IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1964

# О ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУППЫ ТИПА (3,3)

А. МАТУЛЯУСКАС, М. МАТУЛЯУСКЕНЕ

Задача описания всех неразложимых представлений группы $(p,p)$ ($p$ — простое число) полностью решена только для группы (2,2) ([1]). Для остальных групп типа $(p,p)$ лишь известно, что они обладают неразложимыми представлениями сколь угодно высокой степени ([2]). Поэтому для этих групп большой интерес представляет определение условий, при которых группа $(p,p)$ имеет лишь конечное число неразложимых представлений. В настоящей заметке такие условия найдены для группы (3,3).

**Теорема.** *Если хотя бы одна из матриц представления группы* (3,3) *удовлетворяет уравнению*

$$x^2+x+1=0,$$

*то такое представление разлагается на конечное число неразложимых представлений, взятых из системы* 12 *неэквивалентных представлений, степени которых не выше* 6.

Доказательство. Пусть $A$ и $B$ — две целочисленные матрицы порядка $n$, удовлетворяющие условиям

$$A^3=E_n, \quad B^2+B=-E_n,$$

где $E_n$ — единичная матрица порядка $n$. Тогда $n=2m$, причем можно считать, что $B=\Delta\times E_m$, где $\times$ — символ кронекеровского произведения, а $\Delta=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$. Нетрудно убедиться в том, что в кольце 2-целых рациональных чисел существует обратимая матрица $\overline{T}$ ($\overline{T}B=B\overline{T}$), такая, что $\overline{T}^{-1}A\overline{T}$ распадается на ящики следующих типов: $E_2$, $\Delta$, $\Delta^2$. Тогда аналогичным преобразованием в кольце целых чисел матрице $A$ можно придать вид

$$\overline{A}=\left.\begin{bmatrix} E_{2i} & & & \\ & \Delta\times E_j & & \\ & & \Delta^2\times E_k & \\ & & & \begin{bmatrix}0 & -E_2\\ E_2 & -E_2\end{bmatrix}\times E_l \end{bmatrix}\right\} n,$$

где $i$, $j$, $k$, $l$ — целые неотрицательные числа. Считая преобразующие матрицы перестановочными с матрицей $B$, приведем матрицу $\overline{A}$ к клеточно-диагональной форме. Преобразованием сильной эквивалентности (см. [3]) с последующим трансформированием полученной матрицы унимодулярной матрицей вида

$$\left.\begin{bmatrix} P & & & \\ & Q & 0 & \\ & 0 & R & \\ & & & S \end{bmatrix}\right\} n,$$

где $P$, $Q$, $R$, $S$ — целочисленные квадратные матрицы, матрица $\overline{A}$ приводится к матрице

$$\overline{\overline{A}}=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & \multicolumn{2}{c|}{} & \begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\times E_f & 0 & \\ \cline{4-5}
E_{2i} & \multicolumn{2}{c|}{M} & 0 & \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\times E_g & 0 \\ \cline{4-5}
 & \multicolumn{2}{c|}{} & 0 & 0 & \\ \hline
 & \Delta\times E_j & \begin{array}{c|c} E_{2h} & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array} & \multicolumn{3}{c}{0} \\ \cline{2-6}
 & & \Delta^2\times E_k & \multicolumn{3}{c}{0} \\ \cline{3-6}
 & & & \multicolumn{3}{c}{(E_2\times\Delta)\times E_l}
\end{array}\right]$$

$$\Big(f+g\leqslant\min(i,\ l),\quad h\leqslant\min(j,\ k),\quad 2(i+j+k+2l)=n\Big),$$

где $M$ — некоторая целочисленная матрица. Разобьем матрицу $M$ на две подматрицы $H$ и $K$ следующим образом

$$M=\begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix}.$$

Из равенств

$$\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 & 0 & 0 \\ E_2 & E_2 & 0 & E_2 \\ -\Delta & -\Delta^2 & -E_2 & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2 \\ 0 & 0 & E_2 & -E_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2 \\ 0 & 0 & E_2 & -E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 & 0 & 0 \\ E_2 & E_2 & 0 & E_2 \\ -\Delta & -\Delta^2 & -E_2 & E_2 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ E_2 & \Delta^2-\Delta & 0 & E_2 \\ -\Delta & -\Delta & -E_2 & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2 \\ 0 & 0 & E_2 & -E_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \Delta & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2 \\ 0 & 0 & E_2 & -E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ E_2 & \Delta^2-\Delta & 0 & E_2 \\ -\Delta & -\Delta & -E_2 & E_2 \end{bmatrix}$$

получаем, что подматрицу $K$ можно считать нулевой. Следовательно, матрица $\bar{\bar{A}}$ распадается на ящики вида $\left[\begin{matrix} E_2\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\\ E_2\times\Delta\end{matrix}\right]$ и подматрицу

$$\bar{\bar{A}}_1=\left[\begin{array}{c|c|c|c}
E_{2(i-f)} & \multicolumn{2}{c|}{H} & \begin{array}{c|c}\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\times E_g & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\\ \hline
 & \Delta\times E_j & \begin{array}{c|c}E_{2h}&0\\ \hline 0&0\end{array} & 0\\ \cline{2-4}
 & & \Delta^2\times E_k & 0\\ \cline{3-4}
 & & & (E_2\times\Delta)\times E_{l-g}
\end{array}\right].$$

Серией преобразований, аналогичных проделанным, подматрице $\bar{\bar{A}}_1$ можно придать вид:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c}
E_{2(i-f)} & \multicolumn{2}{c|}{\begin{array}{c}0\\ \hline C\end{array}} & \begin{array}{c|c}\begin{vmatrix}0&0&1&1\\0&0&-1&2\end{vmatrix}\times E_d & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\\ \hline
 & \Delta\times E_j & \begin{array}{c|c}E_{2h}&0\\ \hline 0&0\end{array} & 0\\ \cline{2-3}
 & & \Delta^2\times E_k & \\ \cline{3-4}
 & & & (E_2\times\Delta)\times E_{l-g}
\end{array}\right]\qquad (d\leqslant g),$$

где

$$C=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|c|c}
\multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & \begin{array}{c}0\\ \hline E_{2q}\\ \hline 0\end{array} & \begin{array}{c}0\\ \hline E_{2r}\end{array} & 0 & 0\\ \hline
\multicolumn{2}{c|}{0} & E_{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2s} & 0\\ \hline
E_{2u} & \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0
\end{array}\right]\\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{2j}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{2h}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2(k-h)}\end{array},$$

$q$, $r$, $s$, $t$, $u$ — целые неотрицательные числа; $q\leqslant j-u$; $u\leqslant h$; $t\leqslant k-h$. Отсюда получаем, что существует унимодулярная матрица $T$, перестановочна с матрицей $B$, такая что матрица $T^{-1}AT$ распадается на ящики следующих типов:

1) $A_1=\left[\begin{matrix} E_2\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\\ E_2\times\Delta\end{matrix}\right]$, 2) $A_2=\left[\begin{matrix} E_2\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\\ E_2\times\Delta\end{matrix}\right]$,

3) $A_3=\begin{bmatrix} E_2 & 0 & E_2 \\ & \Delta & E_2 \\ & & \Delta^2 \end{bmatrix}$, 4) $A_4=\begin{bmatrix} E_2 & E_2 & E_2 \\ & \Delta & 0 \\ & & \Delta^2 \end{bmatrix}$,

5) $A_5=\begin{bmatrix} E_2 & E_2 & 0 \\ & \Delta & E_2 \\ & & \Delta^2 \end{bmatrix}$, 6) $A_6=\begin{bmatrix} E_2 & E_2 \\ & \Delta \end{bmatrix}$,

7) $A_7=\begin{bmatrix} E_2 & E_2 \\ & \Delta^2 \end{bmatrix}$, 8) $A_8=\begin{bmatrix} \Delta & E_2 \\ & \Delta^2 \end{bmatrix}$, 9) $A_9=\begin{bmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & -E_2 \end{bmatrix}$,

10) $A_{10}=\Delta$, 11) $A_{11}=\Delta^2$, 12) $A_{12}=E_2$.

Теорема доказана, т.к. $A_1 \sim A_2 \sim A_3$, $A_8 \sim A_9$.

**Следствие.** *Неразложимые представления сколь угодно большой степени группы* (3,3) *могут существовать лишь в случае, когда минимальным многочленом обеих матриц представления является многочлен* $x^3-1$.

Отметим, что число неэквивалентных 2-целых представлений группы (3,3) равно 5, так как любое представление этой группы разлагается в кольце 2-целых рациональных чисел на неразложимые представления следующих типов:

$$1)\ A=1,\ B=1;\quad 2)\ A=E_2,\ B=\Delta;\quad 3)\ A=\Delta,\ A=E_2;$$
$$4)\ A=\Delta,\ B=\Delta;\quad 5)\ A=\Delta,\ B=\Delta^2.$$

Вильнюсский государственный
университет им. Капсукаса

Поступила в редакцию
25.XI.1963

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Назарова. Целочисленные представления четверной группы, ДАН СССР, 1961, **190**, № 5, 1011–1014.
2. З. И. Боревич и Д. К. Фадеев. Теория гомологий в группах. II. О проективных резольвентах конечных групп, Вестник Ленингр. унив., серия матем., 1959, № 7, 72–877.
3. F. E. Diederichsen. Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetisher Äquivalenz, Hamb. Abh., 1938, **13**, 387—412.

## APIE (3,3) TIPO GRUPĖS SVEIKASKAIČIUS ATVAIZDAVIMUS

A. MATULIAUSKAS, M. MATULIAUSKIENĖ

*(Reziumė)*

(3,3) tipo grupės atvaizdavimas išsidėsto į baigtinį neišskaidomų neekvivalenčių atvaizdavimų skaičių, $s \leqslant 9$, 12, jei nors viena šio atvaizdavimo matricų patenkina lygtį

$$x^2+x+1=0.$$

Neišskaidomų atvaizdavimų laipsniai yra nedidesni už 6.

## ÜBER GANZZAHLIGE DARSTELLUNGEN DER GRUPPE VON TYPUS (3,3)

A. MATULIAUSKAS, M. MATULIAUSKIENĖ

*(Zusammenfassung)*

Jede ganzzahlige Darstellung der Gruppe von Typus (3,3) zerfällt in eine endliche Anzahl $s$ unzerfällbarer inäquivalenten Bestandteile ($s \leqslant 9, 12$), wenn es in dieser Darstellung eine Matrix gibt, die der Gleichung

$$x^2+x+1=0$$

genügt. Die Grade unzerfällbarer Bestandteile sind durch die Zahl 6 beschränkt.