IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

МЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ И КОВАРИАНТЫ ПАР ПЛОСКОСТЕЙ В КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД, Л. М. КАРПОВА, Л. П. АНДРЕЕВА*

Метрическими инвариантами двух плоскостей в пространстве с проективной метрикой называются определяемые этими плоскостями числа, остающиеся инвариантными при движениях пространства, а *метрическими ковариантами* этих плоскостей называются определяемые этими плоскостями геометрические образы, преобразующиеся при движениях вместе с этими плоскостями. Метрическими инвариантами двух плоскостей в евклидовом пространстве R_n являются их кратчайшее расстояние и стационарные углы, геометрическими ковариантами этих плоскостей являются их общий перпендикуляр и бесконечно удаленные прямые 2-мерных плоскостей, в которых расположены стационарные углы ([1], стр. 127–134). Метрическими инвариантами двух плоскостей в эллиптическом пространстве S_n являются их стационарные расстояния, геометрическими ковариантами этих плоскостей являются их общие перпендикуляры ([1], стр. 224–230).

В настоящей работе находится эффективный метод определения метрических инвариантов и ковариантов пар плоскостей в широком классе пространств с проективной метрикой – *квазиэллиптических пространствах* R_n^m (см. [2]). Метрические инварианты и коварианты плоскостей в этих пространствах были определены Т. Г. Чахленковой [3]. До сих пор эффективный метод определения метрических инвариантов был разработан только для m-мерных плоскостей пространства R_n^m (в работе [2]), эффективный метод определения метрических ковариантов не был разработан и для этого случая. В настоящей работе обе эти задачи решаются для p-мерных плоскостей пространств R_n^m при любом значении p.

1. Метрические инварианты и коварианты точек

Квазиэллиптическим пространством R_n^m называется n-мерное действительное проективное пространство P_n, в котором определен мнимый конус второго порядка с $(n-m-1)$-мерной вершинной плоскостью и невырожденная мнимая крадрика в этой плоскости. Определенные нами конус и квадрика составляют *абсолют* пространства R_n^m и называются, соответственно, *абсолютным конусом* и *абсолютной квадрикой* этого пространства, а вершинная плоскость абсолютного конуса называется *абсолютной плоскостью*.

* Б. А. Розенфельдом написаны §§ 1–2, Л. М. Карповой – §§ 3–4 и 6, Л. П. Андреевой – § 5.

Мы будем пользоваться такой системой проективных координат x^i $(i, j, \ldots = 0, 1, \ldots, n)$, в которой уравнение абсолютного конуса имеет вид

$$\sum_a (x^a)^2 = 0, \tag{1}$$

$(a, b, \ldots = 0, 1, \ldots, m)$, уравнения абсолютной плоскости имеют вид $x^a = 0$, а уравнение абсолютной квадрики в этой плоскости имеет вид

$$\sum_u (x^u)^2 = 0, \tag{2}$$

$(u, v, \ldots = m+1, \ldots, n)$. Наряду с проективными координатами мы будем определять точки нашего пространства векторами (матрицами, состоящими из одного столбца) x, координатами которых служат координаты x^i; той же буквой x мы будем обозначать и точку с координатами x^i. Уравнения (1) и (2) можно переписать в векторной форме в виде

$$x^T E_0 x = 0 \tag{1'}$$

и

$$x^T E_1 x = 0, \tag{2'}$$

где x^T — матрица, состоящая из одной строки, полученная транспонированием из матрицы x, E_0 — диагональная матрица с диагональными элементами $e_i = 1$ при $i \leqslant m$ и $e_i = 0$ при $i > m$, E_1 — диагональная матрица с диагональными элементами $e_i = 0$ при $i \leqslant m$ и $e_i = 1$ при $i > m$.

Будем нормировать координаты x^i точек, не лежащих на абсолютной плоскости, и соответствующие векторы x условием

$$\sum_a (x^a)^2 = x^T E_0 x = 1. \tag{3}$$

Тогда две точки x и y с координатами x^i и y^i обладают *эллиптическим расстоянием* δ, определяемым соотношением

$$\cos \delta = \sum_a x^a y^a = x^T E_0 y. \tag{4}$$

В том случае, когда $\delta = 0$, точки x и y обладают *евклидовым расстоянием* d, определяемым соотношением

$$d^2 = \sum_u (x^u - y^u)^2 = (x^T - y^T) E_1 (x - y). \tag{5}$$

Пары точек, обладающие ненулевым эллиптическим расстоянием, лежат на прямых, не пересекающихся с абсолютной плоскостью; пары точек, обладающие нулевым эллиптическим расстоянием, лежат на прямых, пересекающихся с абсолютной плоскостью: эти прямые называются, соответственно, *эллиптическими* и *евклидовыми прямыми*; заметим, что для точек x и y, расположенных на евклидовой прямой, $x^a = y^a$.

Будем называть *движениями* взаимно однозначные отображения пространства R_n^m на себя, сохраняющие расстояния δ и d. Движения являются коллинеациями этих пространств, т. е. имеют вид

$$'x^i = \sum_j u_j^i x^j \quad \text{или} \quad 'x = Ux, \tag{6}$$

где матрица $U=(u^i_j)$ — неособенная матрица $(n+1)$-го порядка, состоящая из двух ортогональных диагональных подматриц $(m+1)$-го и $(n-m)$ порядка прямоугольной матрицы, состоящей из нулей, в правом верхнем углу и прямоугольной матрицы, состоящей из произвольных элементов, в нижнем левом углу.

Расстояния δ и d являются метрическими инвариантами точек x и y; соответственным метрическим ковариантом является прямая, соединяющая эти точки.

При определении метрических инвариантов и ковариантов p-мерных плоскостей мы ограничимся рассмотрением пар p-мерных плоскостей, которые при $p\leqslant m$ не пересекаются с абсолютной плоскостью, а при $p>m$ имеют с этой плоскостью минимальное пересечение.

Кроме того, будем предполагать, что данные две p-мерные плоскости не пересекаются и, следовательно, порождают $(2p+1)$-мерную плоскость; таким образом, мы предполагаем, что $n\geqslant 2p+1$; случай, когда $n<2p+1$, сводится к этому случаю по принципу двойственности. О $(2p+1)$-мерной плоскости, порождаемой данными двумя p-мерными плоскостями, мы также будем предполагать, что при $2p+1\leqslant m$ оно не пересекается с абсолютной плоскостью, а при $2p+1>m$ имеет с ней минимальное пересечение.

2. Проективные инварианты и коварианты четверок плоскостей

Будем характеризовать p-мерные плоскости пространства P_n *проективными матричными координатами* ([4], стр. 23), т. е. прямоугольными матрицами $A=(a^i_\alpha)$, составленными из координат a^i_α $p+1$ линейно-независимых точек a_α p-мерной плоскости (α, β, $\ldots=0, 1, \ldots, p$). Будем характеризовать эти p-мерные плоскости также *тангенциальными проективными матричными координатами* ([4], стр. 25), т. е. прямоугольными матрицами $U=(u^\varphi_i)$, составленными из коэффициентов u^φ_i $n-m$ независимых уравнений

$$\sum_i u^\varphi_i x^i=0 \tag{7}$$

p-мерной плоскости, т. е. уравнений линейно независимых гиперплоскостей u^φ, проходящих через p-мерную плоскость (φ, ψ, $\ldots=0, 1, \ldots, n-p-1$).

Пусть в пространстве P_n заданы непересекающиеся p-мерная плоскость A, определяемая проективной матричной координатой A, и $(n-p-1)$-мерная плоскость U, определяемая тангенциальной проективной матричной координатой U. Тогда через всякую точку x пространства, не лежащую на плоскостях A и U, можно провести единственную прямую, пересекающую эти плоскости, соответственно, в точкак y и z. Точки y и z называются *проекциями* точки x, соответственно на плоскость A в направлении плоскости U, и на плоскость U в направлении плоскости A. Как показали Б. А. Розенфельд и И. Н. Семенова [5], координаты y^i и z^i точек y и z выражаются через координаты x^i точки x при помощи соотношений

$$y^i=\sum_j P^i_j x^j \quad \text{и} \quad z^i=\sum_j Q^i_j x^j \tag{8}$$

или, в векторной форме,

$$y=Px \quad \text{и} \quad z=Qx, \tag{8'}$$

где матрицы $P=(P_j^i)$ и $Q=(Q_j^i)$ связаны с матрицами A и B равенствами

$$P=A(UA)^{-1}U \quad \text{и} \quad Q=I_n-A(UA)^{-1}U, \tag{9}$$

где I_n — единичная матрица $(n+1)$-го порядка.

Заметим, что квадратная матрица $(p+1)$-го порядка UA является неособенной тогда и только тогда, когда плоскости A и U не пересекаются; нетрудно проверить, что в том случае, когда плоскости A и U пересекаются по k-мерной плоскости, ранг матрицы UA равен $p-k$.

Если обозначить точку, являющуюся четвертой гармонической для точек y, z и x через $'x$, то переход от точки x к точке $'x$ называется *отражением* от пары плоскостей A и U. Как показано в работе [5], координаты $'x^i$ точки $'x$ выражаются через координаты x^i точки x с помощью соотношения

$$'x^i=\sum_j S_j^i x \tag{10}$$

или, в векторной форме,

$$'x=Sx, \tag{10'}$$

где матрица $S=(S_j^i)$ связана с матрицами A и U равенством

$$S=2A(UA)^{-1}U-I_n. \tag{11}$$

Пусть в пространстве P_n заданы попарно непересекающиеся p-мерные плоскости A и B с проективными матричными координатами A и B и $(n-p-1)$-мерные плоскости U и V с тангенциальными проективными матричными координатами U и V. Спроектируем точку x плоскости A на плоскость B в направлении плоскости V, а полученную точку y спроектируем на плоскость A в направлении плоскости U в точку $'x$. Тогда, если обозначить координаты x^i и $'x^i$ точек x и $'x$, соответственно,

$$x^i=\sum_\alpha a_\alpha^i \xi^\alpha \quad \text{и} \quad 'x^i=\sum_\alpha a_\alpha^i {}'\xi^\alpha \tag{12}$$

или, в векторной форме,

$$x=A\xi \quad \text{и} \quad 'x=A'\xi, \tag{12'}$$

то, как показано в работе [5], координаты ξ^α выражаются через координаты ξ^α, при помощи соотношения

$$'\xi^\alpha=\sum_b W_\beta^\alpha \xi^\beta, \tag{13}$$

или, в векторной форме,

$$'\xi=W\xi, \tag{13'}$$

где квадратная матрица $(p+1)$-го порядка $W=(W_\beta^\alpha)$ связана с матрицами A, B, U и V равенством

$$W=(UA)^{-1}(UB)(VB)^{-1}(VA). \tag{14}$$

Матрица W — введенная А. Фурманом [6] матрица двойного отношения четырех плоскостей A, B, U и V. Как показал Фурман, эта матрица определяется плоскостями A, B, U и V с точностью до преобразования

$$W=KWK^{-1}, \tag{15}$$

где $K=(K_\beta^\alpha)$ – матрица преобразования базисных точек a_α плоскости A в точки $'a_\alpha$ с координатами

$$'a_\alpha^i=\sum_\beta K_\alpha^\beta a_\beta^i, \tag{16}$$

или, в векторной форме

$$'a_\alpha=a_\alpha K. \tag{16'}$$

Б. А. Розенфельд ([4], стр. 29) показал, что собственные числа w_α матрицы W равны двойным отношениям четверок точек пересечения плоскостей A, B, U и V, с их *трансверсалями* – прямыми, пересекающимися со всеми четырьмя плоскостями. В работе [5] показано, что точки пересечения трансверсалей с плоскостью A определяются числами ξ^α, являющимися координатами собственных векторов матрицы W. Числа w_α являются проективными инвариантами плоскостей A, B, U и V, а трансверсали – проективными ковариантами этих плоскостей; в основном случае эти плоскости обладают $p+1$ трансверсалями и $p+1$ различными числами w_α.

3. Эллиптические инварианты и коварианты плоскостей малой размерности

Будем называть p-мерные плоскости пространства R_n^m при $p<m$ плоскостями *малой размерности*, при $p=m$ – плоскостями *особой* размерности, при $p>m$ – плоскостями *большой* размерности. Рассмотрим две p-мерные плоскости пространства R_n^m при $p\leqslant m$, не пересекающие его абсолютной плоскости. Будем определять такую плоскость A $p+1$ линейно-независимыми точками a_α попарно полярно-сопряженными относительно абсолютного конуса. Так как гиперплоскость, являющаяся полярой точки a с координатами a^i относительно абсолютного конуса (1) имеет уравнение

$$\sum_a a^a x^a=0, \tag{17}$$

то координаты точек a_α связаны соотношением

$$\sum_a a_\alpha^a a_\beta^a=0 \qquad (\alpha\neq\beta). \tag{18}$$

Формула (17) показывает, что полярные гиперплоскости всех точек проходят через абсолютную плоскость.

Соотношение (18) вместе с условием нормирования (3) можно объединить в виде соотношения

$$\sum_a a_\alpha^a a_\beta^a=\delta_{\alpha\beta}, \tag{19}$$

где $\delta_{\alpha\beta}=1$ при $\alpha=\beta$ и $\delta_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$.

В этом случае проективная матричная координата A плоскости A называется *нормированной*.

Условие (19) можно записать в матричной форме в виде

$$A^T E_0 A=I_p, \tag{19'}$$

где A^T – матрица, полученная транспонированием матрицы A, I_p – единичная матрица $(p+1)$-го порядка. Матрица $U=A^T E_0$, входящая в условие (19'), является тангенциальной проективной матричной координатой $(n-p-1)$-мерной плоскости U, являющейся полярой плоскости A относительно абсолютного конуса, т. е. пересечением гиперплоскостей, полярных точкам a_α. Заметим, что полярные плоскости всех плоскостей A, не пересекающихся с абсолютной плоскостью, проходят через абсолютную плоскость.

Отражение (10) от плоскости A и ее поляры U является движением пространства R_n^m и называется *отражением от плоскости* A в этом пространстве. В силу (19) формула (11) в этом случае принимает вид

$$S = 2AA^T E_0 - I_n. \tag{20}$$

При $p=0$ из формул (20) мы получаем формулу отражения от точки пространства R_n^m, найденную Н. Т. Аббасовым ([7], стр. 243). Формула (20) была найдена другим методом Б. А. Розенфельдом, Л. М. Карповой и А. П. Скакальской [8].

Трансверсали двух p-мерных плоскостей A и B пространства R_n^m и их $(n-p-1)$-мерных поляр, очевидно, являются метрическими ковариантами плоскостей A и B. В том случае, когда эти прямые являются эллиптическими прямыми, они пересекаются со всеми четырьмя плоскостями A, B, U и V в четырех различных точках. Будем называть такие прямые *эллиптическими трансверсалями* плоскостей A и B, а расстояния между точками их пересечения с плоскостями A и B будем называть *эллиптическими инвариантами* плоскостей A и B.

В силу свойств трансверсалей двух p-мерных и двух $(n-p-1)$-мерных плоскостей в пространстве P_n точки пересечения трансверсалей плоскостей A и B и их поляр с плоскостью A определяются числами ξ^α, являющимися координатами собственных векторов матрицы (14), которая в данном случае имеет вид

$$W = (A^T E_0 B)(B^T E_0 A). \tag{21}$$

В том случае, когда $2p+1 \leqslant m$ и $(2p+1)$-мерная плоскость порождаемая данными p-мерными плоскостями, не пересекается с абсолютной плоскосьтю, все трансверсали плоскостей A, B, U и V являются эллиптическими; в основном случае их $p+1$. В том случае, когда $p \leqslant m < 2p+1$ и $(2p+1)$-мерная плоскость пересекается с абсолютной плоскостью по плоскости минимальной размерности, размерность этого пересечения равна $2p-m$. При этом в основном случае матрица W будет иметь только $m-p$ собственных чисел, отличных от 1 и $(2p-m+1)$-мерное инвариантное подпространство, соответствующее собственному числу, равному 1. В этом случае плоскости A и B имеют только $m-p$ эллиптических трансверсалей.

Покажем, что эллиптические инварианты δ_α плоскостей A и B связаны с отличными от 1 собственными числами w_α матрицы (21) соотношениями

$$\cos^2 \delta_\alpha = w_\alpha. \tag{22}$$

В самом деле, пусть α-я эллиптическая трансверсаль пересекается с плоскостями A и B, соответственно, в точках x_α и y_α. Координаты точек x_α и y_α имеют, соответственно, вид

$$x_\alpha^i = \sum_\beta a_\beta^i \xi_\alpha^\beta \quad \text{и} \quad y_\alpha^i = \sum_\beta b_\beta^i \eta_\alpha^\beta, \tag{23}$$

или, в векторной форме,

$$x_\alpha = A\xi_\alpha \quad \text{и} \quad y_\alpha = B\eta_\alpha. \tag{23'}$$

Условие нормирования (3) в силу (19') и (23') можно переписать в виде

$$\xi^T A^T E_0 A \xi = \xi^T \xi = 1. \tag{24}$$

Так как точка y_α является проекцией точки x_α на плоскость B в направлении плоскости V, то в силу первой формулы (9)

$$\tilde{y}_\alpha = B(VB)^{-1} Vx_\alpha = BB^T E_0 x_\alpha = B(B^T E_0 A)\xi_\alpha. \tag{25}$$

Мы обозначаем вектор (25) через $\tilde{y}_\alpha$, а не y_α, так как он не удовлетворяет условию нормирования (3) и

$$y_\alpha = \frac{\tilde{y}_\alpha}{\sqrt{\tilde{y}_\alpha^T E_0 \tilde{y}_\alpha}}. \tag{26}$$

Поэтому

$$\cos^2\delta = (x_\alpha^T E_0 \tilde{y}_\alpha)^2 = \frac{(x_\alpha^T E_0 \tilde{y}_\alpha)^2}{\tilde{y}_\alpha^T E_0 \tilde{y}_\alpha} = \frac{[\xi_\alpha^T (A^T E_0 B)(B^T E_0 A)\xi_\alpha]^2}{\xi_\alpha^T (A^T E_0 B)(B^T E_0 B)(B^T E_0 A)\xi_\alpha} =$$

$$= \frac{[\xi_\alpha^T (A^T E_0 B)(B^T E_0 A)\xi_\alpha]^2}{\xi_\alpha^T (A^T E_0 B)(B^T E_0 A)\xi_\alpha} = \frac{(\xi_\alpha^T W \xi_\alpha)^2}{\xi_\alpha^T W \xi_\alpha} = \xi_\alpha^T W \xi_\alpha. \tag{27}$$

Но так как ξ_α — собственный вектор матрицы W, соответствующий собственному числу w_α, т.е $W\xi_\alpha = w_\alpha \xi_\alpha$, то формула (27) в силу (24) принимает вид (22).

Формулу (4) можно рассматривать как частный случай формулы (22) при $p=0$.

4. Евклидовы инварианты и коварианты плоскостей малой размерности

Для двух p-мерных плоскостей пространства R_n^m при $p \leqslant m < 2p+1$ в основном случае помимо $m-p$ эллиптических трансверсалей можно определить $2p-m+1$ *евклидову трансверсаль.* Эти трансверсали представляют собой евклидовы прямые, определяющиеся следующим образом: трансверсали плоскостей A, B, U и V, соответствующие собственному числу матрицы W, равному 1, проходят через точки плоскостей A и B и $(2p-m)$-мерной плоскости, по которой плоскость, порождаемая плоскостями A и B, пересекается с абсолютной плоскостью; эти трансверсали определяют проективное отображение указанной $(2p-m)$-мерной плоскости на плоскости того же числа измерений в плоскостях A и B. Это проективное отображение отображает пересечение первой $(2p-m)$-мерной плоскости с абсолютной квадрикой на мнимые квадрики в $(2p-m)$-мерных плоскостях, находящихся в плоскостях A и B; эти последние плоскости пересекаются по мнимым квадрикам и с абсолютным конусом. Евклидовы трансверсали являются трансверсалями плоскостей A, B, U и V, соответствующими собственному числу матрицы W, равному 1, проходящими через вершины общего автополярного симплекса этих двух квадрик на $(2p-m)$-мерной плоскости, находящейся в плоскости A. Расстояния между точками пересечения евклидовых трансверсалей плоскостей A и B с этими плоскостями будем называть *евклидовыми инвариантами* плоскостей A и B.

Если точка x плоскости A лежит на указанной $(2p-m)$-мерной плоскости, то трансверсаль, проходящую через эту точку, можно определить как прямую, проходящую через эту точку, и пересекающуюся с плоскостями B и V. В силу формул (9) точки пересечения этой прямой с плоскостью B и $(2p-m)$-мерной плоскостью на абсолютной плоскости (т. е. с плоскостью V) определяются векторами

$$\begin{aligned} y &= B(VB)^{-1}Vx = B(B^T E_0 A)\xi, \\ z &= [I - B(VB)^{-1}V]x = [A - B(VB)^{-1}(VA)]\xi = [A - B(B^T E_0 A)]\xi. \end{aligned} \tag{28}$$

Так как абсолютные конус и квадрика определяются векторными уравнениями (1′) и (2′), то координаты ξ^α мнимых точек x, соответствующих мнимым точкам z, лежащим на абсолютной квадрике (2), удовлетворяют уравнению

$$z^T E_1 z = \xi^T [A^T - (A^T E_0 B) B^T] E_1 [A - B(B^T E_0 A)]\xi = 0. \tag{29}$$

Условимся записывать уравнение (29) в виде

$$\xi^T M \xi = 0, \tag{30}$$

где

$$M = [A^T - (A^T E_0 B) B^T] E_1 [A - B(B^T E_0 A)]. \tag{31}$$

Координаты ξ^α мнимых точек x, лежащих на абсолютном конусе (1), удовлетворяют уравнению

$$x^T E_0 x = \xi^T (A^T E_0 A)\xi = \xi^T \xi = 0. \tag{32}$$

Если в r-мерном проективном пространстве P_r заданы две квадрики $\xi^T \Lambda \xi = 0$ и $\xi^T \mathbf{M} \xi = 0$, то вершины общего автополярного симплекса этих квадрик являются неподвижными точками коллинеации

$$'\xi = \mathbf{M}\Lambda^{-1}\xi. \tag{33}$$

В нашем случае $r = 2p - m$, матрица $\mathbf{M}$ имеет вид (31), а матрица Λ является единичной матрицей. Поэтому вершины общего автополярного симплекса наших квадрик являются неподвижными точками коллинеаций с матрицей (31), т. е. определяются собственными векторами этой матрицы. Так как матрица M в $(2p-m)$-мерном пространстве в основном случае имеет $2p-m+1$ собственных векторов, эти векторы определяют $2p-m+1$ евклидовых трансверсалей.

Покажем, что евклидовы инварианты d_α плоскостей A и B связаны с собственными числами m_α матрицы (31) соотношениями

$$d_\alpha^2 = m_\alpha. \tag{34}$$

В самом деле, пусть α-я евклидова трансверсаль пересекается с плоскостями A и B в точках x_α и y_α. Тогда, если координаты этих точек нормированы условием (3),

$$d_\alpha^2 = (x_\alpha^T - y_\alpha^T) E_1 (x_\alpha - y_\alpha) = \left(x_\alpha^T - \frac{\bar{y}_\alpha^T}{\sqrt{\bar{y}_\alpha^T E_0 \bar{y}_\alpha}}\right) E_1 \left(x_\alpha - \frac{\bar{y}_\alpha}{\sqrt{\bar{y}_\alpha^T E_0 \bar{y}_\alpha}}\right). \tag{35}$$

Но, как мы видели, $\bar{y}_\alpha^T E_0 \bar{y}_\alpha = \xi_\alpha^T W \xi_\alpha$ и, так как $W\xi_\alpha = \xi_\alpha$, мы получаем, что $\bar{y}_\alpha^T E_0 \bar{y}_\alpha = \xi_\alpha^T \xi_\alpha = 1$.

Поэтому

$$\begin{aligned} d_\alpha^2 &= (x_\alpha^T - y_\alpha^T) E_1 (x_\alpha - y_\alpha) = (x_\alpha^T - \bar{y}_\alpha^T) E_1 (x_\alpha - \bar{y}_\alpha) = \\ &= [\xi_\alpha^T A^T + \xi_\alpha^T (A^T E_0 B) B^T] E_1 [A\xi_\alpha - B(B^T E_0 A)\xi] = \xi_\alpha^T M \xi_\alpha. \end{aligned} \tag{36}$$

Но так как ξ_α собственный вектор матрицы M, соответствующий собственному числу m_α, т. е. $M\xi_\alpha = m_\alpha \xi_\alpha$, формула (36) в силу условия нормирования (24) принимает вид (34).

Формулу (5) можно рассматривать как частный случай формулы (34) при $p=0$.

5. Инварианты и коварианты плоскостей особой размерности

Случай m-мерных плоскостей пространства R_n^m можно рассматривать как частный случай случая p-мерных плоскостей при $p \leqslant m$. Особенность этого частного случая состоит в том, что полярные плоскости U и V плоскостей A и B совпадают с абсолютной плоскостью и, следовательно, совпадают между собой. Поэтому при $p=m$ нет эллиптических трансверсалей и две m-мерные плоскости обладают $m+1$ евклидовыми трансверсалями, определяющимися так же, как в случае $p \leqslant m$ с той разницей, что сдесь $(2p-m)$-мерная плоскссть, находящаяся на абсолютной плоскости, является m-мерной плоскостью; из нашего условия $n \leqslant 2p+1$ вытекает, что $m \leqslant n-m-1$.

Так как плоскости U и V совпадают, совпадают и матрицы U и V и $UB = UA = I_m$. Поэтому матрица (31) в этом случае имеет вид

$$M = (A^T - B^T) E_1 (A - B). \tag{37}$$

Будем теперь характеризовать m-мерные плоскости A и B пространства R_n^m *аффинными матричными координатами* ([4], стр. 33) A_1 и B_1. Эти матрицы можно рассматривать как матрицы, состоящие из нижних $n-m$ строк проективных матричных координат тех же плоскостей A и B, при условии, что верхние $m+1$ строк матриц A и B составляют единичные матрицы I_m. Поэтому формулу (37) можно переписать в виде

$$M = (A_1^T - B_1^T)(A_1 - B_1). \tag{37'}$$

Собственные числа матрицы (37′) являются квадратами определенных в [2] собственных чисел прямоугольной матрицы $A_1 - B_1$, которым, как показано в этой работе ([2] стр. 62), равны метрические инварианты d_α m-мерных плоскостей A и B пространства R_n^m.

При $m=0$, когда пространство R_n^m является евклидовым пространством R_n, а m-мерные плоскости – точками, формула (37′) превращается в обычную формулу определения расстояния между точками x и y с радиусами векторами x и y, которую можно записать в виде $d^2 = (x^T - y^T)(x-y)$.

6. Инварианты и коварианты плоскостей большой размерности

Рассмотрим две p-мерные плоскости пространства R_n^m при $p > m$, имеющие минимальное пересечение с его абсолютной плоскостью. Будем определять такую плоскость A $p+1$ линейно независимыми точками a_α. Первые $m+1$ из точек a_α взяты из того базиса плоскости, при котором верхние $p+1$ строк проективной матричной координаты A составляют единичную матрицу I_p, а нижние $n-p$ строк этой матрицы образуют аффинную матричную координату. Последние $p-m$ из точек a_α – линейно независимые точки плоскости пересечения данной плоскости A с абсолютной плоскостью, попарно полярно сопряженные относительно абсолютной квадрики. Поэтому координаты a^i_a первых $m+1$ точек a_α связаны условием $a^b_a=\delta^b_a$, а координаты a^i_ρ последних $p-m$ точек a_α (ρ, σ, $\ldots=m+1$, $\ldots$, p) связаны соотношениями $a^b_\rho=0$ и

$$\sum_u a^u_\rho a^u_\sigma=\delta_{\rho\sigma}. \tag{38}$$

Будем называть *полярой* плоскости A $(n-p-1)$-мерную плоскость U, лежащую в абсолютной плоскости и полярную плоскости пересечения плоскости A с абсолютной плоскостью относительно абсолютной квадрики; каждая точка поляры плоскости A является полюсом одной из гиперплоскостей, проходящих через плоскость A. Тангенциальная проективная матричная координата U поляры плоскости A состоит из коэффициентов уравнений $x^a=0$ абсолютной плоскости и из коэффициентов уравнений гиперплоскостей, полярных точкам a_ρ. Таким образом, элементы u^a_i матрицы U равны δ^a_i, а элементы u^ρ_i этой матрицы равны 0 при $i=a$ и a^u_ρ при $i=u$, т. е. верхние $m+1$ строк матрицы U совпадают с верхними $m+1$ строками матрицы A^TE_0, а нижние $p-m$ строк матрицы совпадают с нижними $p-m$ строками матрицы A^T. Произведение UA в этом случае, вообще говоря, не является матрицей I_p.

Трансверсали двух p-мерных плоскостей A и B и их $(n-p-1)$-мерных поляр являются метрическими ковариантами плоскостей A и B. В том случае, когда эти прямые являются эллиптическими прямыми, они называются *эллиптическими трансверсалями*, а расстояния между точками их пересечения с плоскостями A и B называются эллиптическими инвариантами плоскостей A и B.

Так как плоскости U и V целиком лежат в абсолютной плоскости, эллиптические трансверсали, пересекающие плоскости U и V в двух различных точках также целиком лежат в абсолютной плоскости. Так как абсолютную плоскость можно рассматривать как эллиптическое пространство S_{n-m-1}, эллиптические трансверсали плоскостей A и B можно рассматривать как общие перпендикуляры двух $(p-m-1)$-мерных плоскостей этого пространства, являющихся плоскостями пересечения плоскостей A и B с абсолютной плоскостью. Поэтому в основном случае плоскости A и B имеют только $p-m$ эллиптических трансверсалей.

Если мы обозначим проективные матричные координаты указанного вида плоскостей A и B теми же буквами, а тангенциальные проективные матричные координаты их поляр — U и V, то точки пересечения трансверсалей плоскостей A и B и их поляр с плоскостью A определяются числами ξ^α, являющимися координатами собственных векторов матрицы (14), где матрицы A, B, U и V имеют указанный выше вид; в этом случае матрице W нельзя придать простого вида, аналогичного матрице (21).

Совершенно так же, как в случае $p<m$, показывается, что эллиптические инварианты δ_α плоскостей A и B связаны с отличными от 1 собственными числами w_α матрицы W соотношениями (22).

Помимо $p-m$ эллиптических трансверсалей плоскости A и B обладают $m+1$ *евклидовыми трансверсалями*, т. е. евклидовыми прямыми, определяющимися следующим образом: $(2p+1)$-мерная плоскость, порождаемая плоскостями A и B, высекает из $(n-2p+m-1)$-мерной плоскости пересечения поляр этих плоскостей m-мерную плоскость. Трансверсали плоскостей A, B, U и V, соответствующие собственному числу матрицы W, равному 1, проходят через точки плоскостей A и B и этой m-мерной плоскости; эти трансверсали определяют проективное отображение этой m-мерной плоскости на плоскости того же числа измерений в плоскостях A и B. Это проективное отображение отображает пересечение первой m-мерной плоскости с абсолютной квадрикой на мнимые квадрики в m-мерных плоскостях, находящихся в плоскостях A и B; эти последние m-мерные плоскости пересекаются по мнимым квадрикам и с абсолютным конусом. Евклидовы трансверсали плоскостей A и B являются трансверсалями плоскостей A, B, U и V, соответствующими собственному числу 1, проходящими через вершины общего автополярного симплекса двух мнимых квадрик в m-мерной плоскости, находящейся в плоскости A. Расстояния между точками пересечения евклидовых трансверсалей плоскостей A и B с этими плоскостями будем называть *евклидовыми инвариантами* плоскостей A и B.

При $m=0$, т. е. в случае евклидова пространства R_n, общий перпендикуляр двух p-мерных плоскостей является их единственной евклидовой трансверсалью, а p бесконечно удаленных прямых двумерных плоскостей, в которых расположены стационарные углы, являются эллиптическими трансверсалями; кратчайшее расстояние этих прямых является их евклидовым инвариантом.

Если точка x плоскости A лежит на указанной m-мерной плоскости, то трансверсаль, проходящую через эту точку, можно определить как прямую, проходящую через эту точку и пересекающуюся с плоскостями B и V. В силу формул (9) точки пересечения этой прямой с плоскостью B с m-мерной плоскостью в абсолютной плоскости (т. е. с плоскостью V), определяются векторами

$$\begin{aligned} y&=B(VB)^{-1}Vx=B(VB)^{-1}(VA)\xi, \\ z&=[I-B(VB)^{-1}V]x=[A-B(VB)^{-1}(VA)]\xi. \end{aligned} \tag{39}$$

Так как абсолютные конус и квадрика определяются векторными уравнениями (1′) и (2′), то координаты ξ^α мнимых точек x, соответствующих мнимым точкам z, лежащим на абсолютной квадрике (2), удовлетворяют уравнению (30), где

$$M=[A^T-(A^TV^T)(B^TV^T)^{-1}B^T]E_1[A-B(VB)^{-1}(VA)]. \tag{40}$$

Координаты ξ^α мнимых точек x, лежащих на абсолютном конусе, удовлетворяют уравнению (32). Поэтому вершины общего автополярного симплекса наших квадрик являются неподвижными точками коллинеации с матрицей (40), т. е. определяются собственными векторами этой матрицы. Так как матрица M в m-мерном пространстве в основном случае имеет $m+1$ собственных векторов, эти векторы определяют $m+1$ евклидовых трансверсалей.

Совершенно так же, как в случае $p<m$, показывается, что евклидовы инварианты d_α плоскостей A и B связаны с собственными числами m_α матрицы M соотношениями (34).

Две p-мерные плоскости при $p<m$ можно определять также $n-m$ независимыми уравнениями (6), которые мы здесь будем записывать в виде

$$\sum_i \tilde{a}_i^{\varphi} x^i = 0. \tag{41}$$

Будем предполагать, что гиперплоскости (41) взаимно ортогональны. Так как полюс гиперплоскости $\sum_i u_i x^i = 0$ относительно квадрики (2) является точкой абсолютной плоскости с координатами $x^u = u_u$, а угол между гиперплоскостями равен расстоянию между их полюсами, то условие ортогональности гиперплоскостей $\tilde{a}^{\varphi}$ и $\tilde{a}^{\psi}$ с коэффициентами уравнений $\tilde{a}_i^{\varphi}$ и $\tilde{a}_i^{\psi}$ вместе с условием нормирования коэффициентов $\tilde{a}_i^{\varphi}$ имеет вид

$$\sum_u \tilde{a}_u^{\varphi} \tilde{a}_u^{\psi} = \delta^{\varphi\psi}. \tag{42}$$

В этом случае тангенциальная проективная матричная координата $\tilde{A}$ плоскости A называется *нормированной.*

Условие (42) можно записать в матричной форме в виде

$$\tilde{A} E_1 \tilde{A}^T = I_p. \tag{42'}$$

Матрица $E_1 \tilde{A}^T$, входящая в условие (42′), является проективной матричной координатой поляры плоскости A.

Отражение (11) от плоскости A и ее поляры здесь также является движением пространства R_n^m и называется отражением от плоскости A в этом пространстве. В силу (42′) формула (11) в этом случае принимает вид

$$S = 2E_1 \tilde{A}^T \tilde{A} - I_n. \tag{43}$$

При $p=n-1$ из формулы (43) мы получаем формулу отражения от гиперплоскости пространства R_n^m, найденную Н. Т. Аббасовым [9]. Формула (43) была найдена другим методом Б. А. Розенфельдом, Л. М. Карповой и Л. П. Скакальской [8].

Матрица W двойного отношения плоскостей A, B и их поляр в силу (42′) может быть записана в виде

$$W = (\tilde{A} E_1 \tilde{B}^T)(\tilde{B} E_1 \tilde{A}^T). \tag{44}$$

Однако задача определения метрических инвариантов и ковариантов p-мерных плоскостей при $p>m$ решается гораздо более просто при помощи проективных матричных координат A и B, а не при помощи координат $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.

Коломенский педагогический институт

Поступила в редакцию 27. XI. 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии, М., 1955.
2. Б. А. Розенфельд. Квазиэллиптические пространства, Труды Московского математического общества, т. 8, 1959, стр. 49—70.
3. Т. Г. Чахленкова. Геометрия m-евклидовых пространств, Математика (Известия высших учебных заведений), № 1, 1958, стр. 174—183.

4. Б. А. Розенфельд. Прямоугольные матрицы и неевклидовы геометрии, Успехи математических наук, т. 13, вып. 6 (84), 1958, стр. 21–48.
5. Б. А. Розенфельд и И. Н. Семенова. Проектирование и отражение в проективном пространстве, Ученые записки Московского Государственного заочного педагогического института, вып. 8 (серия матем.), 1962, стр. 78–83.
6. A. Fuhrmann. Klasse ähnlicher Matrizen als verallgemeinerte Doppelverhältnisse, Mathematische Zeitschrift, Bd. 62, 1955, S. 211—240.
7. Н. Т. Аббасов. Спинарные представления движений квазинеевклидовых пространств, Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. XI, 1961, стр. 241–252.
8. Б. А. Розенфельд, Л. М. Еськина (Карпова) и А. П. Скакальская. Матрицы отражений от плоскостей в квазиэллиптических пространствах, Ученые записки Московского Государственного заочного педагогического института, вып. 8 (серия матем.), 1962, стр. 72–77.
9. Н. Т. Аббасов. Отражения от плоскостей в квазиэллиптических пространствах, Доклады Академии Наук Азерб. ССР, т. 17, № 9, 1961, стр. 861–864.

KVAZIELIPSINĖS ERDVĖS PLOKŠTUMŲ DVEJETŲ METRINIAI INVARIANTAI IR KOVARIANTAI

B. A. ROZENFELDAS, L. M. KARPOVA, L. P. ANDRIEJEVA

(Reziumė)

Darbe yra surastas efektyvus metodas kvazielipsinės erdvės plokštumų dvejetų metrinių invariantų ir kovariantų nustatymui. Kvazielipsinė erdvė yra atskiras atvejis metrinės erdvės; kvazielipsinės erdvės absoliutas yra sudarytas iš menamo antros eilės kūgio ir neišsigimusios kvadrikos, gulinčios minėto kūgio viršūninėje plokštumoje. Kvazielipsinės erdvės plokštumų dvejetų metriniai kovariantai yra neeuklidinės erdvės plokštumų dvejetų bendrų statmenų analogai, o metriniai invariantai — minėtų statmenų ilgių analogai.

METRICAL INVARIANTS AND COVARIANTS OF COUPLES OF PLANES IN THE QUASIELLIPTIC SPACE

B. A. ROZENFELD, L. M. KARPOVA, L. P. ANDREEVA

(Summary)

In this article is found an effective method of determination of metrical invariants and covariants of couples of planes in a space with projective metric — the Quasieliptic space, that is the space with an Absolute consisting of an imaginary cone of second ordre and a non-degenerate-quadric in a summit plane of this cone. The metrical covariants of couples of planes are analogous to the perpendiculars of couples of planes in the non-Euclidean spaces. The metrical invariants are analogous to the lenghts of these common perpendiculars. The points of intersection of the metrical covariants of two planes with this planes are determined by means of Eigen-vectors of some metrices formed by the matrix coordinates of the planes. The matrical invariants are determined by means of Eigen — values of the matrices. These matrices are formed by various ways for the metrical covariants being in lines non intersecting with the summit plane of the one of the Absolute, intersecting with this plane and entirely being in this plane.