каком-нибудь одном квадранте, например, в первом. В остальных квадрантах оценка будет в точности такой же.

Рассмотрим область

$$\beta_j\bar\beta_j\leqslant n,$$
$$0<\arg\beta_j\leqslant\frac{\pi}{4}, \tag{14}$$

которой соответствующую часть суммы S обозначим через S_{j1}. Удалим из области (14) два сектора: один с радиусом Z, где $Z<\sqrt{n}$:

$$\beta_j\bar{\beta}_j \leqslant Z^2, \qquad 0<\arg\beta_j \leqslant \frac{\pi}{4}, \tag{15}$$

и другой с углом раствора $O(\delta)$:

$$\beta_j\bar{\beta}_j \leqslant n, \qquad |\cos(k\varphi_{1j}+\Theta)| \leqslant \delta, \tag{16}$$

где $0<\delta<1$.

Всю оставшуюся из (14) площадь после удаления секторов (15) и (16) разделим вертикальными прямыми на полосы Π_p:

$$x\in\Pi_p, \quad \text{если} \quad 2^p Z_1 < x \leqslant 2^{p+1} Z_1,$$
$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ P-1,$$
$$x\in\Pi_P, \quad \text{если} \quad 2^P Z_1 < x \leqslant Z_2,$$
$$Z_1=O(Z).$$

Через Z_2 обозначена максимальная абсцисса в области (14). Очевидно, что при достаточно большом n, $Z_2=O(\sqrt{n})$.

В каждой полосе Π_p, за исключением той части, которая принадлежит (16), выполняются неравенства:

$$c_1 \frac{V\delta}{(2^{p+1}Z_1)^k} \leqslant \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} F_j(x,\ y) \right| \leqslant c_2 \frac{V}{(2^p Z_1)^k}, \quad k\geqslant 1,$$

при некоторых постоянных $c_1>0$, $c_2>0$.

Оценивая сумму по секторам (15) и (16) тривиально, имеем

$$S_{j1} \leqslant n\delta + Z_1^2 + \sum_{p=0}^{P} \sum_{y=1}^{x} \left| \sum_{\substack{2^p Z_1 < x \leqslant 2^{p+1} Z_1 \\ |\cos(k\varphi_{1j}+\Theta)| \geqslant \delta}} e^{iF_j(x,\ y)} \right|.$$

Применяя для сумм по x лемму Ван дер Корпута, полагаем в ней

$$k\geqslant 2,$$
$$h_k=\delta^{-1},$$
$$\lambda_k=\frac{c_3 V\delta}{(2^p Z_1)^k}.$$

Получаем

$$S_{j1} \leqslant n\delta + Z^2 + \delta^{\frac{4-3K}{2K(K-1)}} V^{-\frac{1}{2(K-1)}} n^{1-\frac{k}{4(K-1)}} +$$
$$+\delta^{-\frac{1}{2(K-1)}} V^{-\frac{1}{2(K-1)}} n^{1-\frac{1}{K}+\frac{k}{4(K-1)}}.$$

Выбирая:

$$Z=\sqrt{n\delta},$$
$$\delta=\left(Vn^{-\frac{k}{2}}\right)^{\frac{K}{2K^2+K-4}}, \qquad \text{для } (10),$$
$$\delta=\left(V^{-1} n^{-\frac{2(K-1)}{K}+\frac{k}{2}}\right)^{\frac{1}{2K-1}} \qquad \text{„ } (11),$$

получаем оценку (9) для суммы S_{j1}.

Во второй части первого квадранта — для $\frac{\pi}{4} < \arg\beta_j \leqslant \frac{\pi}{2}$ доказательство аналогичное, оно отличается только тем, что роли x и y меняются. Лемма доказана.

Замечание 1. Из хода доказательства видно, что знак числа t не играет никакой роли и (9) верно для любого вещественного t, удовлетворяющего указанному условию. Также и замена характера Ξ его сопряженным нисколько не отражается на результаты.

Замечание 2. Сформулируем результат леммы для частного случая

$$\delta = \begin{cases} V^{\frac{4}{131}} n^{-\frac{10}{131}}, & \text{для} \quad V^{\frac{2}{5}} \leqslant n \leqslant V^{\frac{136}{209}}, & (17) \\ V^{\frac{2}{33}} n^{-\frac{4}{33}}, & \text{,,} \quad V^{\frac{136}{209}} \leqslant n \leqslant V^{\frac{2}{3}}, & (18) \\ V^{\frac{1}{8}} n^{-\frac{3}{16}}, & \text{,,} \quad V^{\frac{2}{3}} \leqslant n \leqslant V^{\frac{10}{7}}, & (19) \\ V^{2} n^{-\frac{3}{2}}, & \text{,,} \quad V^{\frac{10}{7}} \leqslant n. & (20) \end{cases}$$

(17)—(20) получаются из (9) при $k=2$, 3, 4 и при наилучшем подборе интервалов для δ.

Теорема 1. *При $V \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$Z\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll V^{\frac{7}{16}}. \tag{21}$$

Доказательство. Положим в приближенном функциональном уравнении

$$X = Y = \frac{\sqrt{D}}{4\pi} V.$$

Имеем:

$$Z\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll \left| \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+it}} \right| + \left| \psi\left(\frac{1}{2}+it\right) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b}<X}} \frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{\frac{1}{2}-it}} \right| + O(\ln^2 V).$$

По одной лемме Кубилюса ([6], лемма 3)

$$\psi(s) \ll D^{\frac{1}{2}-\sigma} V^{1-2\sigma}.$$

Следовательно,

$$\psi\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll 1.$$

По теореме Абеля о суммировании по частям:

$$Z\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll \int_{1}^{V} \frac{S(\xi)\,d\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}} + V^{-\frac{1}{2}} S(V),$$

где

$$S(\xi) = \left| \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a}<\xi}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{it}} \right|.$$

По лемме 5, (19),

$$S(\xi) \ll V^{\frac{1}{8}} \xi^{\frac{13}{16}}, \quad \text{для} \quad V^{\frac{2}{3}} \leqslant \xi \leqslant V,$$

$$S(\xi) \ll \xi, \quad \text{для} \quad \xi < V^{\frac{2}{3}}.$$

Следовательно,

$$Z\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll \int_{1}^{V^{\frac{2}{3}}} \xi^{-\frac{1}{2}} d\xi + V^{\frac{1}{8}} \int_{V^{\frac{2}{3}}}^{V} \xi^{-\frac{11}{16}} d\xi + V^{\frac{7}{16}},$$

и отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *При* $V \geqslant 2$ *справедливы оценки*

$$Z(\sigma+it) \ll \begin{cases} V^{\frac{7}{8}(1-\sigma)} \ln V, & \frac{1}{2} < \sigma \leqslant 1, \quad (22) \\ V^{1-\frac{9}{8}\sigma} \ln V, & 0 \leqslant \sigma < \frac{1}{2}. \quad (23) \end{cases}$$

Доказательство. Теорема следует из оценок:

$$Z(1+it) \ll \ln V, \qquad V \geqslant 2,$$

$$Z(0+it) \ll V \ln V, \qquad V \geqslant 2,$$

(Кубилюс [6], лемма 6), или из приближенного функционального уравнения, далее, из теоремы 1 и из выпуклости порядка рядов Дирихле (Титчмарш [8], 9.41).

Теорема 3. *При*

$$|m| \leqslant M, \quad M \geqslant 2, \quad T \geqslant 1$$

справедлива оценка

$$\int_{1}^{T} \left| Z\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \ll (M+T) \ln^4 MT. \tag{24}$$

Доказательство. Заменяя в интеграле $Z\left(\frac{1}{2}+it\right)$ приближенным функциональным уравнением ([3]), в котором полагаем

$$X = Y = \frac{\sqrt{D}}{4\pi} V,$$

имеем:

$$I \ll \int_{1}^{T} |Z|^2 dt + \int_{1}^{T} |Z| R dt + \int_{1}^{T} R^2 dt,$$

где

$$Z = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+it}}, \quad R = \ln^2 V_0, \quad V_0 = \sqrt{m^2 g^2 + 4T^2},$$

$\mathfrak{R}$ — фиксированный класс идеалов поля. Применяя во втором интеграле неравенство Коши – Буняковского, а во первом производя известные преобразования, получаем

$$I \ll T\ln^4 V_0 + \int_1^T \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+it}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_1<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a}_1)}{N\mathfrak{a}_1^{\frac{1}{2}-it}}\, dt \ll$$

$$\ll T\ln^4 V_0 + T\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\tau^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} + \sum\sum_{\substack{\mathfrak{a},\,\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<N\mathfrak{a}_1<X}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}} N\mathfrak{a}_1^{\frac{1}{2}} \ln\frac{N\mathfrak{a}_1}{N\mathfrak{a}}}.$$

Применяя леммы 5 и 6 из [2], имеем

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\tau^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \ll \ln^4 V_0, \tag{25}$$

$$\sum\sum_{\substack{\mathfrak{a},\,\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<N\mathfrak{a}_1<X}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}} N\mathfrak{a}_1^{\frac{1}{2}} \ln\frac{N\mathfrak{a}_1}{N\mathfrak{a}}} \ll X\ln^4 V_0. \tag{26}$$

Следовательно,

$$I \ll (T+V_0)\ln^4 V_0.$$

Так как

$$V_0 \ll T+M,$$

то отсюда следует утверждение теоремы.

Аналогичные теоремы о среднем можно получить и во всей критической полосе.

Теорема 4. *Пусть*

$$\Xi_2 = \Xi_2(N\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ \mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_1=N\mathfrak{a}_2=N\mathfrak{a}}} \Xi(\mathfrak{a}_1)\bar{\Xi}(\mathfrak{a}_2).$$

Тогда для $\sigma > \frac{1}{2}+\varepsilon > \frac{1}{2}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_1^X |Z(\sigma+it,\ \Xi,\ \mathfrak{R})|^2\,dt = Z(2\sigma,\ \Xi_2,\ \mathfrak{R}). \tag{27}$$

Доказательство. Теорема доказывается аналогично предыдущей. Полагая в приближенном функциональном уравнении ([3], (57))

$$0<c<Y\ll 1,$$

$$X = \frac{DV^2}{(4\pi)^2 Y} = O(V^2),$$

имеем

$$Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} + O\left(X^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) = Z + O\left(X^{\frac{1}{2}-\sigma}\right).$$

Далее,

$$\int_1^X |Z|^2 dt = \int_1^X \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{\sigma+it}} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{b}<X}} \frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{\sigma-it}}\, dt =$$

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{b}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{a}^{\sigma} N\mathfrak{b}^{\sigma}} \int_{\max(N\mathfrak{a},\, N\mathfrak{b})}^{X} \left(\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}\right)^{it} dt =$$

$$= \sum_{n<X} \frac{1}{n^{2\sigma}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ \mathfrak{b}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}=N\mathfrak{b}=n}} \Xi(\mathfrak{a})\bar{\Xi}(\mathfrak{b})(X-N\mathfrak{a}) + O\left(\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\,\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<N\mathfrak{b}<X}}\sum \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\sigma} N\mathfrak{b}^{\sigma} \ln \frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}}\right) =$$

$$= X \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi_2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{2\sigma}} + O\left(\sum_{n<X} n^{1+\varepsilon-2\sigma}\right) + O(X^{2-2\sigma}\ln^4 X) + O(1) =$$

$$= X\{Z(2\sigma,\ \Xi_2,\ \mathfrak{R}) + O(X^{1+\varepsilon-2\sigma})\} + O(1).$$

Следовательно, при $\sigma > \frac{1+\varepsilon}{2}$,

$$\int_1^X |Z|^2 dt = \int_1^X \Bigl| \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{\sigma+it}} \Bigr|^2 dt \sim XZ(2\sigma,\ \Xi_2,\ \mathfrak{R}).$$

Так как

$$\int_1^X |Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})|^2 dt = \int_1^X |Z|^2 dt + O\left(\int_1^X |Z|\, X^{\frac{1}{2}-\sigma} dt\right) + O\left(\int_1^X X^{1-2\sigma} dt\right) =$$

$$= \int_1^X |Z|^2 dt + O\left(\int_1^X |Z|^2 dt \int_1^X X^{1-2\sigma} dt\right)^{\frac{1}{2}} + O(X^{2-2\sigma}) =$$

$$= \int_1^X |Z|^2 dt + O\left(X^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}-\sigma}\right) + O(X^{2-2\sigma}),$$

то отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, $M \geqslant 2$, $T \geqslant 2$. *Обозначим через* $N(\sigma,\ T)$ — *число нулей дзета-функций Гекке* $Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})$, $|m| \leqslant M$, *в области*

$$\sigma \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

$$E(\Xi) \leqslant |t| \leqslant T. \tag{28}$$

Тогда

$$N(\sigma,\ T) \ll \{M^{4c_1} T^{2(1+2c_2)} (M+T)^{4c_3} \ln^{4c_4+6}(MT)\}^{1-\sigma} \ln^{46}(MT), \tag{29}$$

где числа $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ *определяются из оценочного неравенства*

$$Z\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{R}\right) \ll M^{c_1} T^{c_2} (M+T)^{c_3} \ln^{c_4}(MT), \tag{30}$$

$$E(\Xi) = \begin{cases} 1, & \Xi = \Xi_0, \\ 0, & \Xi \neq \Xi_0. \end{cases}$$

Доказательство. Теорема доказывается таким же образом, как и соответствующая теорема для ζ-функции Римана.

Положим также, как и в [2],

$$\Psi(s)=Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}-1,$$

$$\lambda(\mathfrak{a})=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ \mathfrak{D}/\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{D}<X}}\mu(\mathfrak{D})\ll\tau(\mathfrak{a}).$$

Тогда

$$\Psi(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}\geqslant X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\lambda(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}.$$

Функция $\Psi(s)$ является всюду в плоскости s регулярной, кроме точки $s=1$, в которой она в случае $\Xi=\Xi_0$ имеет простой полюс.

По теореме Иенсена ([2], [7]), как показано в [2], получаем

$$\int_C \ln\Phi_0(s)\,ds=-2\pi i\int_\sigma^\beta N'(\alpha,\ T,\ T_1)\,d\alpha,$$

$$\Phi_0(s)=1-\Psi^2(s),$$

где $N'(\alpha,\ T,\ T_1)$ обозначает разность между числом нулей и полюсов функции $\Phi_0(s)$ в области, ограниченной контуром C, причем считаются нули и полюсы лишь на частях контура $C_2,\ C_3$:

$$C=\begin{cases} C_1: & \operatorname{Re}s=\sigma, \quad T\leqslant|\operatorname{Im}s|\leqslant T_1,\\ C_2: & |\operatorname{Im}s|=T_1 \quad \sigma\leqslant\operatorname{Re}s\leqslant\beta,\\ C_3: & \operatorname{Re}s=\beta, \quad T\leqslant|\operatorname{Im}s|\leqslant T_1,\\ C_4: & |\operatorname{Im}s|=T, \quad \sigma\leqslant\operatorname{Re}s\leqslant\beta,\end{cases}$$

$$2\leqslant T<T_1\leqslant 2T,\qquad \frac{1}{2}\leqslant\sigma<\beta.$$

Так как

$$\Phi_0(s)=-Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}\left\{Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}-2\right\},$$

то

$$N(\sigma,\ T,\ T_1)\leqslant N'(\sigma,\ T,\ T_1).$$

Как было показано в [2],

$$\operatorname{Im}\int_C\ln\Phi_0(s)\,ds\ll\int_T^{T_1}|\Psi(\sigma+it)|^2\,dt+\ln MT.$$

Следовательно,

$$\int_\sigma^\infty N(\alpha,\ T,\ T_1)\,d\alpha\ll\int_T^{T_1}|\Psi(\sigma+it)|^2\,dt+\ln MT.$$

Оценим теперь

$$\int_T^{T_1}|\Psi(\sigma+it)|^2\,dt.$$

Имеем

$$\int_0^T |\Psi(1+\delta+it)|^2\,dt = \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_1\geqslant X}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_2\geqslant X}} \frac{\lambda(\mathfrak{a}_1)\overline{\lambda(\mathfrak{a}_2)}}{N\mathfrak{a}_1^{1+\delta}\,N\mathfrak{a}_2^{1+\delta}} \int_0^T \left(\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)^{it} dt \ll$$

$$\ll T \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}\geqslant X}} \frac{|\rho(\mathfrak{a})|}{N\mathfrak{a}^{2+2\delta}} + \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_2>N\mathfrak{a}_1\geqslant X}} \sum_{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}} \frac{|\lambda(\mathfrak{a}_1)\lambda(\mathfrak{a}_2)|}{N\mathfrak{a}_1^{1+\delta}\,N\mathfrak{a}_2^{1+\delta}\ln\dfrac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}},$$

где

$$\rho(\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ \mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_1=N\mathfrak{a}_2=N\mathfrak{a}}} \lambda(\mathfrak{a}_1)\bar{\lambda}(\mathfrak{a}_2) \leqslant \tau^2(\mathfrak{a})\,\tau(N\mathfrak{a}) \ll \tau^4(\mathfrak{a}).$$

В силу оценок лемм 4 и 6 в [2] имеем

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}\leqslant\xi}} \tau^4(\mathfrak{a}) \ll \xi\ln^{15}(\xi+2), \tag{31}$$

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R},\ \mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}\\ \xi\geqslant N\mathfrak{a}_2>N\mathfrak{a}_1}} \sum \frac{\tau(\mathfrak{a}_1)\tau(\mathfrak{a}_2)}{N\mathfrak{a}_1^{\frac{1}{2}}\,N\mathfrak{a}_2^{\frac{1}{2}}\ln\dfrac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}} \ll \xi\ln^{43}(\xi+2). \tag{32}$$

Отсюда следует по теореме Абеля о частном суммировании

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}\geqslant X}} \frac{\tau^4(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{1+\gamma}} = \sum_{n\geqslant X} \frac{1}{n^{1+\gamma}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}=n}} \tau^4(\mathfrak{a}) = \int_X^\infty \frac{(1+\gamma)}{\xi^{2+\gamma}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ X\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant\xi}} \tau^4(\mathfrak{a})\,d\xi \ll$$

$$\ll \int_X^\infty \frac{(1+\gamma)\ln^{15}\xi}{\xi^{1+\gamma}}\,d\xi = \frac{\left(1+\dfrac{1}{\gamma}\right)}{X^\gamma} \int_1^\infty \frac{\ln^{15}(Xx^{\frac{1}{\gamma}})}{x^2}\,dx \ll \frac{1}{\gamma X^\gamma}\left(\ln X+\frac{1}{\gamma}\right)^{15}.$$

Т. к. как

$$X^{2\delta} = e^{2\delta\ln X} > \frac{1}{15!}(2\delta\ln X)^{15},$$

то

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}\geqslant X}} \frac{\tau^4(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{2+2\delta}} \ll \frac{\ln^{15}X}{X^{1+2\delta}} \ll \frac{1}{X\delta^{15}}. \tag{33}$$

Для $\lambda>1$

$$\frac{1}{\ln\lambda} < 1+\frac{1}{\sqrt{\lambda}\ln\lambda}$$

и следовательно:

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_2>N\mathfrak{a}_1\geqslant X}} \sum_{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}} \frac{\tau(\mathfrak{a}_1)\tau(\mathfrak{a}_2)}{(N\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^{1+\delta}\ln\dfrac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}} < \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_2>N\mathfrak{a}_1\geqslant X}} \sum_{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}} \frac{\tau(\mathfrak{a}_1)\tau(\mathfrak{a}_2)}{(N\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^{1+\delta}} +$$

$$+ \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_2>N\mathfrak{a}_1\geqslant X}} \sum_{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}} \frac{\tau(\mathfrak{a}_1)\tau(\mathfrak{a}_2)}{(N\mathfrak{a}_1)^\delta(N\mathfrak{a}_2)^{1+\delta}(N\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^{\frac{1}{2}}\ln\dfrac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}} \ll \left(\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}\geqslant X}} \frac{\tau(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^{1+\delta}}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_2>N\mathfrak{a}_1\geqslant(N\mathfrak{a}_1)^\delta}} \sum_{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}} \frac{\tau(\mathfrak{a}_1)\tau(\mathfrak{a}_2)}{(N\mathfrak{a}_2)^{1+\delta}(N\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^{\frac{1}{2}}\ln\dfrac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}} \ll \left(\int_X^\infty \xi^{-2-\delta} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ X\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant\xi}} \tau(\mathfrak{a})\,d\xi\right)^2 +$$

$$+\int_X^\infty \xi^{-2-\delta} \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\ \mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}\\ X\leqslant N\mathfrak{a}_1<N\mathfrak{a}_2\leqslant\xi}}\sum \frac{\tau(\mathfrak{a}_1)\,\tau(\mathfrak{a}_2)}{(N\mathfrak{a}_1 N\mathfrak{a}_2)^{\frac{1}{2}}\ln\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}}\,d\xi \ll \left(\int_X^\infty \xi^{-1-\delta}\ln\xi\,d\xi\right)^2 +$$

$$+\int_X^\infty \xi^{-1-\delta}\ln^{43}\xi\,d\xi \ll \frac{1}{\delta^2 X^{2\delta}}\left(\ln X+\frac{1}{\delta}\right)^2+\frac{1}{\delta X^\delta}\left(\ln X+\frac{1}{\delta}\right)^{43}\ll \delta^{-44}. \quad (34)$$

Из (33) и (34) следует

$$\int_0^T |\Psi(1+\delta+it)|^2\,dt \ll \delta^{-44}+\frac{T}{X}\,\delta^{-15}. \quad (35)$$

Имеем, далее,

$$\left|\Psi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \ll \left|Z\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{R}\right)\right|^2\left|\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+it}}\right|^2+1.$$

Следовательно,

$$\int_0^T\left|\Psi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \ll M^{2c_1}T^{2c_2}(M+T)^{2c_3}\ln^{2c_4}(MT)\int_0^T\left|\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+it}}\right|^2 dt.$$

Имеем в силу лемм 5 и 6 из [2], согласно неравенству

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ \mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_1=N\mathfrak{a}_2=N\mathfrak{a}}} \Xi(\mathfrak{a}_1)\,\mu(\mathfrak{a}_1)\,\overline{\Xi}(\mathfrak{a}_2)\,\mu(\mathfrak{a}_2)\ll\tau^2(\mathfrak{a}),$$

следующую оценку:

$$\int_0^T\left|\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+it}}\right|^2 dt=\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_1<X}}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_2<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a}_1)\,\mu(\mathfrak{a}_1)\,\overline{\Xi}(\mathfrak{a}_2)\,\mu(\mathfrak{a}_2)}{N\mathfrak{a}_1^{\frac{1}{2}}\,N\mathfrak{a}_2^{\frac{1}{2}}}\int_0^T\left(\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)^{it}dt\ll$$

$$\ll T\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\tau^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}+\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{R}\,\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}_1<N\mathfrak{a}_2<X}}\sum\frac{1}{N\mathfrak{a}_1^{\frac{1}{2}}\,N\mathfrak{a}_2^{\frac{1}{2}}\ln\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}}\ll T\ln^3 X+X\ln^2 X\ll(T+X)\ln^3 X,$$

и, таким образом,

$$\int_0^T\left|\Psi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt\ll M^{2c_1}T^{2c_2}(M+T)^{2c_3}(T+X)\ln^{2c_4+3}(MTX). \quad (36)$$

Таким образом, для $X=T$, $T<T_1\leqslant 2T$,

$$\int_T^{T_1}\left|\Psi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt\ll M^{2c_1}T^{2c_2+1}(M+T)^{2c_3}\ln^{2c_4+3}(MT),$$

$$\int_T^{T_1}|\Psi(1+\delta+it)|^2\,dt\ll 1+\delta^{-44}.$$

Интегралы такого типа являются выпуклой функцией от σ (Титчмарш [7], гл. VII, п. 8), следовательно, при $0{,}5\leqslant\sigma\leqslant 1+\delta$ имеем:

$$\int_T^{T_1}|\Psi(\sigma+it)|^2\,dt\ll\left\{M^{2c_1}T^{2c_2+1}(M+T)^{2c_3}\ln^{2c_4+3}(MT)\right\}^{\frac{1+\delta-\sigma}{\frac{1}{2}+\delta}}(1+\delta^{-44})^{\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\delta}}. \quad (37)$$

Полагая $\delta = \ln^{-1} MT$, находим из (37):

$$\int_{T}^{T_1} |\Psi(\sigma+it)|^2\,dt \ll \{ M^{4c_1} T^{2(1+2c_3)} (M+T)^{4c_3} \ln^{4c_4+6}(MT) \}^{1-\sigma} \ln^{46} MT. \tag{38}$$

Получаем

$$\int_{\sigma}^{\infty} N(\alpha,\ T,\ T_1)\,d\alpha \ll \{ M^{4c_1} T^{2(1+2c_3)} (M+T)^{4c_3} \ln^{4c_4+6}(MT) \}^{1-\sigma} \cdot \ln^{46}(MT). \tag{39}$$

Теорема отсюда следует обычными рассуждениями, как, например, в [2] или [7].

Следствие. *Полагая, в силу теоремы* 1,

$$c_1 = c_2 = c_4 = 0, \qquad c_3 = \frac{7}{16},$$

имеем:

$$N(\sigma,\ T) \ll (M+T)^{\frac{7}{4}(1-\sigma)} T^{2(1-\sigma)} \ln^{52}(MT). \tag{40}$$

Теорема 6. *При обозначениях теоремы* 5 *имеем оценку:*

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} N(\sigma,\ T,\ \Xi) \ll \begin{cases} (MT)^{(6+\varepsilon_1)(1-\sigma)} \ln^{c}(MT), & (41) \\ (MT)^{4(1-\sigma)+\varepsilon_2}, & (42) \end{cases}$$

где c — некоторая положительная постоянная, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$.

Теорема доказывается таким же способом, как и теоремы 2 и 3 в [2].

Обозначим, также как и в предыдущей теореме:

$$\Psi(s) = Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R}) \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} \leqslant Z}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} - 1,$$

$$\Phi_0(s) \equiv \Phi_0(s,\ \Xi) = 1 - \Psi^2(s),$$

$$\Omega_0(s) = \prod_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} \Phi_0(s,\ \Xi).$$

Образуем контуры C_1 и C_2 следующим образом:

$$C_1 = \begin{cases} c_{11}: & \operatorname{Re} s = \alpha, & T_1 - \varepsilon_1 \leqslant |\operatorname{Im} s| \leqslant T_2 + \varepsilon_2, \\ c_{12}: & |\operatorname{Im} s| = T_2 + \varepsilon_2, & \alpha \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \beta, \\ c_{13}: & \operatorname{Re} s = \beta, & T_1 - \varepsilon_1 \leqslant |\operatorname{Im} s| \leqslant T_2 + \varepsilon_2, \\ c_{14}: & |\operatorname{Im} s| = T_1 - \varepsilon_1, & \alpha \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \beta, \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} c_{21}: & \operatorname{Re} s = \alpha, & -T_2 - \varepsilon_2 \leqslant \operatorname{Im} s \leqslant T_2 + \varepsilon_2, \\ c_{22}: & \operatorname{Im} s = T_2 + \varepsilon_2, & \alpha \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \beta, \\ c_{23}: & \operatorname{Re} s = \beta, & -T_2 - \varepsilon_2 \leqslant \operatorname{Im} s \leqslant T_2 + \varepsilon_2, \\ c_{24}: & \operatorname{Im} s = -T_2 - \varepsilon_2, & \alpha \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \beta, \end{cases}$$

причем $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 2$, $T_2 > T_1 \geqslant 1$, ε_1, ε_2 выбираются так, чтобы на горизонтальных линиях c_{12}, c_{14}, c_{22}, c_{24} обоих контуров функция $\operatorname{Re}\Omega_0(s)$ имела не более $O(\ln MT)$ нулей. Это всегда возможно, так как число нулей этой функции в полосе

$$\frac{1}{2} < \sigma \leqslant 2,$$

$$T \leqslant |t| \leqslant T+1,$$

является конечным, и, как это следует из доказательства теоремы 1 в [2], не превышает

$$O(M \ln MT).$$

Такими же рассуждениями, как и в [2], в силу выбора контуров C_1 и C_2, получаем

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} \int_{\alpha}^{\infty} N(\sigma, T_1, T_2)\, d\sigma \ll \sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} \int_{T_1-\varepsilon_1}^{T_2+\varepsilon_2} |\Psi(\alpha+it)|^2 dt + \ln MT,$$

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} \int_{\alpha}^{\infty} N(\sigma, T_2)\, d\sigma \ll \sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} \int_{0}^{T_2+\varepsilon_2} |\Psi(\alpha+it)|^2 dt + \ln MT,$$

или же

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} \int_{\alpha}^{\infty} N(\sigma, T_0, T_0+T)\, d\sigma \ll \sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} \int_{T_0}^{T_0+T} |\Psi(\alpha+it)|^2 dt + \ln MT, \tag{43}$$

$$T-2 \geqslant T_0 \geqslant 0.$$

Для оценки интеграла в (43) используем приближенное функциональное уравнение дзета-функций Гекке в уточненной форме ([3], теорема 2), полагая в нем:

$$X = Y = \frac{\sqrt{D}}{4\pi} V.$$

Отличие составляет применение новых оценок для

$$\sum \tau(\alpha).$$

В [2] при оценке интеграла

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} \int_{T'}^{T''} |\Psi(\sigma+it)|^2 dt$$

использовалась, кроме прочего, следующая теорема Кубилюса ([6], теорема 3):

$$\sum_{\substack{0 < N(\alpha) \leqslant x \\ \varphi_1 < \operatorname{Arg} \alpha \leqslant \varphi_2}} \tau(\alpha) = A_1 x \ln x + A_2 x + O\left(x^{\frac{3}{4}} \ln^{\frac{19}{16}} x\right). \tag{44}$$

Заменяя эту оценку леммой 1 настоящей статьи, теми же приемами, как и в [2], приходим к неравенству:

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} \int_{T_0}^{T_0+T} |\Psi(\alpha+it)|^2 dt \ll [M(T_0+T)]^{(6+\varepsilon_1)(1-\alpha)} \ln^c(MT),$$

полагая

$$Z = X^{-1}(MT)^{3+\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{\Xi\\ |m|\leqslant M}} \int_{\alpha}^{\infty} N(\sigma, T_0, T_0+T)\, d\sigma \ll [M(T_0+T)]^{(\theta+\varepsilon_1)(1-\alpha)} \ln^c (MT). \tag{45}$$

Утверждение теоремы отсюда следует обычными рассуждениями ([2], [8]).

Доказательство оценки (42) остается почти без изменений с той лишь разницей, что в силу применения приближенного функционального уравнения в новой формулировке ([3], теорема 2) снимается ограничение $m \ll |t|$.

Теорема 7. *Пусть $x>0$ вещественное, достаточно большое число, φ_1 и φ_2 — вещественные числа, такие, что $0<\varphi_2-\varphi_1 \leqslant 2\pi$, ν — целое число, удовлетворяющее условию $(\nu, \mathfrak{m})=1$, где $\mathfrak{m}\neq 0$ — целый идеал, $\mathfrak{p}$ — простое число поля. Тогда*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leqslant x\\ \mathfrak{p}\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m})\\ \varphi_1<\mathrm{Arg}\,\mathfrak{p}\leqslant\varphi_2}} 1 = \frac{g'(\varphi_2-\varphi_1)\,x}{2\pi h\,\varphi(\mathfrak{m})\ln x}\left(1+o(1)\right)+O\left(x^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\right), \tag{46}$$

где g' — число единиц поля, $\varepsilon>0$, h — число классов идеалов (или идеальных чисел поля).

Доказательство. Теорема доказывается так же, как и теорема 4 в [6]. Обозначим:

$$M = x^{1-\vartheta_1-\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$T = x^{2(1-\vartheta_1)},$$

$$\Delta = x^{\vartheta_1-1+\varepsilon},$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{g}, \qquad \vartheta_1 = \frac{5}{6}.$$

Пусть $f(\omega)$ — функция леммы 2 с указанными параметрами. Из леммы 2 имеем

$$f(\omega) = \sum_{|m|\leqslant M} a_m e^{imgw} + O(x^{-2}), \tag{47}$$

где a_m — в лемме 2 указаны коэффициенты.

Исследуем сумму

$$\mathfrak{M}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant x\\ \alpha\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m})}}^{(\mathfrak{m})\,*} f(\mathrm{Arg}\,\alpha)\,\Lambda(\alpha), \tag{48}$$

где $\Lambda(\alpha)$ — обобщенная функция Мангольдта ([1], [5]),

$\sum^*$ — обозначает, что из каждой группы чисел, ассоциированных в широком смысле, берется по одному представителю,

$\sum^{(\mathfrak{m})\,*}$ — то же для чисел, ассоциированных по $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$.

Имеем из (47)—(48):

$$\mathfrak{M}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{|m|\leqslant M} a_m \sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant x\\ \alpha\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m})}}^{(\mathfrak{m})\,*} \Xi_1(\alpha)\,\Lambda(\alpha) + O(1).$$

Так как

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(\nu) \sum_{N(\alpha)\leqslant x}^{(\mathfrak{m})\,*} \chi(\alpha)\,\Xi_1(\alpha)\,\Lambda(\alpha) = \sum_{N(\alpha)\leqslant x}^{(\mathfrak{m})\,*} \Xi_1(\alpha)\,\Lambda(\alpha) \sum_{\chi} \bar{\chi}(\nu)\,\chi(\alpha) =$$

$$= h\varphi(\mathfrak{m}) \sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant x\\ \alpha\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m})}}^{(\mathfrak{m})\,*} \Xi_1(\alpha)\,\Lambda(\alpha),$$

то

$$\sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant x\\ \alpha\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m})}}^{(\mathfrak{m})\,*} \Xi_1(\alpha)\,\Lambda(\alpha) = \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} \sum_{\chi} \bar{\chi}(\nu) \sum_{N(\alpha)\leqslant x}^{(\mathfrak{m})\,*} \chi(\alpha)\,\Xi_1(\alpha)\,\Lambda(\alpha). \tag{49}$$

Сумма в (49) берется по какому-нибудь набору чисел K_0, неассоциированных по $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ и удовлетворяющих условию $N(\alpha)\leqslant x$. Если $\alpha\in K_0$, то все ассоциированные числу α будут

$$\varepsilon_1\alpha,\ \varepsilon_2\alpha,\ \ldots,\ \varepsilon_{e(\mathfrak{m})}\alpha,$$

где

$$\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_{e(\mathfrak{m})}\} = E(\mathfrak{m},\ \alpha),$$

соответственно полная система единиц поля K, неассоциированных по $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$, зависящая вообще от α, $e(\mathfrak{m}) = \frac{g'}{g}$. В силу определения характера Гекке второго рода $\Xi = \Xi_1\chi$ имеем:

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}^{(\mathfrak{m})\,*} \chi(\alpha)\,\Xi_1(\alpha)\,\Lambda(\alpha) = \sum_{N(\alpha)\leqslant x}^{*} \sum_{\varepsilon\in E(\mathfrak{m},\,\alpha)} \chi(\alpha\varepsilon)\,\Xi_1(\alpha\varepsilon)\,\Lambda(\alpha\varepsilon) =$$

$$= \sum_{N(\alpha)\leqslant x}^{*} \chi(\alpha)\,\Xi_1(\alpha)\,\Lambda(\alpha) \sum_{\varepsilon\in E(\mathfrak{m},\,\alpha)} \chi(\varepsilon)\,\Xi_1(\varepsilon) = e(\mathfrak{m}) = \sum_{N(\alpha)\leqslant x}^{*} \Xi(\alpha)\,\Lambda(\alpha).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{M}(\varphi_1,\ \varphi_2) = \frac{e(\mathfrak{m})}{h\varphi(\mathfrak{m})} \sum_{\substack{\chi\\ |m|\leqslant M}} a_m\bar{\chi}(\nu) \sum_{N(\alpha)\leqslant x}^{*} \Xi(\alpha)\,\Lambda(\alpha) + O(1),$$

где внешняя сумма берется по всем характерам

$$\Xi = \Xi_1\chi \quad \text{с} \quad |m|\leqslant M.$$

По лемме 3 получаем:

$$\mathfrak{M}(\varphi_1,\ \varphi_2) = \frac{e(\mathfrak{m})}{h\varphi(\mathfrak{m})} a_0 x - \frac{e(\mathfrak{m})}{h\varphi(\mathfrak{m})} \sum_{\substack{\chi\\ 0<|m|\leqslant M}} a_m\bar{\chi}(\nu) \sum_{|\gamma|\leqslant T} \frac{x^{\rho_\Xi}}{\rho_\Xi} + O\left(\frac{xM}{T}\ln^2 x\right) =$$

$$= \frac{e(\mathfrak{m})}{h\varphi(\mathfrak{m})} a_0 x + O\{(\varphi_2-\varphi_1+\Delta)\,xW + x^{\vartheta_1}\}, \tag{50}$$

где

$$W = \sum_{\substack{\chi\\ 0<|m|\leqslant M}} \sum_{|\gamma|\leqslant T} \frac{x^{\rho_\Xi - 1}}{\rho_\Xi}.$$

Здесь суммируется по всем нулям $\rho_\Xi = \beta + i\gamma$ функций $Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})$ с $|m|\leqslant M$, ординаты которых $|\gamma|\leqslant T$.

По одной лемме Кубилюса ([6], лемма 10)

$$\sigma_0 \leqslant \beta \leqslant 1 - \sigma_0,$$

где

$$\sigma_0 = c(\ln x)^{-\frac{4}{5}}, \qquad c > 0.$$

Обозначим:

$$k = [(1-\sigma_0-\vartheta_1)\ln x],$$

$$q = \left[\frac{\ln T}{\ln 2}\right], \quad N = [\ln x],$$

$$\sigma_j = \vartheta_1 + j\ln^{-1} x, \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ k),$$

$$T^{(n)} = \frac{T}{2^n}, \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots,\ N).$$

Тогда

$$W \ll \sum_{\substack{\Xi \\ 0<|m|\leqslant M}} \sum_{\substack{\beta<\vartheta_1 \\ |\gamma|\leqslant T^{(q)}}} \frac{x^{\vartheta_1-1}}{|\rho_\Xi|} + \sum_{n=1}^{q} \sum_{\substack{\Xi \\ 0<|m|\leqslant M}} \sum_{\substack{\beta<\vartheta_1 \\ T^{(n)}<|\gamma|\leqslant T^{(n-1)}}} \frac{x^{\vartheta_1-1}}{|\rho_\Xi|} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\Xi \\ 0<|m|\leqslant M}} \sum_{\substack{|\gamma|<T \\ \sigma_j\leqslant\beta<\sigma_{j+1}}} \frac{x^{\sigma_j-1}}{|\rho_\Xi|} = W_1+W_2+W_3+W_4.$$

где

$$W_3 = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\Xi \\ 0<|m|\leqslant M}} \sum_{\substack{|\gamma|<T \\ \sigma_j\leqslant\beta<\sigma_{j+1} \\ \beta\leqslant 1-\frac{1}{100}}} \frac{x^{\sigma_j-j}}{\rho_\Xi},$$

$$W_4 = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\Xi \\ 0<|m|\leqslant M}} \sum_{\substack{|\gamma|<T \\ \sigma_j\leqslant\beta<\sigma_{j+1} \\ \beta>1-\frac{1}{100}}} \frac{x^{\sigma_j-1}}{\rho_\Xi}.$$

По одной лемме Кубилюса ([6], лемма 2), число нулей функции $Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})$ в области $\sigma>0$, $T\leqslant|t|\leqslant T+1$ не превышает

$$O(M\ln T).$$

Следовательно, суммы W_1 и W_2 оцениваются как

$$\ll x^{\vartheta_1-1}(\ln x)M + \sum_{n=1}^{q} x^{\vartheta_1-1}(\ln x)M \ll x^{\vartheta_1-1}(\ln^2 x)M \ll x^{-\frac{\varepsilon}{2}}\ln^2 x = o(1).$$

Для оценки остальных двух сумм W_3 и W_4 применим теорему 6. Обозначим:

$$P = \left[\frac{\ln T - \ln T_0}{\ln 2}\right] + 1,$$

$$T_0 = \begin{cases} T^{\frac{1}{4}}, & \sigma_j \leqslant 1-\frac{1}{100}, \\ \ln(T+2), & 1-\frac{1}{100} < \sigma_j \leqslant 1. \end{cases}$$

$$W_3 \ll \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\Xi \\ 0<|m|\leqslant M}} \left\{ \sum_{\substack{\sigma_j<\beta\leqslant\sigma_{j+1} \\ \beta\leqslant 1-\frac{1}{100} \\ |\gamma|\leqslant T_0}} + \sum_{p=0}^{P} \sum_{\substack{\sigma_j<\beta\leqslant\sigma_{j+1} \\ \beta\leqslant 1-\frac{1}{100} \\ T_0 2^p<|\gamma|\leqslant T_0 2^{p+1}}} \right\} \frac{x^{\sigma_j-1}}{|\rho_\Xi|} \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{k} x^{\sigma_j-1}\left[(MT_0)^{4(1-\sigma_j)+\varepsilon_2} + \sum_{p=0}^{P} (MT_0 2^p)^{4(1-\sigma_j)+\varepsilon_2}(T_0 2^p)^{-1}\right] \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{k} x^{\sigma_j-1} M^{4(1-\sigma_j)+\varepsilon_2}(T_0^{4(1-\sigma_j)+\varepsilon_2} + T^{3-4\sigma_j+\varepsilon_2}) \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{k} x^{(\sigma_j-1)(3-4\vartheta_1-2\varepsilon+8-8\vartheta_1)-2(1-\vartheta_1)+3\varepsilon_2} \ll \sum_{j=0}^{k} x^{3(3-4\vartheta_1)(1-\sigma_j)-\frac{\varepsilon}{50}+3\varepsilon_2} = o(1).$$

Аналогично,

$$W_4 \ll \sum_{j=0}^{k} x^{\sigma_j-1}\left[(MT_0)^{(6+\varepsilon_1)(1-\sigma_j)} + \sum_{p=0}^{P} (MT_0 2^p)^{(6+\varepsilon_1)(1-\sigma_j)}(T_0 2^p)^{-1}\right] \ln^c x \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{k} x^{\sigma_j-1} M^{(6+\varepsilon_1)(1-\sigma_j)}(T_0^{(6+\varepsilon_1)(1-\sigma_j)} + T^{(6+\varepsilon_1)(1-\sigma_j)-1}) \ln^c x \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{k} x^{\sigma_j-1} M^{(6+\varepsilon_1)(1-\sigma_j)} \ln^{c_1} x + \sum_{j=0}^{k} x^{\sigma_j-1}(MT)^{(6+\varepsilon_1)(1-\sigma_j)} T^{-1} \ln^{c_2} x \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{k} [x^{(5-6\vartheta_1-3\varepsilon)(1-\sigma_j)} \ln^{c_1} x + x^{3(5-6\vartheta_1-\varepsilon)(1-\sigma_j)} \ln^{c_2} x] \ll \sum_{j=0}^{k} x^{-\varepsilon(1-\sigma_j)} \ln^{c_3} x = o(1).$$

Таким образом

$$W = o(1). \tag{51}$$

Подставляя оценку (51) в (50), имеем:

$$\mathfrak{M}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{e(\mathfrak{m})}{h\varphi(\mathfrak{m})} a_0 x + o\Big((\varphi_2-\varphi_1+\Delta)x\Big) + O(x^{\vartheta_1}) =$$

$$= \frac{e(\mathfrak{m})}{h\varphi(\mathfrak{m})} \frac{g}{2\pi}(\varphi_2-\varphi_1)x\Big(1+o(1)\Big) + O(x^{\vartheta_1+\varepsilon}).$$

В силу (48) и согласно определению функции $f(\omega)$ в лемме 2:

$$\sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant x \\ \alpha\equiv\nu \pmod{\mathfrak{m}} \\ \varphi_1<\operatorname{Arg}\alpha\leqslant\varphi_2}} \Lambda(\alpha) = \frac{g'(\varphi_2-\varphi_1)x}{2\pi h\varphi(\mathfrak{m})}\Big(1+o(1)\Big) + O(x^{\vartheta_1+\varepsilon}). \tag{52}$$

Из (52) теорема следует суммированием по частям.

Теорема 7. *Пусть x — вещественное достаточно большое число, $x<y\ll x$, φ_1 и φ_2 — вещественные числа, такие, что $0\leqslant\varphi_2-\varphi_1\leqslant 2\pi$, ν — целое число, $(\nu, \mathfrak{m})=1$. Тогда*

$$\sum_{\substack{x<N(\mathfrak{p})\leqslant y \\ \mathfrak{p}\equiv\nu \pmod{\mathfrak{m}} \\ \varphi_1<\operatorname{Arg}\mathfrak{p}<\varphi_2}} 1 = \frac{g'(\varphi_2-\varphi_1)(y-x)}{2\pi h\varphi(\mathfrak{m})\ln x}\Big(1+o(1)\Big) + O(x^{\vartheta_2+\varepsilon}), \tag{53}$$

где

$$\vartheta_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\vartheta_1 = \frac{17}{18}. \tag{54}$$

Теорема 7 следует из теоремы 6 таким же образом, как и теорема 5 из теоремы 4 в [6].

Следствие 1. *Асимптотика* (46) *не тривиальна для секторов*

$$\varphi_2-\varphi_1>x^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}, \quad \varepsilon>0. \tag{55}$$

Следовательно, в каждом секторе, где радиус $r=x^{\frac{1}{2}}$ *достаточно большой, вершина в начале координат и угол* $\varphi_2-\varphi_1>x^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}$, *лежит хотя бы одно простое идеальное число*

$$\mathfrak{p}\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}).$$

Следствие 2. *Существует бесконечно много простых натуральных чисел* $p=a^2+b^2$ *с*

$$|b|\leqslant p^{\frac{1}{3}+\varepsilon}. \tag{56}$$

Следствие 3. *В каждом круге, центр которого находится на расстоянии* $r>r_0$ *от начала координат и радиус* $>r^{\vartheta_1+\varepsilon}$, *лежит хотя бы одно простое идеальное число* $\mathfrak{p}\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
10.XI.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Булота. Приближенное функциональное уравнение Z-функций Гекке мнимого квадратичного поля, Лит. мат. сб., II, № 2 (1962), 39—82.
2. К. Булота. Некоторые теоремы о густоте нулей Z-функций Гекке, Лит. мат. сб., III, № 1 (1963), 29—50.
3. К. Булота. О приближенном функциальном уравнении Z-функций Гекке, Лит. мат. сб., IV, № 2 (1964).
4. Лай Дык Тхинь. О числе делителей в угле, ДАН СССР, т. 143, № 1 (1962), 28—30.
5. Й. Кубилюс. О некоторых задачах геометрии простых чисел, Мат. сборник, новая сер., 31 (73), (1952), 507—542.
6. Й. Кубилюс. Об одной задаче многомерной аналитической теории чисел, Ученые записки Вильнюсского Университета, серия мат. физ. и хим. наук, т. IV (1955), 5—43. На литовском яз. Резюме на русском.
7. Е. К. Титчмарш. Теория дзета-функции Римана, Москва, 1953.
8. Е. К. Титчмарш. Теория функции, Москва, 1951.

APIE HEKĖS Z-FUNKCIJAS IR KVADRATINIO MENAMO SKAIČIŲ KŪNO PIRMINIŲ SKAIČIŲ PASISKIRSTYMĄ

K. BULOTA

(Reziumė)

Šiame straipsnyje įrodoma keletas teoremų apie Hekės dzeta-funkcijas menamo kvadratinio skaičių kūno atveju.

Tarpe kitų, gaunami šie įvertinimai:

$$Z\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{N}\right)\ll(|m|+|t|)^{\frac{7}{16}},$$

$$\int_1^T \left| Z\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{N}\right)\right|^2 dt \ll (|m|+T)\ln^4(|m|+T+2),$$

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{X}\int_1^X |Z(\sigma+it,\ \Xi,\ \mathfrak{N})|^2\,dt = Z(2\sigma,\ \Xi_2,\ \mathfrak{N}),\quad \sigma>\frac{1}{2}+\varepsilon,$$

kur Ξ — Hekės antros rūšies charakteris, m — jo rodiklis, Ξ_2 — tam tikra aritmetinė funkcija

Šioms teoremoms įrodyti panaudojama Hekės dzeta-funkcijų artutinė funkcionalinė lygtis ([3], teorema 2) ir sumų su Hekės charakteriais įvertinimas Van der Korputo metodu.

Taip pat įrodoma teorema, duodanti ryšį tarp Hekės dzeta-funkcijų modulio ant tiesės $\sigma=1/2$ įvertinimo ir tų funkcijų nulinių vietų kritinėje juostoje pasiskirstymo.

Panaudojant [4], patikslinamos Hekės dzeta-funkcijų nulinių vietų tankio teoremos, gautos straipsnyje [2].

Tegul $N(\alpha,\ T_0,\ T_0+T,\ M)$ – visų Hekės dzeta-funkcijų su $|m|\leqslant M$ nulinių vietų skaičius srityje

$$\sigma\geqslant\alpha>\frac{1}{2},$$

$$0\leqslant T_0\leqslant|t|\leqslant T_0+T.$$

Tada (teorema 6)

$$N(\alpha,\ T_0,\ T_0+T,\ M)\ll\begin{cases}[M(T_0+T)]^{(6+\varepsilon_1)(1-\alpha)}\ln^c(M+T+T_0),\\ [M(T_0+T)]^{4(1-\alpha)+\varepsilon_2},\end{cases}$$

$(\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0,\ c>0,\ M\geqslant 1)$.

Šios teoremos pagalba pagerinami J. Kubiliaus gautų kvadratinio menamo skaičių kūno pirminių daugiklių pasiskirstymo asimptotinių formulių liekamieji nariai, kurie čia gaunami šios formos:

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leqslant x\\ \mathfrak{p}\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})\\ \varphi_1<\operatorname{Arg}\mathfrak{p}\leqslant\varphi_2}} 1=\frac{g'(\varphi_2-\varphi_1)\,x}{2\pi h\varphi(\mathfrak{m})\ln x}\Big(1+o(1)\Big)+O\left(x^{\frac{5}{6}+\varepsilon_3}\right),$$

$$\sum_{\substack{x<N\mathfrak{p}\leqslant y\\ \mathfrak{p}\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})\\ \varphi_1<\operatorname{Arg}\mathfrak{p}\leqslant\varphi_2}} 1=\frac{g'(\varphi_2-\varphi_1)(y-x)}{2\pi h\varphi(\mathfrak{m})\ln x}\Big(1+o(1)\Big)+O\left(x^{\frac{17}{18}+\varepsilon_4}\right),$$

$0<x<y\ll x,\ g',\ h$ – žinomos konstantos, $\varepsilon_3>0,\ \varepsilon_4>0.$

ON THE HECKE'S *Z*-FUNCTIONS AND THE PRIME NUMBER'S DISTRIBUTION IN THE ALGEBRAIC QUADRATIC IMMAGINARY NUMBER FIELD

K. BULOTA

(Summary)

In this paper are obtained same results (theorems 1—4) about the Hecke's *Z*-functions. There are proved, that

$$Z\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{N}\right)\ll(|m|+|t|)^{\frac{7}{16}},$$

$$\int_1^T \left| Z\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{N}\right)\right|^2 dt\ll(|m|+T)\ln^4(|m|+T+2),$$

$$\lim_{X\to\infty}\int_1^X |Z(\sigma+it,\ \Xi,\ \mathfrak{N})|^2\,dt=Z(2\sigma,\ \Xi_2,\ \mathfrak{N}),\quad \sigma>\frac{1}{2}+\varepsilon,$$

where m – an exponent of Hecke's charakter Ξ, $s=\sigma+it$, Ξ_2 —an arithmetical function.

The theorem 5 establishes a relation between the estimation of $Z(s, \Xi, \mathfrak{R})$ on the line $\sigma=1/2$ and the zeros of Hecke's Z-functions.

The theorem 6 improves the results of [2] about the density of Hecke's dzeta-zeros in the stripe $1/2<\operatorname{Re} s\leqslant 1$.

Let $N(\alpha, T_0, T_0+T, M)$ – the number of zeros of the all Hecke's Z-functions with $|m|\leqslant M$ in the domain

$$\sigma\geqslant\alpha>\frac{1}{2},$$

$$0\leqslant T_0\leqslant|t|\leqslant T_0+T.$$

Than we have (theorem 6)

$$N(\alpha, T_0, T_0+T, M)\ll\begin{cases}[M(T_0+T)]^{(6+\varepsilon_1)(1-\alpha)}\ln^c M(T+T_0),\\ [M(T_0+T)]^{4(1-\alpha)+\varepsilon_2},\end{cases}$$

$(\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0,\ c>0,\ M\geqslant 1)$.

By means of theorem 6 is obtained an improvement of the well-known J. Kubilius [6] results about the prime numbers' distribution in the quadratic immaginary number field.

We have (theorems 7 and 8)

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leqslant x\\ \mathfrak{p}\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})\\ \varphi_1<\operatorname{Arg}\mathfrak{p}\leqslant\varphi_2}} 1=\frac{g'(\varphi_2-\varphi_1)\,x}{2\pi h\varphi(\mathfrak{m})\ln x}\Big(1+o(1)\Big)+O\left(x^{\frac{5}{6}+\varepsilon_3}\right),$$

$$\sum_{\substack{x<N\mathfrak{p}\leqslant y\\ \mathfrak{p}\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})\\ \varphi_1<\operatorname{Arg}\mathfrak{p}\leqslant\varphi_2}} 1=\frac{g'(\varphi_2-\varphi_1)(y-x)}{2\pi h\varphi(\mathfrak{m})\ln x}\Big(1+o(1)\Big)+O\left(x^{\frac{17}{18}+\varepsilon_4}\right),$$

where $\mathfrak{p}$ – prime number of field, ν – an integer number of the same field, $\mathfrak{m}\neq 0$ – an integer ideal, ε_3 and ε_4 – arbitrally small positive constants, $0<x<y\leqslant x$.