IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
1964

О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

В работе [1] изучалось уравнение

$$y(x)+\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)}(x)=f(x), \quad P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s, \quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.1}$$

при условиях: а) $\sup\limits_{k\geqslant 1} \frac{n_k}{k}=\alpha<1$; б) функция $F(x,\ t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k!\ t^{-k} P_k(x)$ аналитична в некотором бицилиндре $|x|\leqslant R_1$, $|t|\geqslant R_2$.

Обозначим через $[\rho,\ \sigma)$ класс целых функций, у которых или порядок меньше ρ или, если порядок равен ρ, тип меньше σ. В работе [1] с помощью сведения уравнения (1.1) к интегральному было доказано существование и единственность решения в классе $[1-\alpha,\ \sigma_0)$, где число σ_0 определялось коэффициентами уравнения; кроме того, был указан метод приближенного нахождения решения из данного класса.

Следует отметить, что ограничение б) является весьма стеснительным, однако методы работы [1] не позволяли заменить его каким-либо менее жестким условием.

При исследовании уравнения (1.1) важно уметь оценить рост производных $y^{(n)}(x)$ любой целой функции с возрастанием $|x|=r$. Точная характеристика роста функции $M(r,\ y^{(n)})=\max\limits_{|x|=r} |y^{(n)}(x)|$ при возрастании r дается теорией Вимана—Валирона [2]. Именно, если r является достаточно большим обыкновенным [2] значением, то для всех точек z на окружности $|z|=r$ справедливо представление

$$y^{(n)}(z)=[1+\varepsilon_n(z)]\ [\nu(r)]^n z^{-n} y(z). \tag{1.2}$$

Здесь $\varepsilon_n(z)$ – функция от z, стремящаяся к нулю при $r\to\infty$ равномерно относительно всех z на окружности $|z|=r$ (при фиксированном $n\geqslant 1$); $\nu(r)$ – центральный индекс максимального члена. Множество обыкновенных значений r расположено достаточно густо на положительной полуоси: точнее, множество всех остальных r, называемых исключительными значениями, можно заключить в интервалы $(R_k,\ R_k')$, концы которых являются обыкновенными значениями, причем полная вариация $\ln r$ в этих интервалах ограничена:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k'-R_k}{R_k}<\infty.$$

Однако, при исследовании дифференциального уравнения бесконечного порядка надо иметь оценки роста производных $y^{(n)}$, справедливые для всех $n \geqslant 1$ и для всех $r \geqslant R_0$, где R_0 от n не зависит. Основное содержание второго параграфа, имеющего вспомогательный характер, и составляет вывод таких оценок, и, в частности, оценка норм $\|y^{(n)}\|$ в весовых банаховых пространствах. В третьем параграфе на основании найденных оценок дается теорема существования и единственности для уравнения (1.1) в классе $[1-\alpha, \sigma_1)$, σ_1 — достаточно малое число, причем условие б) заменено гораздо более общим и естественным:

б^1) функция $F_1(x, t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, t^{-n}$ аналитична в некотором бицилиндре $|x|\leqslant R$, $|t|\geqslant R_1$. Кроме того, здесь же обосновывается приближенное решение уравнения (1.1) методом редукции (также при условиях а) и б^1)).

В четвертом параграфе рассматривается вопрос об асимптотических свойствах решений.

Для линейных дифференциальных уравнений конечного порядка с многочленными коэффициентами асимптотические свойства целых решений были подробно исследованы Валироном [2], [3]. Применительно к уравнению

$$y(x)+\sum_{k=1}^{n} P_k(x)\, y^{(k)}(x)=P_0(x), \tag{1.3}$$

где

$$P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n; \quad \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{n_k}{k}=\alpha<1.$$

Результаты Валирона выглядят следующим образом:

Всякая трансцендентная целая функция y, удовлетворяющая уравнению (1.3), имеет конечный рациональный порядок и принадлежит к экспоненциальному звездному типу.

Последнее означает, что а) функция $M(r, y)$ имеет вид

$$\ln M(r)=[l+0(1)]\, r^{\rho}, \tag{1.4}$$

l не зависит от r, $o(1)\to 0$ при $r\to\infty$; $M(r)=M(r, y)$; б) при всех достаточно больших обыкновенных значениях r аргументы точек z_r, $|z_r|=r$, в которых $|y(z_r)|=M(r)$, близки к некоторым определенным числам, то-есть, существует конечный набор чисел C_1, C_2, $\ldots$, C_s, обладающих следующим свойством: по любому $\varepsilon>0$ можно указать такое $R_0=R_0(\varepsilon)$, что для всякого обыкновенного $r>R_0$ найдется какое-то C_m, $1\leqslant m\leqslant s$, $m=m(r)$, такое, что $|\arg z_r - C_m|<\varepsilon$. Число ρ в формуле (1.4) определяется следующим образом [2]. Строится (выпуклая) ломаная Γ Ньютона по точкам $B_k(k,\ n_k-k)$, $k=0,\ 1,\ \ldots$ Так как $0\leqslant n_k\leqslant\alpha$, то все точки B_k лежат в четвертом координатном угле между прямыми $y=-x$ и $y=-(1-\alpha)x$, причем точка B_0 совпадает с пересечением этих прямых — началом координат. Нетрудно проверить, что ломаная Γ обязательно содержит отрезок Λ $(0, 0)\ldots(k_0,\ n_{k_0}-k_0)$, где k_0 – наибольший из номеров k, $1 \leqslant k \leqslant n$, для которого $n_{k_0} = \alpha k_0$. Кроме того, если γ – какая-нибудь сторона ломаной, имеющая отрицательный угловой коэффициент $\rho(\gamma)$, то $|\rho(\gamma)| \geqslant |-\alpha$, причем $\rho(\Lambda) = \alpha - 1$. Так вот, число ρ в формуле (1.4) может быть только одним из чисел $|\rho(\gamma)|$, а число l равно модулю одного из корней уравнения $\Sigma a_{n_k}^k x^k = 0$, где суммирование распространено на все целые $k \leqslant n$, при которых соответствующие точки B_k лежат на стороне γ. Отсюда, в частности, следует, что порядок любого целого трансцендентного решения уравнения (1.3) не менее $1-\alpha$. Далее, если $y(x)$ – целое решение уравнения (1.3) порядка $1-\alpha$, то $L(y) = \lim\limits_{r\to\infty} r^{\alpha-1} \ln M(r)$ существует и удовлетворяет неравенству $(1-\alpha) L(y) \geqslant h_0$, где h_0 – модуль ближайшего к началу координат нуля функции $1 + \sum\limits_{k=1} a_{n_k}^k x^k$, а суммирование в последней сумме ведется только по тем $k \geqslant 1$, для которых $n_k = \alpha k$.

В четвертом параграфе исследуются асимптотические свойства трансцендентных целых решений уравнения

$$y(x) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)}(x) = P_0(x), \tag{1.5}$$

где $P_k(x)$ – многочлены, $k = 0, 1, 2, \ldots$ При условиях а) и б^1) найдены асимптотические характеристики роста трансцендентных целых решений этого уравнения из класса $[1-\alpha, d)$, где $\sigma_1 < d < \infty$. Оказывается, что такие решения ведут себя при больших r так же, как решения уравнения конечного порядка (1.3) из класса $[1-\alpha, \infty)$, и, в частности, они принадлежат к экспоненциальному звездному типу. Эти результаты получены методом, использующим точные оценки (1.2) в сочетании с более грубыми оценками § 2, которые зато справедливы при всех $n \geqslant 1$ и при всех достаточно больших r.

Наконец, в пятом параграфе при условиях а) и б) получаются оценки снизу для роста любого трансцендентного целого решения уравнения (1.5).

§ 2. Некоторые вспомогательные результаты

п. 1. В работе [4] было введено банахово пространство $W_{\rho,\sigma}$ целых функций $y(x)$ таких, что

$$\sup_{r \geqslant R_0} M(r, y) \exp(-\sigma r^{\rho}) = \| y \| < \infty;$$

σ и ρ – некоторые фиксированные числа, причем $0 \leqslant \sigma < \infty$; $0 < \rho \leqslant 1$. Если r – конечное число и $r \geqslant R_0$, то положим $\| y \|_r = \sup\limits_{t \geqslant r} M(t, y) \exp(-\sigma t^{\rho})$. Нас будет интересовать оценка выражения $\| y^{(n)} \|_r$ для любой функции $y(x)$ из $W_{\rho,\sigma}$. Из интегральной формулы Коши для y' имеем при любом $r \geqslant 0$ и $h > 0$

$$M(r, y') \leqslant \frac{1}{h} M(r+h, y) \leqslant \| y \|_{r+h} \frac{\exp \sigma (r+h)^{\rho}}{h} \leqslant \| y \|_r \frac{\exp \sigma (r+h)^{\rho}}{h}.$$

Если положить $h=\frac{r^{1-\rho}}{\rho\sigma}$, то

$$\sigma(r+h)^{\rho}-\sigma r^{\rho}=\sigma r^{\rho}\left[\left(1+\frac{r^{-\rho}}{\rho\sigma}\right)^{\rho}-1\right]=$$

$$=1-\frac{\sigma\rho(1-\rho)}{2(\rho\sigma)^{2}}r^{-\rho}+\frac{\sigma\rho(1-\rho)(2-\rho)}{3!(\rho\sigma)^{3}}r^{-2\rho}-\ldots=1-\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\alpha_{k}.$$

При этом $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\frac{(k-\rho)r^{-\rho}}{(k+1)\rho\sigma}<1$, если $r\geqslant R_0>(\rho\sigma)^{-\frac{1}{\rho}}$, $k\geqslant 2$, и $\sigma(r+h)^{\rho}-\sigma r^{\rho}\leqslant 1$. Поэтому

$$M(r,\ y')\leqslant\|y\|_r\, e\rho\sigma\, r^{\rho-1}\exp\sigma r^{\rho};\quad \|y'\|_r\leqslant Dr^{\rho-1}\|y\|_r,\quad D=e\rho\sigma.$$

Из полученной оценки видно, что если $y\in W_{\rho,\sigma}$, то и $y'\in W_{\rho,\sigma}$, а значит, и $y^{(n)}\in W_{\rho,\sigma}$ для всех $n\geqslant 1$. Кроме того, заменяя в этой оценке y на y', найдем

$$\|y''\|_r\leqslant\|y'\|_r\, Dr^{\rho-1}\leqslant D^{2}r^{2(\rho-1)}\|y\|_r,$$

и вообще

$$\|y^{(n)}\|_r\leqslant D^{n}r^{n(\rho-1)}\|y\|_r,$$

или

$$M(r,\ y^{(n)})\leqslant e^{\sigma r^{\rho}}D^{n}r^{n(\rho-1)}\|y\|_r,\quad r\geqslant R_0>(\rho\sigma)^{-\frac{1}{\rho}},\quad n\geqslant 1. \tag{2.1}$$

Укажем еще один способ оценки $\|y^{(n)}\|$ в пространстве $W_{\rho,\sigma}$. Исходя из интегральной формулы Коши для $y^{(n)}$, найдем при всех $r\geqslant R_0$ и $h>0$:

$$M(r,\ y^{(n)})\leqslant n!\ h^{-n}M(r+h,\ y)\leqslant n!\ \|y\|_r h^{-n}\exp\sigma(r+h)^{\rho}.$$

Функция $\varphi(h)=h^{-n}\exp\sigma(r+h)^{\rho}$ определена в интервале $(0,\ \infty)$ и принимает наименьшее значение в единственной точке h_n, удовлетворяющей уравнению $\rho\sigma(r+h)^{\rho-1}h=n$, или $\sigma(r+h)^{\rho}=\frac{n}{\rho}\left(1+\frac{r}{h}\right)$. Очевидно, что при $\rho\leqslant 1$

$$\frac{1}{h}=\frac{\sigma\rho}{n}(r+h)^{\rho-1}\leqslant\frac{\sigma\rho r^{\rho-1}}{n},$$

и

$$\varphi(h_n)=h_n^{-n}\exp\frac{n}{\rho}\left(1+\frac{r}{h_n}\right)\leqslant D_1^{n}r^{n(\rho-1)}n^{-n}e^{\sigma r^{\rho}},\quad D_1=e^{\frac{1}{\rho}}\sigma\rho.$$

Возвращаясь к оценке $M(r,\ y^{(n)})$, получаем по формуле Стирлинга,

$$M(r,\ y^{(n)})\leqslant\sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12n}}D_1^{n}e^{-n}r^{n(\rho-1)}\exp\sigma r^{\rho}\|y\|_r.$$

Комбинируя последнюю оценку с (2.1), находим

$$M(r,\ y^{(n)})\leqslant e^{\sigma r^{\rho}}(\sigma\rho)^{n}b^{n}\lambda_n r^{n(\rho-1)}\|y\|_r,\quad r\geqslant R_0>(\rho\sigma)^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{2.2}$$

где число λ_n равно 1, если $0<\rho\leqslant\frac{1}{2}$, и $\sqrt{2\pi n}\exp\frac{1}{12n}$, если $\frac{1}{2}<\rho\leqslant 1$, а b равно e при $0<\rho\leqslant\frac{1}{2}$ и $\exp\left(\frac{1}{\rho}-1\right)$, когда $\frac{1}{2}<\rho\leqslant 1$.

По-видимому, оценку (2.2) можно улучшить, заменив b^n выражением $H(\delta)(1+\delta)^n$, где $\delta>0$ как угодно мало. Однако, получить такую оценку не удалось.

п. 2. Пусть теперь $y(x)$ — произвольная целая функция (не обязательно из $W_{\rho, \sigma}$). Обозначив $M(r, y)$ через $M(r)$, можем написать очевидное неравенство

$$M(r, y^{(n)}) \leqslant M(r)\ n!\ h^{-n} \exp\left[\ln M(r+h) - \ln M(r)\right].$$

Известно, что для всех $r \geqslant r_0$ [2]

$$\ln M(r) = \ln M(r_0) + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{w(u)}{u}\, du, \tag{2.3}$$

где $w(u)$ — неубывающая функция. Предположим, что для всех $r \geqslant r_0$ $\frac{w(r)}{r}$ имеет невозрастающую мажоранту $\alpha(r)$. Тогда для этих же r

$$M(r, y^{(n)}) \leqslant M(r)\ n!\ h^{-n} \exp \int\limits_{r}^{r+h} \alpha(u)\, du \leqslant M(r)\ n!\ h^{-n} \exp h\alpha(r).$$

Положив $h = \frac{n}{\alpha(r)}$, найдем нужную нам оценку

$$M(r, y^{(n)}) \leqslant M(r)\ \lambda_n \left[\alpha(r)\right]^n, \quad \lambda_n = \sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{1}{12n}}. \tag{2.4}$$

Для дальнейшего важно знать связь между ростом $\nu(r)$, $w(r)$ и $M(r)$. Прежде всего, следуя идее Бореля, найдем из (2.3), учитывая, что $\ln M(r) \geqslant 0$ при всех $r \geqslant r_2$:

$$\ln M(r+h) \geqslant \int\limits_{r}^{r+h} \frac{w(u)}{u}\, du \geqslant w(r) \ln\left(1 + \frac{h}{r}\right).$$

Предположим, что $M(r)$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ r^{-\rho} \ln M(r) = C < \infty, \qquad 0 < \rho \leqslant 1. \tag{2.5}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и всех $r \geqslant R(\varepsilon)$

$$w(r) \leqslant \frac{(C+\varepsilon)\ (r+h)^{\rho}}{\ln\left(1 + \frac{h}{r}\right)}.$$

Если положить $h = r[e^{\frac{1}{\rho}} - 1]$, то $\frac{w(r)}{r} \leqslant (C+\varepsilon)\, r^{\rho-1}\, e\rho = \alpha(r)$, где $\alpha(r)$ — невозрастающая функция.

Аналогично, если через $\mu(r)$ обозначить максимальный член $y(x)$, то при всех $r \geqslant r_0$

$$\ln M(r) \geqslant \ln \mu(r) = \ln \mu(r_0) + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\nu(x)}{x}\, dx.$$

Оценивая, как в случае M и w, получим для $r \geqslant r_1$

$$\nu(r) \leqslant \frac{\ln \mu(r+h)}{\ln\left(1 + \frac{h}{r}\right)} \leqslant \frac{\ln M(r+h)}{\ln\left(1 + \frac{h}{r}\right)}.$$

Отсюда, положив, как раньше $h = r[e^{\frac{1}{\rho}} - 1]$, найдем, что из (2.5) следуют соотношения (первое уже было получено выше):

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho} w(r) \leqslant Ce\rho; \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho} \nu(r) \leqslant Ce\rho. \tag{2.6}$$

В соотношениях (2.6) было бы очень желательно заменить число e ме́ньшим множителем (нам представляестя вероятным, что вместо e можно взять единицу).

Отметим еще две простые леммы, которые будет нам полезны.

Лемма 1. *Если* $\underline{\lim}_{r\to\infty} \nu(r) r^{-\rho} \geqslant a$, *то* $\underline{\lim}_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln M(r) \geqslant \frac{a}{\rho}$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и $r \geqslant r_0(\varepsilon)$ имеем:

$$\nu(r) \geqslant (a-\varepsilon) r^\rho;\ \ln M(r) \geqslant \ln \mu(r) \geqslant \ln \mu(r_0) + (a-\varepsilon) \int_{r_0}^{r} t^{\rho-1}\, dt =$$

$$= \ln \mu(r_0) + \frac{(a-\varepsilon) r^\rho}{\rho} - \frac{(a-\varepsilon) r_0^\rho}{\rho},$$

и

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho} \ln M(r) \geqslant \frac{a-\varepsilon}{\rho}.$$

Лемма 2. *Если* $\overline{\lim}_{r\to\infty} r^{-\rho} \nu(r) \leqslant b$, *то* $\overline{\lim}_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln M(r) \leqslant \frac{b}{\rho}$.

Доказательство. По условиям леммы, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $R_1(\varepsilon)$ такое, что $\nu(x) < (b+\varepsilon) x^\rho$ для $x \geqslant R_1$. Обозначим через $\{R\}$ множество обыкновенных значений функции y. Справедлива формула для всех $r \in \{R\}$ [7]

$$\ln M(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{\nu(x)}{x}\, dx + h(r) \ln \nu(r) = \int_{r_0}^{R_1} \frac{\nu(x)}{x}\, dx + \int_{R_1}^{r} \frac{\nu(x)}{x}\, dx + h(r) \ln \nu(r),$$

где $|h(r)| \leqslant K < \infty$ для $r \geqslant r_0$. Отсюда при достаточно больших обыкновенных r

$$\ln M(r) \leqslant K \ln(b+\varepsilon) + K\rho \ln r + \int_{r_0}^{R_1} \frac{\nu(x)}{x}\, dx + \frac{(b+\varepsilon)}{\rho} r^\rho - \frac{(b+\varepsilon) R_1^\rho}{\rho},$$

и $\overline{\lim}_{r\to\infty,\ r\in\{R\}} \frac{\ln M(r)}{r^\rho} \leqslant \frac{b+\varepsilon}{\rho}$. Итак, $\overline{\lim}_{r\to\infty,\ r\in\{R\}} r^{-\rho} \ln M(r) \leqslant \frac{b}{\rho}$.

Если теперь $\tilde{R}_k$ — любая неограниченно возрастающая последовательность исключительных значений, то для каждого $k \geqslant 1$ найдем обыкновенные значения R_k и R'_k так, чтобы

$$R_k < \tilde{R}_k < R'_k, \quad R'_k = R_k \Big(1 + o(1)\Big).$$

Тогда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \frac{\ln M(\tilde{R}_k)}{\tilde{R}_k^\rho} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \frac{\ln M(R'_k)}{R_k^\rho} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \frac{\ln M(R'_k)}{(R'_k)^\rho} \leqslant \frac{b}{\rho},$$

и лемма 2 доказана.

п. 3. В заключение этого параграфа приведем две теоремы, которые находят применение в ряде вопросов теории линейных уравнений бесконечного порядка в обычных и обобщенных в смысле Гельфонда – Леонтьева [5] производных.

Предположим, что каждому вещественному значению μ из интервала (α, β) поставлено в соответствие B – пространство I_μ, причем $I_{\mu_1} \subset I_{\mu_2}$, если $\mu_1 < \mu_2$. Нормы в пространствах I_μ предполагаются согласованными так, что если $\|y_n - y\|_{\mu_1} \to 0$, y_n, $y \in I_\mu$ и $\alpha < \mu_1 < \mu < \beta$, то подавно $\|y_n - y\|_\mu \to 0$. Введем множество $A = \bigcup\limits_{\alpha<\mu<\beta} I_\mu$. Нетрудно заметить, что A становится топологическим пространством (индуктивным пределом B-пространств), если ввести в A предельный переход следующим образом: $x_n \to x$ в топологии A, если x_n, $x \in I_\mu$ для некоторого $\mu \in (\alpha, \beta)$ и если $\|x_n - x\|_\mu \to 0$.

Если $x \in A$, то обозначим через $\varphi(x)$ точную нижнюю границу тех μ из (α, β), для которых $x \in I_\mu$.

Теорема 2.1. *Предположим, что оператор L действует (однозначно) из пространства I_μ в I_μ при всех μ из множества S, плотного в (α, β). Пусть, далее, уравнение*

$$Ly = f \tag{2.7}$$

разрешимо в I_μ для любого f из I_μ и всех $\mu \in S$. Тогда это уравнение имеет хотя бы одно решение y в A для любого элемента f из A. Более того, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое решение y_ε уравнения (2.7), что $\varphi(f) \leqslant \varphi(y) \leqslant \varphi(f) + \varepsilon$.

Доказательство. Если $f \in A$, то $f \in I_\mu$ для всех $\mu \in (\varphi(f), \beta)$. Выберем $\mu(\varepsilon)$ так, чтобы $\mu(\varepsilon) \in S \cdot (\varphi(f), \varphi(f) + \varepsilon)$. По условию уравнение (2.7) имеет решение y_ε в $I_{\mu(\varepsilon)}$, причем

$$\varphi(y_\varepsilon) \leqslant \varphi(f) + \varepsilon.$$

С другой стороны, если y – решение уравнения (2.7) и $\varphi(y) < \varphi(f)$, то, взяв $c \in S$ в интервале $(\varphi(y), \varphi(f))$, найдем, что $y \in I_c$ и, следовательно, $g = Ly \in I_c$. Но тогда в любом пространстве I_d, где $d \in S$ и $d = \varphi(f) + \delta$, $0 < \delta < \beta - \varphi(f)$, оператор L переводил элемент y в два различных элемента: в $g \in I_c \subset I_d$ и в $f \in I_d$, причем $f \bar{\in} I_c$.

Итак, $\varphi(y_\varepsilon) \geqslant \varphi(f)$, и теорема доказана.

Теорема 2.2. *Предположим, что уравнение (2.7) имеет единственное решение в любом пространстве I_μ, каковы бы ни были $f \in I_\mu$ и $\mu \in S$. Тогда это уравнение однозначно разрешимо для любого f из A, причем $\varphi(y) = \varphi(f)$.*

Доказательство. По предыдущей теореме уравнение (2.7) разрешимо в A. Предположим, что для некоторого $f \in A$ найдутся два решения y_1 и y из A, и пусть $\mu_0 = \sup\{\varphi(y_1), \varphi(y_2)\}$, $\alpha < \mu_0 < \beta$.

Из доказательства теоремы 2.1 следует, что $\mu_0 \geqslant \varphi(f)$. Если $\mu_2 \in (\mu_0, \beta)$. S, то $f \in I_{\mu_2}$, и уравнение имеет по предположению единственное решение z в I_{μ_2}. Но так как y_1 и y_2 принадлежат I_{μ_2}, то $y_1 = y_2 = z$, и единственность доказана. Далее, по любому $\varepsilon > 0$ найдётся в силу теоремы 2.1 такое решение y_ε, что $\varphi(f) \leqslant \varphi(y_\varepsilon) \leqslant \varphi(f) + \varepsilon$. Учитывая, что число $\varepsilon > 0$ можно взять как угодно малым и что решение единственно: $y_\varepsilon = y$, получаем, что $\varphi(y) = \varphi(f)$.

§ 3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1.1). ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.1)

п. 1. Мы дадим сейчас оценку для нормы оператора

$$Ly \equiv \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)}(x),$$

считая, что $y \in \dot{W}_{\rho,\sigma}$ и что условия а), б[1]) выполнены. Пусть $c_k = \max\limits_{0 \leqslant l \leqslant n_k} |a_l^k|$. Из б[1]) следует, что $|a_l^k| \leqslant \frac{T R_1^k}{R^l}$; T, R_1, R — конечные положительные числа, $l \leqslant n_k \leqslant \alpha k$, $k=1, 2, \ldots$ Из этих неравенств легко получаем, что

$$c = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} < \infty.$$

Предположим сначала, что $\rho < 1-\alpha$. Имеем для $k \geqslant 1$, $|x| = r \geqslant 1$ и для любого $\varepsilon > 0$:

$$\left| P_k(x) \right| \leqslant H(\varepsilon)\ (c+\varepsilon)^k\ (n_k+1)\ r^{n_k}; \quad \alpha_k(r) = \max_{|x|=r>1} \left| P_k(x)\, y^{(k)}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant H(\varepsilon)\ (c+\varepsilon)^k\ (n_k+1)\ r^{\alpha k}\, \lambda_k\, r^{k(\rho-1)}\, \|y\|_r\, (\sigma\rho b)^k\, e^{\sigma r^\rho};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(r) \leqslant H(\varepsilon)\, e^{\sigma r^\rho} \|y\|_r \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (n_k+1)(\sigma\rho b)^k (c+\varepsilon)^k r^{-hk},\ h = 1-\alpha-\rho,\ h>0.$$

Из последней оценки видно, что для

$$r \geqslant 1 + \left[\sigma\rho b\,(c+\varepsilon)\right]^{\frac{1}{h}} \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(r)$$

сходится, причем

$$\|Ly\|_r \leqslant \|y\|_r \cdot H(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (n_k+1) \left[(c+\varepsilon)\,\sigma\rho b\right]^k r^{-hk} < \infty,$$

и Ly действует из $W_{\rho,\sigma}$ в $W_{\rho,\sigma}$ при любом $\rho < 1-\alpha$ и $\sigma < \infty$. Кроме того, для $r \geqslant R_0 = R_0(\sigma, \rho, b, c, \varepsilon, q)$

$$H(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (n_k+1)\ (c+\varepsilon)^k\, (\sigma\rho b)^k\, r^{-hk} \leqslant q < 1,$$

и Ly является оператором сближения в $W_{\rho,\sigma}$, если число R_0 в нормировке пространства $W_{\rho,\sigma}$ достаточно велико.

Сложнее дать оценку Ly в случае, когда $\rho = 1-\alpha$. Разобьем все натуральные числа $k \geqslant 1$ на 2 класса: Γ_1 — те, для которых $n_k = \alpha k$, и Γ_2 — для которых $n_k < \alpha k$.

Пусть $d_k = |a_{\alpha k}^k|$, $k \in \Gamma_1$. Очевидно, что

$$d = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{d_k} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} = c < \infty.$$

Введем функцию $\lambda(x) \sum\limits_{k\in\Gamma_1} \lambda_k\, d_k\, x^k$, аналитическую в круге $|x| < \frac{1}{d}$. Обозначим через x_0 единственный положительный корень уравнения $\lambda(x) = 1$, через

$x_1 = \min\left\{\frac{1}{c}, x_0\right\}$, и, наконец, через $a_0 = \frac{x_1}{(1-\alpha)b}$. При этом, если $\lambda(x) < 1$ для всех x из $\left(0, \frac{1}{d}\right)$, или же, если $\lambda(x) \equiv 0$, то положим $x_0 = \infty$.

Пусть $y \in W_{1-\sigma, \sigma}$, где $\sigma < a_0$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\sigma(c+\varepsilon)(1-\alpha)b < 1$ и подавно $\sigma(d+\varepsilon)b(1-\alpha) < 1$. Если положить $H(\varepsilon) = \sup\limits_{k \geqslant 1} d_k (d+\varepsilon)^{-k}$, то для всех $k \geqslant 1$ и $|x| \geqslant r > 1$ имеем

$$\left| a_l^k \right| \leqslant H(\varepsilon)\,(d+\varepsilon)^k; \quad \left| \underset{k\in\Gamma_1}{P_k(x)} \right| \leqslant \left| a_{\alpha k}^k \right| r^{\alpha k} + H(\varepsilon) \sum_{l=0}^{\alpha k - 1} (d+\varepsilon)^k r^l \leqslant$$

$$\leqslant \left| a_{\alpha k}^k \right| r^{\alpha k} + \frac{H(\varepsilon)\,(d+\varepsilon)^k\, r^{\alpha k}}{r-1};$$

$$\left| \underset{k\in\Gamma_2}{P_k(x)} \right| \leqslant H(\varepsilon) \sum_{l=0}^{n_k} (d+\varepsilon)^k r^l \leqslant H(\varepsilon)\, r^{n_k} (d+\varepsilon)^k \frac{r}{(r-1)}.$$

Оценим величину $M(r, Ly)$:

$$M(r, Ly) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(r) \leqslant e^{\sigma r^{1-\alpha}} \|y\|_r \left\{ \lambda\left[b(1-\alpha)\sigma\right] + \right.$$

$$\left. + H(\varepsilon) \sum_{k\in\Gamma_1} (d+\varepsilon)^k \frac{\left(b(1-\alpha)\sigma\right)^k \lambda_k}{r-1} + H(\varepsilon) \sum_{k\in\Gamma_2} (d+\varepsilon)^k r^{n_k - \alpha k} \lambda_k \frac{\left(b(1-\alpha)\sigma\right)^k r}{r-1} \right\}. \quad (3.1)$$

Так как $\sigma < a_0$, то $\lambda\left[b(1-\alpha)\sigma\right] = 1 - 2h$, $h > 0$. По числу h подберем число R_1 и номер N_1 такие, что

$$H(\varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} (d+\varepsilon)^k \lambda_k \left(b(1-\alpha)\sigma\right)^k \leqslant \frac{h}{3},\ n \geqslant N_1;\ H(\varepsilon) \sum_{k\in\Gamma_1} \frac{(d+\varepsilon)^k \lambda_k \left(b(1-\alpha)\sigma\right)^k}{r-1} \leqslant \frac{h}{3}.$$

Тогда для $r \geqslant R_2(\varepsilon)$

$$H(\varepsilon) \sum_{k=N_1}^{\infty} (d+\varepsilon)^k \left(b(1-\alpha)\sigma\right)^k \lambda_k \left(1 + \frac{1}{r-1}\right) < \frac{h}{2},$$

и подавно

$$H(\varepsilon) \sum_{k=N_1, k\in\Gamma_2}^{\infty} (d+\varepsilon)^k \left(b(1-\alpha)\sigma\right)^k \lambda_k \frac{r}{r-1} < \frac{h}{2}, \quad r \geqslant R_2.$$

Пусть $\gamma = \min\limits_{\substack{k\in\Gamma_2,\\ 1\leqslant k\leqslant N_1-1}} \{\alpha k - n_k\}$. Очевидно, что $\gamma > 0$, и

$$H(\varepsilon) \sum_{\substack{k\in\Gamma_2,\\ 1\leqslant k\leqslant N_1-1}} (d+\varepsilon)^k r^{n_k - \alpha k} \lambda_k \left(b(1-\alpha)\sigma\right)^k \frac{r}{r-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^{1-\gamma}}{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left[(d+\varepsilon)\, b(1-\alpha)\sigma\right]^k < \frac{h}{3}$$

для $r \geqslant R_2$. Итак, для $r \geqslant R_3 = \max\{R_1, R_2, 1\}$

$$M(r, Ly) \leqslant \|y\|_r\, e^{\sigma r^{1-\alpha}} \left(1 - 2h + \frac{2}{3}h + \frac{h}{2}\right) = q_\sigma\, e^{\sigma r^{1-\alpha}}, \quad \|Ly\|_r \leqslant q_\sigma \|y\|_r, \quad (3.2)$$

где $q_\sigma < 1$ и не зависит от r и y.

Таким образом, Ly является оператором сближения в любом пространстве $W_{1-\alpha,\sigma}$, если $\sigma < a_0$.

п. 2. Оценка нормы оператора L позволит нам установить теорему существования и единственности решения уравнения (1.1) в классе E целых функций роста не выше, чем порядка $1-\alpha$ и типа $< a_0$.

Теорема 1.1. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнены условия а) и б*[1]). *Тогда для любой функции f из E уравнение* (1.1) *имеет единственное в E решение, причем порядок и тип решения совпадает с порядком и типом правой части.*

Доказательство. Пусть σ — любое число из промежутка $[0, a_0)$. Введем пространство $I_\sigma = W_{1-\alpha\ \sigma}$, с нормой

$$\| y \|_\sigma = \sup_{r \geqslant R_0(\sigma)} \left[M(r, y) \exp(-\sigma r^{1-\alpha}) \right],$$

где число $R_0(\sigma)$ выбрано настолько большим, чтобы неравенство (3.2) выполнялось для всех $y \in W_{1-\alpha,\sigma}$. По теореме 2.2 уравнение (1.1) имеет единственное решение в классе $A = \bigcup\limits_{0 \leqslant \sigma < a_0} I_\sigma$, если $f \in A$. Очевидно, что класс A совпадает с совокупностью всех целых функций роста ниже $[1-\alpha, a_0)$. Кроме того, по теореме 2.2 $\varphi(y) = \varphi(f)$. Но нетрудно проверить, что $w(z)$ является целой функцией порядка $1-\alpha$ и типа σ_1, $0 < \sigma_1 < a_0$, тогда и только тогда, когда $\varphi(w) = \sigma_1$; аналогично, $w(z)$ является целой функцией роста не выше $[1-\alpha, 0]$ тогда и только тогда, когда $\varphi(w) = 0$.

Итак, если $f \in E$, то уравнение (1.1) имеет единственное в E решение y; при этом, если f — целая функция порядка $1-\alpha$ и типа σ, $0 < \sigma < a_0$, то и y — целая функция порядка $1-\alpha$ и типа σ. Пусть теперь f — целая функция порядка $\rho < 1-\alpha$, $\rho = 1-\alpha-2h$, $h > 0$, и типа σ_2, $0 < \sigma_2 < \infty$. Введем пространства $I_\sigma = W_{\rho,\sigma}$ при фиксированном ρ и любом σ из $(0, \infty)$. В определении нормы в каждом I_σ

$$\| y \|_\sigma = \sup_{r \geqslant R_0(\sigma)} M(r, y) \exp(-\sigma r^\rho),$$

число $R_0(\sigma)$ выберем так, чтобы оператор L был оператором сжатия в I_σ:

$$\| Ly \|_\sigma \leqslant q_\sigma \| y \|_\sigma, \quad q_\sigma < 1.$$

По теореме 2.2 уравнение (1.1) имеет единственное решение в классе $A_\rho = \bigcup\limits_{0 < \sigma < \infty} I_\sigma$, состоящем из всех целых функций роста не выше, чем порядка ρ и конечного типа; при этом $\varphi(y_1) = \varphi(f) = \sigma_2$, и y_1 — целая функция порядка ρ и типа σ_2. Но так как $A_\rho \subset E$, если $\rho < 1-\alpha$, и в E решение уравнения единственно, то $y = y_1$, и решение в E имеет тот же порядок и тип, что и правая часть.

Предположим еще, что f — целая функция порядка $\rho_1 = 1-\alpha_1 < 1-\alpha$ и бесконечного типа. Если α_2 — любое число из интервала (α, α_1), то $f \in W_{1-\alpha_2, 0}$, и уравнение (1.1) имеет единственное решение y_1 в $A_{1-\alpha_2} = \bigcup\limits_{0 < \sigma < \infty} W_{1-\alpha_2,\sigma}$, если только число $R_0(\sigma)$ в нормировке каждого пространства $W_{1-\alpha_2,\sigma}$ выбрано настолько большим, что L будет оператором сближения в $W_{1-\alpha_2,\sigma}$. При этом $\varphi(y_1) = \varphi(f) = 0$, то-есть $y_1(x)$ — целая функция роста не выше $[1-\alpha_2, 0]$. Так как $A_{1-\alpha_2} \subset E$ и в E решение единственно, то $y_1 = y$ и y — целая функция роста не выше $[1-\alpha_2, 0]$. Но число α_2 можно взять как угодно близким к α_1; поэтому y – целая функция порядка не выше $1-\alpha_1$. Если бы $y(x)$ была целой функцией роста не выше, чем порядка $1-\alpha_1$, и конечного типа σ_0, то $y \in W_{1-\alpha_1, \sigma}$ при любом $\sigma > \sigma_0$; но тогда бы $Ly \in W_{1-\alpha_1, \sigma}$, так как L – оператор сжатия в $W_{1-\alpha_1, \sigma}$, и $f = y + Ly$ принадлежала бы $W_{1-\alpha_1, \sigma}$ при любом конечном $\sigma > \sigma_0$, что невозможно. Остается принять только, что $y(x)$ – целая функция порядка $1-\alpha_1$ и бесконечного типа.

Рассмотрим последний возможный случай, когда f – целая функция порядка $\rho \leqslant 1-\alpha$ и нулевого типа.

Так как $f \in W_{\rho, \sigma}$ при любом $\sigma > 0$ и Ly является оператором сжатия в $W_{\rho, \sigma}$, если $0 < \sigma < a_0$, то уравнение (1.1) имеет единственное решение y_1 в $A_\rho = \bigcup\limits_{0<\sigma<a_0} W_{\rho, \sigma}$, причем $\varphi(y_1) = \varphi(f) = 0$. Но $A_\rho \leqslant E$ и потому $y_1 = y$. Значит $\varphi(y) = 0$ и y – целая функция роста не выше $[\rho, 0]$. Если бы y оказалась целой функцией роста ниже, чем порядка ρ и нулевого типа, то $y \in W_{\rho_1, \sigma_1}$ при некотором $\rho_1 < \rho \leqslant 1-\alpha$ и $\sigma_1 < \infty$. Но тогда бы $Ly \in W_{\rho_1, \sigma_1}$ и $f = y + Ly \in W_{\rho_1, \sigma_1}$, что невозможно, так как $\rho_1 < \rho$. Поэтому y – целая функция порядка ρ и нулевого типа.

Отметим некоторые частные случаи доказанной теоремы. 1. Предположим, что точная верхняя грань α чисел $\frac{n_k}{k}$ не достигается ни при одном конечном $k \geqslant 1$ (это будет, например, всегда, если α – иррациональное число). Тогда уравнение (1.1) при условии

$$\varlimsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\sup_{0 \leqslant s \leqslant n_k} |a_s^k|} = c < \infty$$

имеет единственное решение в классе целых функций роста не выше, чем порядка $1-\alpha$ и типа $< \frac{1}{cb(1-\alpha)}$, если только правая часть принадлежит этому классу.

2. Предположим, что $c = 0$. В этом случае решение существует и единственно в классе целых функций роста не выше, чем порядка $1-\alpha$ и типа $< \frac{x_0}{(1-\alpha)b}$.

п. 3. В случае, если правая часть $f(x)$ является многочленом степени n, уравнение (1.1) имеет решение y_n – многочлен степени точно n. Это решение легко получить: записав искомое решение y_n в виде многочлена с неопределенными коэффициентами $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k^n x^k$, подставив его в уравнение и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x^m $(m = 0, 1, \ldots n)$, найдем b_k^n единственным образом из системы с верхней треугольной матрицей и единичными элементами по главной диагонали.

Если $f(x)$ – произвольная функция из класса E, то естественно в качестве приближенного решения взять многочленное решение y_n уравнения (1.1) с правой частью $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Мы покажем, что этот процесс приближенного решения сходится. Введем операторы

$$L_n y = \sum_{k=1}^{n} P_k(x)\, y^{(k)}(x), \qquad \tilde{L}_n y = \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)}(x).$$

Если $y \in I_\sigma = W_{1-\alpha,\sigma}$, где $\sigma < a_0$, то, оценивая нормы операторов $L_n \tilde{y}$ и $\tilde{L}_n y$, точно так же, как это было сделано в п. 1 для нормы оператора Ly, получим при любом $n \geqslant 1$

$$M(r, L_n y) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(r) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(r); \qquad M(r, \tilde{L}_r y) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k(r).$$

Но величина $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(r)$ оценивалась уже ранее (3.1); таким образом, приходим к такой оценке ($n \geqslant 1$):

$\| L_n y \|_r \leqslant q_\sigma \| y \|_r$, $r \geqslant R_0(\sigma)$, $R_0(\sigma)$ от n не зависит. Аналогично для $\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k(r)$ получаем оценку

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k(r) \leqslant \| y \|_r \exp(\sigma r^{1-\alpha}) \Bigg\{ \sum_{\substack{k \geqslant n+1,\\ k \in \Gamma_1}} | a_{\alpha k}^k | \lambda_k \Big(b(1-\alpha)\sigma\Big)^k +$$

$$+ \frac{H(\varepsilon)}{r-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big[(d+\varepsilon)\, b(1-\alpha)\sigma \Big]^k \lambda_k +$$

$$+ \frac{r}{r-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big[(d+\varepsilon)\, b(1-\alpha)\sigma \Big]^k \lambda_k H(\varepsilon)\, r^{n_k - \alpha k} \Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{q}_n(\sigma) \| y \|_r \exp(\sigma r^{1-\alpha}), \quad r \geqslant R_0(\sigma),$$

где

$$\tilde{q}_n(\sigma) = \sum_{k=n+1}^{\infty} | a_{\alpha k}^k | \lambda_k \Big[b(1-\alpha)\sigma \Big]^k + \frac{H(\varepsilon)\ (R_0+1)}{(R_0-1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \Big[(d+\varepsilon)\ b(1-\alpha)\sigma \Big]^k;$$

$$\tilde{q}_n(\sigma) \leqslant q_\sigma \quad \text{и} \quad \tilde{q}_n(\sigma) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Очевидно, что $L_n y$ и $\tilde{L}_n y$ являются операторами сближения в любом пространстве $W_{1-\alpha,\sigma}$ при всех $\sigma < a_0$ и $n \geqslant 1$.

Пусть теперь $f \in E$ и $\varphi(f) = \gamma$, $0 \leqslant \gamma < a_0$. Тогда $f \in I_\sigma$ при всех σ из (γ, a_0). По теореме 3.1 уравнение (1.1) имеет единственное решение y в E, причем $\varphi(y) = \gamma$ и, следовательно, $y \in I_\sigma$ если $\sigma \in (\gamma, a_0)$.

Рассмотрим „урезанное" уравнение

$$y + L_n y = f_n(x), \tag{3.3}$$

предполагая, что $f_n \in E$ и что $\varphi(f_n) \leqslant \gamma$. Это уравнение имеет по теореме 2.2 единственное решение y_n и в E, причем $\varphi(y_n) = \varphi(f_n) \leqslant \gamma$ и $y_n \in I_\sigma$, если $\sigma > \gamma$.

Функция $Z_n = y - y_n$, где y – решение полного уравнения (1.1), принадлежит $I_\sigma \subset E$ при всех σ из (γ, a_0) и удовлетворяет уравнению

$$W + L_n W = f - f_n - \tilde{L}_n y.$$

Так как $f - f_n - \tilde{L}_n y \in I_\sigma$ при $\sigma > \gamma$, то последнее уравнение по теореме 2.2 имеет единственное в E решение, которое должно совпадать с Z_n. Для нормы решения Z_n в любом пространстве I_σ, $\sigma \in (\gamma, a_0)$, имеем согласно теореме Банаха о сжатом отображении [6]

$$\| Z_n \|_\sigma \leqslant \frac{\| f - f_n - \tilde{L}_n y \|_\sigma}{1 - q(\sigma)} \leqslant \frac{\| f - f_n \|_\sigma}{1 - q(\sigma)} + \frac{\| \tilde{L}_n y \|_\sigma}{1 - q(\sigma)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\| f - f_n \|_\sigma}{1 - q(\sigma)} + \frac{\tilde{q}_n(\sigma) \| y \|_\sigma}{1 - q(\sigma)} \leqslant \frac{\| f - f_n \|_\sigma}{1 - q(\sigma)} + \frac{\tilde{q}_n(\sigma) \| f \|_\sigma}{[1 - q(\sigma)]^2}, \quad q(\sigma) = q_\sigma.$$

Из последней оценки видно, что если $\| f - f_n \|_\sigma \to 0$ при $n \to \infty$, то $\| Z_n \|_\sigma \to 0$, то-есть, $\sup\limits_{r \geqslant R_0(\sigma)} M(r, y - y_n) \exp(-\sigma r^{1-\alpha}) \to 0$ при $n \to \infty$, и последовательность y_n сходится к y равномерно во всей плоскости с весом $\exp(\sigma r^{1-\alpha})$ (и, подавно, равномерно в любой ограниченной области).

Положим $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$. Напомним сначала один факт, относящийся к произвольным весовым пространствам целых функций (лемма 4 из [4]). Пусть $S - B$ – пространство целых функций y с метрикой $\| y \| = \sup\limits_{r \geqslant R_0} \frac{M(r, y)}{\psi(r)}$, где $\psi(r)$ – некоторая положительная неубывающая функция, конечная при любом $r < \infty$. Тогда, если относительно целой функции $g(x)$ известно, что $g(\Theta x) \in S$ при некотором $\Theta > 1$, то последовательность $g_n(x)$ частных сумм функции g сходится к g в метрике S.

Применим эту лемму к пространству $S = I_\sigma$, $\sigma > \gamma$. Положим $\sigma_1 = (\gamma^{1-\alpha} \sigma)^{\frac{1}{2-\alpha}}$. Очевидно, что $\gamma < \sigma_1 < \sigma$, и $f \in I_{\sigma_1}$. Если принять $\Theta = \frac{\sigma_1}{\gamma}$, то $\Theta > 1$ и при $r \geqslant R_0(\sigma)$

$$\frac{M(r, f(\Theta x))}{\exp \sigma r^{1-\alpha}} = \frac{M(\Theta r, f(x))}{\exp \sigma r^{1-\alpha}} = \frac{M(\Theta r, f)}{\exp \sigma_1 (\Theta r)^{1-\alpha}} \cdot \frac{\exp \sigma_1 (\Theta r)^{1-\alpha}}{\exp \sigma r^{1-\alpha}} =$$
$$= \frac{M(\Theta r, f)}{\exp \sigma_1 (\Theta r)^{1-\alpha}} \leqslant \sup_{r \geqslant \Theta R_0(\sigma)} \frac{M(r, f)}{\exp \sigma_1 r^{1-\alpha}} \leqslant \sup_{r \geqslant R_0(\sigma)} \frac{M(r, f)}{\exp \sigma_1 r^{1-\alpha}} < \infty,$$

и

$$f(\Theta x) \in I_\sigma.$$

На основании леммы 4 из [4] $\| f_n - f \|_\sigma \to 0$, если $\sigma > \gamma$, и, следовательно, $\| y_n - y \|_\sigma \to 0$.

Таким образом, теорему 3.1 можно дополнить таким утверждением.

Теорема 3.2. *Если f_n — n-я частная сумма тейлоровского разложения функции f из E, а y_n — полиномиальное решение урезанного уравнения (3.3), то $y_n \to y$ равномерно в любой ограниченной области; более того, $y_n \to y$ равномерно во всей плоскости с весом $\exp \sigma r^{1-\alpha}$, где σ – любое число, большее, чем $\varphi(f)$ (в частности, если f – функция из класса $[1-\alpha, \delta]$, $\delta < a_0$, то можно положить $\sigma = \delta + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и сколь угодно мало).*

Замечание. Если $f(x)$ – функция более низкого роста (порядка $\rho < 1 - \alpha$), то, привлекая пространства $W_{\rho, \alpha}$, можно установить в этом случае более быструю сходимость $y_n(x)$ к решению $y(x)$: именно, если f – функция класса $[\rho, \sigma]$, $\rho < 1-\alpha$, $\sigma < \infty$, то $y_n \to y$ равномерно во всей плоскости с весом $\exp(\sigma+\varepsilon) r^\rho$, и если f – целая функция порядка ρ и бесконечного типа, то $y_n \to y$ равномерно с весом $\exp r^{\rho+\varepsilon}$, где (в обоих случаях) число $\varepsilon > 0$ можно взять как угодно малым.

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

п. 1. Рассмотрим уравнение (1.5) при условиях а) и б[1]). Заметим, прежде всего, что это уравнение имеет полиномиальное решение $y_0(x)$ степени, равной степени m многочлена $P_0(x)$; это решение найдется указанным в предыдущем параграфе способом как решение „урезанного" уравнения

$$y + \sum_{k=1}^{m} P_k(x)\, y^{(k)}(x) = P_0(x).$$

Из теоремы 3.1 следует, что решение $y_0(x)$ единственно в классе E. Обозначим через E_1 класс целых функций роста ниже

$$\left[1-\alpha,\ \frac{1}{c(1-\alpha)e}\right).$$

Исследуем свойства трансцендентных целых решений (сокращённо т.ц.р.) уравнения (1.5) из класса E_1. $\left(\text{Заметим, что } E \subset E_1 \text{ во всяком случае для } \frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1.\right)$

Если $y \in E_1$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} r^{\alpha-1} \ln M(r) \leqslant \left[e(1-\alpha)\,(d+3\varepsilon)\right]^{-1},$$

где $\varepsilon > 0$, и для достаточно больших r, $r \geqslant r_1 > 1$ в силу (2.5) и (2.6)

$$\frac{w(r)}{r} \leqslant \frac{r^{-\alpha}\, e(1-\alpha)}{e(1-\alpha)\,(d+2\varepsilon)} = \alpha(r).$$

Если $H(\varepsilon) = \sup\limits_{k\geqslant 1} d_k (d+\varepsilon)^{-k}$, то, используя (2.4). найдем

$$\alpha_k(r) = \max_{|x|=r} \left| P_k(x)\, y^{(k)}(x) \right| \leqslant H(\varepsilon)\,(d+\varepsilon)^k \lambda_k \left[\alpha(r)\right]^k M(r)\, r^{n_k} \frac{r}{r-1} \leqslant$$

$$\leqslant H_1(\varepsilon) \left(\frac{d+\varepsilon}{d+2\varepsilon}\right)^k \lambda_k M(r); \quad \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(r) < \eta\, M(r), \quad r \geqslant r_1, \quad n \geqslant N(\eta).$$

Таким образом, ряд $Ly \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)}(x)$ сходится регулярно в любой ограниченной области, какова бы ни была функция y из E_1. Кроме того,

$$M(r,\, Ly) \leqslant B\, M(r), \quad r \geqslant r_1, \quad \text{и} \quad Ly \in E_1.$$

Пусть теперь $y(x)$ – трансцендентное целое решение уравнения (1.5) из E_1. Возьмем любое обыкновенное $r \geqslant r_1$ и точки x_r, $|x_r| = r$, в которой $|y(x_r)| = M(r)$.

Пусть δ — сколь угодно малое положительное число. Выберем число $N_1 = N_1(\delta)$ так, чтобы $\sum_{k=N_1}^{\infty} \alpha_k(r) < \frac{\delta}{3} M(r)$ для всех $r \geqslant r_1$, и возьмем любое фиксированное число $n \geqslant N_1$. Тогда в точке x_r

$$\beta(r) = \frac{\left| y(x_r) + \sum_{k=1}^{n} P_k(x_r)\, y^{(k)}(x_r) \right|}{M(r)} \leqslant \frac{|P_0(x_r)|}{M(r)} + \frac{\delta}{3} < \frac{2}{3}\,\delta,$$

если $r \geqslant r_2(\delta) > r_1$, и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \beta(r) \leqslant \frac{2}{3}\,\delta. \tag{4.1}$$

Обозначим величину $(x_r)^{\alpha-1}\,\nu(r)$ через $l(r)$ и исследуем подробнее функцию $\beta(r)$. По формуле (1.2)

$$y^{(j)}(x_r) = y(x_r)\left[1 + \varepsilon_j(r)\right]\left(\nu(r)\right)^j (x_r)^{-j}.$$

Очевидно, что $P_k(x) = a_{n_k}^k\, x^{n_k}\left[1 + \gamma_k(x)\right]$, где $\gamma_k(x) \to 0$, при $x \to \infty$. Тогда

$$\beta(r)\, M(r) = \left| y(x_r) + \sum_{k=1}^{n} a_{n_k}^k\, y(x_r)\, x_r^{n_k - \alpha k}\left[l(r)\right]^k \left(1 + \tilde{\varepsilon}_k(r)\right) \right|;$$

$$\beta(r) = \left| 1 + \sum_{k=1}^{n}{}' a_{n_k}^k \left[l(r)\right]^k + \sum_{k=1}^{n}{}'' a_{n_k}^k\, x_r^{n_k-\alpha k}\left[l(r)\right]^k + \sum_{k=1}^{n} a_{n_k}^k\, x_r^{n_k-\alpha k}\left[l(r)\right]^k \tilde{\varepsilon}_k(r) \right|.$$

Здесь знаком $'$ обозначено суммирование по тем k, для которых $n_k = \alpha k$, и знаком $''$ — по тем k, для которых $n_k < \alpha k$.

Заметим, что в силу (2.5) — (2.6) и того факта, что $y \in E_1$, $\overline{\lim_{r\to\infty}}\, |l(r)| < \frac{1}{c}$, и функция $l(r)$ ограничена при всех $r \geqslant r_1$.

Пусть r_i — неограниченно возрастающая последовательность обыкновенных значений такая, что $\lim_{i\to\infty} l(r_i) = t$, где t — один из частичных пределов (при $r \to \infty$) функции $l(r)$. При любом фиксированном $n \geqslant N_1$ имеем

$$\overline{\lim_{\substack{r\to\infty,\\ r\in\{R\}}}} \sum_{k=1}^{n} |a_{n_k}^k|\, |r^{n_k-\alpha k}|\, |l(r)|^k\, |\tilde{\varepsilon}_k(r)| \leqslant \overline{\lim_{\substack{r\to\infty,\\ r\in\{R\}}}} \sum_{k=1}^{n} |a_{n_k}^k|\, |l(r)|^k |\tilde{\varepsilon}_k(r)| = 0,$$

$$\overline{\lim_{\substack{r\to\infty,\\ r\in\{R\}}}} \sum_{k=1}^{n}{}'' |a_{n_k}^k|\, |x_r|^{n_k-\alpha k}\, |l(r)|^k \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\tau} \sum_{k=1}^{n} |a_{n_k}^k|\, |l(r)|^k = 0,$$

где $\tau = \inf\,[\alpha k - n_k]$ по тем $k \leqslant n$, для которых $n_k < \alpha k$. Учитывая (4.1), получаем

$$\lim_{i\to\infty} \beta(r_i) = \left| 1 + \sum_{k=1}^{n}{}' a_{\alpha k}^k\, t^k \right| \leqslant \frac{2}{3}\,\delta < \delta, \qquad n \geqslant N_1(\delta).$$

Используя то, что число $\delta > 0$ можно выбрать как угодно малым, приходим к следующему выводу:

Теорема 4.1. *Если $y(x)$ — трансцендентное целое решение уравнения* (1.5) *из* E_1, *то любой частичный предел функции* $l(r)=\nu(r)\ (x_r)^{\alpha-1}$ *при* $r\to\infty$, $r\in\{R\}$, *является корнем функции*

$$a(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \ a_{\alpha k}^{k}\, x^{k}.$$

Следствие. Если γ_0 — модуль ближайшего к началу координат нуля функции $a(x)$, то $\varliminf\limits_{\substack{r\to\infty,\\ r\in\{R\}}} \nu(r)\, r^{\alpha-1} \geqslant \min\left\{\gamma_0,\ \frac{1}{c}\right\}=\gamma_1$.

Покажем теперь, что $\varliminf\limits_{r\to\infty} \nu(r)\, r^{\alpha-1}\geqslant\gamma_1$. Для этого достаточно доказать, что для любой последовательности исключительных значений $\{r_k\}$, $r_k\uparrow\infty$, $\varliminf\limits_{k\to\infty} \nu(r_k)\, r_k^{\alpha-1}\geqslant\gamma_1$. Действительно, для любого r_k найдем обыкновенные значения R_k, R_k' — концы исключительного интервала, содержащего r_k: $R_k<r_k<R_k'$. При этом, как известно, $R_k'=R_k\left(1+o_k(1)\right)$, $o_k(1)\to0$ при $k\to\infty$. Тогда

$$\nu(r_k) r_k^{\alpha-1}\geqslant\nu(R_k)\ (R_k')^{\alpha-1}=\nu(R_k)\ R_k^{\alpha-1}\left(1+o_k(1)\right)^{\alpha-1}$$

и

$$\varliminf_{k\to\infty} \nu(r_k)\, r_k^{\alpha-1}\geqslant \varliminf_{k\to\infty} \nu(R_k)\, R_k^{\alpha-1}\left(1+o_k(1)\right)^{\alpha-1}=\varliminf_{k\to\infty} \nu(R_k)\, R_k^{\alpha-1}\geqslant\gamma_1.$$

Применяя лемму 1 из § 2, получаем такой результат:

Теорема 4.2. *Если $y(x)$ — трансцендентное целое решение уравнения* (1.5) *из* E_1, *то*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{1-\alpha}} \geqslant \frac{\gamma_1}{1-\alpha}. \tag{4.1}$$

Заметим, что если α иррационально, то $\alpha(x)\equiv1$, и теорема 4.1 в этом случае утверждает, что в классе E_1 нет трансцендентных целых решений уравнения (1.5). Кроме того, если α рационально и в круге $|x|<\frac{1}{c}$ содержится хоть один корень функции $a(x)$ (тогда $\gamma_1=\gamma_0$), то можно показать, что для такого уравнения всегда найдется нетривиальное целое трансцендентное решение, у которого $\varliminf\limits_{r\to\infty} \ln M(r)\, r^{\alpha-1}=\frac{\gamma_1}{1-\alpha}$.

п. 2. Исследуем теперь более подробно предельные свойства функции $l(r)$, предполагая, что α — рациональное число, $\alpha=\frac{p}{q}$, $p<q$.

Теорема 4.3. *Пусть $y(x)$ — т.ц.р. уравнения* (1.5) *из* E_1. *Тогда по любому* $\varepsilon>0$ *можно указать такое* $R_0(\varepsilon)$, *что для любого обыкновенного* $r>R_0(\varepsilon)$ *найдется корень* $\alpha_r(\varepsilon)$ *функции* $a(x)$ *такой, что*

$$\left|\, l(r)-\alpha_r(\varepsilon)\,\right|<\varepsilon. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть $s(r)=\inf|l(r)-\alpha|$ по всем нулям α функции $a(x)$. Если теорема неверна, то для некоторого $\varepsilon_0>0$ и неограниченно возрастающей последовательности обыкновенных r_k $s(r_k)\geqslant\varepsilon_0$ и подавно $|l(r_k)-\alpha|\geqslant\varepsilon_0$ для всех нулей α и для $k=1, 2, \ldots$ Из ограниченной последовательности $l(r_k)$ извлекаем сходящуюся подпоследовательность $l(\tilde r_k)$.

По теореме 4.1 $\lim\limits_{k\to\infty} l(\tilde{r}_k)=\tilde{\alpha}$ — корень $a(x)$, и для $k>K_0$ $|l(\tilde{r}_k)-\tilde{\alpha}|<\varepsilon_0$ и подавно $s(\tilde{r}_k)<\varepsilon_0$, что невозможно.

Отметим, что из (4.3) следует при $r>R_0(\varepsilon)$

$$\Big|\,|l(r)|-|\alpha_r(\varepsilon)|\,\Big|=\Big|\,\nu(r)\,r^{\alpha-1}-|\alpha_r(\varepsilon)|\,\Big|<\varepsilon. \tag{4.4}$$

Исследуем свойства функции $\alpha_r(\varepsilon)$ при возрастании r, когда $\varepsilon>0$ — фиксированное достаточно малое число.

Так как $y\in E_1$, то

$$l_1=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,|l(r)|<\frac{1}{c},\quad l_1=\frac{1}{c}-2\eta_0,\quad \eta_0>0.$$

В круге I: $|x|\leqslant\frac{1}{c}-\eta_0$ содержится конечное число нулей α функции $a(x)$. Всегда можно указать числа h и q такие, что

$$h>0,\quad 0<q<1,\quad \text{и}\quad |\alpha_1|-|\alpha_2|\geqslant h,\quad \frac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|}\leqslant q$$

для любых корней α_1 и α_2 в круге I таких, что $|\alpha_2|>|\alpha_1|$ (числа h и q одни и те же для всех нулей в этом круге). Для $r\geqslant R_2$

$$|l(r)|\leqslant l_1+\frac{\eta_0}{2}=\frac{1}{c}-\eta_0-\frac{\eta_0}{2}.$$

Возьмем числа $h_1\in(0,\ h)$ и $q_1\in(q,\ 1)$. По этим числам h_1 и q_1 можно указать такое ε_1, что при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$

$$|\alpha_2|-|\alpha_1|\geqslant h_1+2\varepsilon;\quad |\alpha_1|+\varepsilon\leqslant q_1\,(\,|\alpha_2|-\varepsilon) \tag{4.5}$$

для всех корней α_1 и α_2 в I таких, что $|\alpha_1|<|\alpha_2|$. Возьмем теперь любое фиксированное ε из интервала $(0,\ \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2=\min\left\{\frac{\eta_0}{2},\ \varepsilon_1\right\}$, и рассмотрим свойства функции $|\alpha_r(\varepsilon)|$.

1. Для обыкновенных

$$r\geqslant R_3=\max\left\{R_2,\ R_0(\varepsilon)\right\}\quad \alpha_r(\varepsilon)\in I:$$

действительно, при таких r

$$|\alpha_r(\varepsilon)|<|l(r)|+\varepsilon\leqslant\frac{1}{c}-\frac{3}{2}\,\eta_0+\varepsilon\leqslant\frac{1}{c}-\eta_0.$$

2. Функция $\alpha_r(\varepsilon)$, если рассматривать ее только для обыкновенных значений r, не убывает при $r\geqslant R_3$.

Для доказательства возьмем любое обыкновенное $r\geqslant R_3$ и произвольное $r_1\in\{R\}\cap(r,\ rb)$, где $b=(q_1)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $b>1$. Имеем в силу (4.4)

$$|\alpha_r(\varepsilon)|<\nu(r)\,r^{\alpha-1}+\varepsilon;\quad \Big(|\alpha_r(\varepsilon)|-\varepsilon\Big)\,r^{1-\alpha}<\nu(r);$$

$$|\alpha_{r_1}(\varepsilon)|>\nu(r_1)\,r_1^{\alpha-1}-\varepsilon;\quad \nu(r_1)<\Big(|\alpha_{r_1}(\varepsilon)|+\varepsilon\Big)\,r_1^{1-\alpha}<\Big(|\alpha_{r_1}(\varepsilon)|+\varepsilon\Big)\,b^{1-\alpha}\,r^{1-\alpha}.$$

Если бы $|\alpha_{r_1}(\varepsilon)|<|\alpha_r(\varepsilon)|$, то, так как оба корня лежат в I,

$$|\alpha_{r_1}(\varepsilon)|+\varepsilon\leqslant q_1\Big(|\alpha_r(\varepsilon)|-\varepsilon\Big),$$

$$\nu(r_1)<q_1\,b^{1-\alpha}\,r^{1-\alpha}\Big(|\alpha_r(\varepsilon)|-\varepsilon\Big)<\nu(r),$$

и $\nu(r_1)<\nu(r)$, что невозможно, если $r_1>r$.

Итак, для любого обыкновенного $r \geqslant R_3$ и для любого фиксированного положительного $\varepsilon < \varepsilon_2$

$$|\alpha_r(\varepsilon)| \leqslant |\alpha_{r_1}(\varepsilon)|, \quad \text{если} \quad r_1 \in [r, rb] \cap \{R\}.$$

Возьмем какое нибудь фиксированное b_1 из $(0, b)$. Число R_3 можно выбрать настолько большим, чтобы в любом интервале $(\rho b_1, \rho b)$, где $\rho \geqslant R_3$, всегда нашлось хотя бы одно обыкновенное значение. Пусть $r_2 \in [rb_1, rb] \cap R$. Тогда по доказанному $|\alpha_r(\varepsilon)| \leqslant |\alpha_{r_2}(\varepsilon)|$. Кроме того, $|\alpha_{r_2}(\varepsilon)| \leqslant |\alpha_{r_3}(\varepsilon)|$, если $r_3 \in [r_2, r_2 b] \cap \{R\}$. Но тогда $|\alpha_r(\varepsilon)| \leqslant |\alpha_{r_1}(\varepsilon)|$, если $r_1 \in [r, r_2 b] \cap \{R\}$ и подавно, если $r_1 \in [r, rb_1 b] \cap \{R\}$. В интервале $(rb_1^2, rb_1 b)$ найдется обыкновенное значение r_4, причем $|\alpha_{r_4}(\varepsilon)| \leqslant |\alpha_{r_5}(\varepsilon)|$, если $r_5 \in [r_4, r_4 b] \cap \{R\}$. Отсюда $|\alpha_r(\varepsilon)| \leqslant |\alpha_{r_1}(\varepsilon)|$, если $r_1 \in [r, rb_1^2 b] \cap \{R\}$, и так далее. Следовательно, $|\alpha_r(\varepsilon)| \leqslant |\alpha_{r_1}(\varepsilon)|$ для любого конечного обыкновенного $r_1 \geqslant r$, и свойство 2 доказано.

Заметим, что функция $|\alpha_r(\varepsilon)|$ при $r \geqslant R_3(\varepsilon_2)$ и $\varepsilon < \varepsilon_2$ может принимать только конечное число значений (не более p). При этом, если в круге I лежит Q нулей $a(x)$, то $p \leqslant Q$, причем если хоть на одной окружности $|x| = \rho$, $\rho < \frac{1}{c} - \eta_0$, лежит не менее двух нулей $a(x)$, то $p < Q$. Из неубывания функции $|\alpha_r(\varepsilon)|$ (при фиксированном $\varepsilon < \varepsilon_2$) следует в таком случае, что $|\alpha_r(\varepsilon)| = \text{const}$ для всех достаточно больших r.

Итак, для любого $\varepsilon < \varepsilon_2$ можно указать такое $R(\varepsilon)$, что для всех обыкновенных $r > R(\varepsilon)$

$$\big|\, |l(r)| - |\alpha_\varepsilon| \,\big| < \varepsilon,$$

где $|\alpha_\varepsilon|$ — модуль одного из нулей $a(x)$ в круге I.

Возьмем теперь два положительных числа ε_4 и ε_3 из интервала $(0, \varepsilon_2)$. Если бы $|\alpha_{\varepsilon_4}| \neq |\alpha_{\varepsilon_3}|$, то для любого обыкновенного $r > \max\{R(\varepsilon_4), R(\varepsilon_3)\}$

$$\big|\, |l(r)| - |\alpha_{\varepsilon_4}| \,\big| < \varepsilon_4; \qquad \big|\, |l(r)| - |\alpha_{\varepsilon_3}| \,\big| < \varepsilon_3,$$

откуда

$$\big|\, |\alpha_{\varepsilon_4}| - |\alpha_{\varepsilon_3}| \,\big| < \varepsilon_4 + \varepsilon_3 < 2\varepsilon_2.$$

Если для определенности

$$|\alpha_{\varepsilon_3}| > |\alpha_{\varepsilon_4}|, \text{ то } |\alpha_{\varepsilon_3}| - |\alpha_{\varepsilon_4}| < 2\varepsilon_2,$$

что противоречит неравенству (4.5):

$$|\alpha_{\varepsilon_3}| - |\alpha_{\varepsilon_4}| \geqslant h_1 + 2\varepsilon_1 \geqslant h_1 + 2\varepsilon_2 > 2\varepsilon_2.$$

Итак, $|\alpha_{\varepsilon_4}| = |\alpha_{\varepsilon_3}| = |\alpha_0|$, и, таким образом, для любого ε из $(0, \varepsilon_2)$ можно указать такое $R(\varepsilon)$, что для всех обыкновенных $r > R(\varepsilon)$

$$\big|\, |l(r)| - |\alpha_0| \,\big| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, если $y(x)$ — т.ц.р. из E_1, а r_k — произвольная неограниченно возрастающая последовательность обыкновенных значений, то $\nu(r_k)\, r_k^{\alpha-1} \to |\alpha_0|$, где α_0 — корень функции $a(x)$, причем $|\alpha_0|$ не зависит от выбора последовательности r_k.

Пусть теперь r_k — произвольная последовательность исключительных значений, $r_k \uparrow \infty$. Находим, как раньше, две последовательности обыкновенных значений R_k и R'_k так, чтобы

$$R_k < r_k < R'_k, \quad R'_k = R_k\Big(1 + o_k(1)\Big).$$

Тогда

$$R_k^{\alpha-1}\nu(R_k)\Big(1+o_k(1)\Big)^{\alpha-1} \leqslant \nu(R_k)\ (R'_k)^{\alpha-1} \leqslant \nu(r_k)\ r_k^{\alpha-1} \leqslant \nu(R'_k)\ R_k^{\alpha-1} =$$

$$= \nu(R'_k)\ (R'_k)^{\alpha-1}\Big(1+o_k(1)\Big)^{1-\alpha}.$$

Но

$$\lim_{k\to\infty} \nu(R_k)\ R_k^{\alpha-1}\Big[1+o_k(1)\Big]^{\alpha-1} = \lim_{k\to\infty} \nu(R'_k)\ (R'_k)^{\alpha-1}\Big[1+o_k(1)\Big]^{1-\alpha} = |\alpha_0|,$$

и, следовательно, $\nu(r_k)\ r_k^{\alpha-1} \to |\alpha_0|$. Итак, справедлива

Теорема 4.4. *Если* $y(x)$ *т.ц.р. уравнения* (1.5) *из* E_1, *то существуют*

$$\lim_{r\to\infty} \nu(r)\ r^{\alpha-1} = |\gamma|, \quad \lim_{r\to\infty} \ln M(r)\ r^{\alpha-1} = \frac{|\gamma|}{1-\alpha},$$

где γ — *один из корней* $a(x)$ *в круге I.*

п. 3. Вернемся теперь к оценке (4.3). Как мы установили, для любого ε из $(0, \varepsilon_2)$ и любого обыкновенного $r > R(\varepsilon)$

$$\Big|\, l(r) - \alpha_r(\varepsilon)\,\Big| < \varepsilon, \tag{4.6}$$

где $\alpha_r(\varepsilon)$ — один из нулей $a(x)$, лежащий на окружности $|x| = |\alpha_0| = A$, где A не зависит от ε и r. Тогда $\alpha_r(\varepsilon) = A \exp i\varphi_\varepsilon(r)$, где $\varphi_\varepsilon(r)$ принимает одно из s дискретных значений, $1 \leqslant s \leqslant p$ (если только один нуль $a(x)$ лежит на окружности $|x| = A$, то обязательно $s = 1$; в общем случае s не превосходит числа нулей $a(x)$ на окружности $|x| = A$). Неравенство (4.6) перепишется так

$$\Big|\,\nu(r)\ r^{\alpha-1} \exp i(\alpha-1) \arg x_r - A \exp i\,\varphi_\varepsilon(r)\,\Big| < \varepsilon,$$

или

$$\Big|\,\nu(r)\ r^{\alpha-1} - A + A - A \exp i\Big[\varphi_\varepsilon(r) + (1-\alpha)\arg x_r\Big]\,\Big| < \varepsilon,$$

откуда

$$\Big|\, 1 - \exp i\Big[\varphi_\varepsilon(r) + (1-\alpha)\arg x_r\Big]\Big| < \frac{1}{A}\Big(\varepsilon + \Big|\nu(r)\ r^{\alpha-1} - A\Big|\Big) < \frac{2\varepsilon}{A}. \tag{4.7}$$

Пусть $\varphi_\varepsilon(r) + (1-\alpha)\arg x_r = 2m\pi + \eta$, где $|\eta| < \pi$, а $|m|$ — целое число или нуль. Тогда из (4.7)

$$|1 - \exp i\eta| < \frac{2\varepsilon}{A}; \quad 1 - \cos\eta < \frac{2\varepsilon}{A}; \quad \cos\eta > 1 - \frac{2\varepsilon}{A} > 0,$$

и η лежит в первой или в четвертой четверти. Поэтому

$$|\sin\eta| = \sin|\eta| < \frac{2\varepsilon}{A}; \quad |\eta| < \frac{\pi\varepsilon}{A},$$

так как $|x| \leqslant \frac{2}{\pi} \sin|x|$ при всех $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Аргументы $\varphi_\varepsilon(r)$ и $\arg x_r$ можно при любом $r > R(\varepsilon)$ выбирать так, чтобы $|\varphi_\varepsilon(r)| < \pi$ и $|\arg x_r| < \pi$ (то-есть берем наименьшие по абсолютной величине значения аргументов). Тогда

$$2|m|\pi < \pi + (1-\alpha)\pi + \frac{\pi\varepsilon}{A}; \quad |m| < \frac{2-\alpha}{2} + \frac{\varepsilon}{2A} < 1,$$

и единственное возможное значение для $m = m_\varepsilon(r)$ при любом $r > R(\varepsilon)$ равно нулю. Отсюда

$$\left| \arg x_r - \frac{\varphi_\varepsilon(r)}{\alpha - 1} \right| < \frac{\varepsilon\pi}{A(1-\alpha)}$$

и аргумент точки x_r, в которой $|y(x_r)| = M(r)$, асимптотически стремится при $r \to \infty$ к s определенным числам. В соединении с теоремой 4.4 мы получаем следующий результат, итоговый для этого параграфа.

Теорема 4.5. *Всякое трансцендентное целое решение уравнения* (1.5) *из* E_1 *является экспоненциальной звездной функцией. При этом*

$$\lim_{r\to\infty} r^{\alpha-1} \nu(r) = \gamma_0, \quad \lim_{r\to\infty} r^{\alpha-1} \ln M(r) = \frac{\gamma_0}{1-\alpha},$$

где γ_0 *— модуль одного из нулей функции* $1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{\alpha k}^k x^k$.

§ 5. ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ

п. 1. Валирон показал [7], что если $y(x)$ — целое решение уравнения с постоянными коэффициентами $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)} = 0$ и характеристическая функция этого уравнения принадлежит классу $[1, \infty)$, то $\underline{\lim}_{r\to\infty} r^{-1} \ln M(r) > 0$; кроме того, если решение $y(x)$ является экспоненциальной функцией, то $\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r} \geqslant U_0$, где U_0 — модуль ближайшего к началу координат нуля функции $\omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Отправляясь от метода работы [7], мы обобщим результат Валирона, рассмотрев уравнение (1.5) при условиях а) и б). Легко видеть, что условие б) равносильно следующему (в обозначениях п. 1 § 3):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\, c_n} = \sigma < \infty.$$

Пусть $y(x)$ — т.ц.п. уравнения (1.5) и

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} r^{\alpha-1} \ln M(r) = E.$$

Тогда для некоторой последовательности чисел $\tilde{r}_q$

$$(\tilde{r}_q)^{\alpha-1} \ln M(\tilde{r}_q) < E + \delta, \quad \delta > 0.$$

Если $Q\tilde{r}_q \leqslant r \leqslant \tilde{r}_q$, где $0<Q<1$, $q=1, 2, \ldots$
то

$$r^{\alpha-1}\ln M(r) < \ln M(\tilde{r}_q)\,(\tilde{r}_q)^{\alpha-1}\,Q_1^{1-\alpha} < Q_1^{1-\alpha}(E+\delta)=E_1;\quad Q_1=Q^{-1}.$$

Если положить $r_q=Q\tilde{r}_q$, то на последовательности отрезков

$$[r_q,\ Q_1 r_q]\quad r^{\alpha-1}\ln M(r)\leqslant E_1.$$

Но, как было показано в п. 2. § 2, для $r\geqslant R_0$ и $h>0$

$$w(r)\ln\left(1+\frac{h}{r}\right)\leqslant \ln M(r+h).$$

Без ограничения общности можно считать, $R_0<r_1<r_2<\cdots$ Если

$$Q<\exp\left(-\frac{1}{1-\alpha}\right),\quad \text{то}\quad Q_1>\exp\frac{1}{1-\alpha}=1+D.$$

Пусть

$$\Lambda_k=[r_k,\ Q_1 r_k],\quad \Lambda_k'=[r_k,\ Q_1\, e^{\frac{1}{\alpha-1}}\, r_k],\quad k=1, 2, \ldots$$

Возьмем любое $r\in\Lambda_k'$ и $h=rD$. Тогда $r_k\leqslant r+h\leqslant Q_1 r_k$ и $r+h\in\Lambda_k$. Но тогда

$$\ln M(r+h)\leqslant E_1(r+h)^{1-\alpha}=E_2\, r^{1-\alpha},\quad E_2=e\,E_1.$$

Итак, если $r\in\Lambda_k'$, то

$$w(r)\leqslant\frac{E_2\, r^{1-\alpha}}{\ln(1+D)}=E_3\, r^{1-\alpha},\quad E_3=E_2(1-\alpha).$$

Возьмем какое-нибудь $D_1>1+\sigma$. Для всех $r\geqslant R_5$

$$r+D_1 r^{\alpha}<\lambda r,\quad \text{где}\quad \lambda=1+\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

Рассмотрим отрезки $\tilde{\Lambda}_k=\left[r_k,\ \frac{Q_1}{\lambda}\, e^{\frac{1}{\alpha-1}}\, r_k\right]$. Очевидно, что если $r\in\tilde{\Lambda}_k$, то $r+D_1 r^{\alpha}\in\Lambda_k'$ при всех достаточно больших k. Оценим теперь $M(r,\ y^{(n)})=M(r,\ n)$, если $r\in\tilde{\Lambda}_k$:

$$M(r,\ n)\leqslant n!\ h^{-n}\, M(r)\exp\int_r^{r+h}\frac{w(u)}{u}\,du.$$

Если положить $h=D_1 r^{\alpha}$, то $r+h\in\Lambda_k'$, и

$$M(r,\ n)\leqslant D_1^{-n}\, r^{-\alpha n}\, n!\ M(r)\exp E_3\int_r^{r+h}u^{-\alpha}\,du.$$

Оценивая выражение

$$\lambda(r)=\int_r^{r+h}u^{-\alpha}\,du=\frac{r^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left[(1+D_1 r^{\alpha-1})^{1-\alpha}-1\right]$$

точно таким же методом как функцию $\tau(r)$ из п. 1. § 2, получаем для $r>D_1^{\frac{1}{\alpha-1}}$ $\lambda(r)<D_1$.

Итак, если $r\in\tilde{\Lambda}_k$, то

$$M(r,\ n)\leqslant E_5\, n!\ D_1^{-n}\, r^{-\alpha n}\, M(r),\quad E_5=\exp D_1 E_3.$$

Найдем мажоранту для $\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(r)$ (см. п. 1. § 3), считая, что $r \in \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_k$. Если как раньше, $c_k = \sup_{s \leqslant n_k} |a_s^k|$, то для всех $r \geqslant r_1$ и при всех $n \geqslant 1$ и $r \geqslant r_1$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(r) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} c_k\, k!\; H_1 E_5 D_1^{-k} M(r) = \delta_n M(r), \quad H_1 = \frac{r_1}{r_1 - 1},$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим какое-нибудь обыкновенное значение $r \in \bar{\Lambda}_k$ (такое значение на $\tilde{\Lambda}_k$ найдется при всех достаточно больших k, так как если μ_k — мера множества исключительных значений на $\tilde{\Lambda}_k$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\mu_k}{r_k} = 0$).

Если $y(x)$ — т.ц.р., r — обыкновенное значение из $\tilde{\Lambda}_k$ и x_r — точка на окружности $|x| = r$ такая, что $|y(x_r)| = M(r)$, то из уравнения (1.5) при $x = x_r$ получаем, учитывая (1.2):

$$\Big| \sum_{m=0}^{n} a_{n_m}^m \left(\frac{\nu(r)}{x_r}\right)^m r^{n_m} \left(1 + \tilde{\varepsilon}_m(r)\right) \Big| < \frac{M(r, P_0)}{M(r)} +$$

$$+ \sum_{m=n+1}^{\infty} c_m\, m!\; D^{-m} E_5 \cdot H_1 \leqslant B r^{-N} + \delta_n.$$

Пусть

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_k, \qquad S = \{ R \} \cap \Omega.$$

Предположим, что $\varliminf\limits_{r \in S,\, r\to\infty} r^{\alpha-1} \nu(r) < \lambda_0$, где λ_0 — модуль ближайшего к началу координат нуля целой функции

$$\omega(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}{}' a_{\alpha k}^k x^k.$$

Тогда для некоторой подпоследовательности $\bar{r}_l$ из S

$$\nu(\bar{r}_l)\, \bar{r}_l^{\alpha-1} \leqslant \lambda_0 - 2g, \quad 0 < g < \frac{\lambda_0}{2}, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{4.8}$$

Пусть $d = \min\limits_{|x| \leqslant \lambda_0 - 2g} |\omega(x)|$. Для всех $n \geqslant N_2$ в круге $|x| \leqslant \lambda_0 - 2g$

$$\Big| 1 + \sum_{k=1}^{n}{}' a_{\alpha k}^k x^k \Big| \geqslant \frac{d}{2} > 0. \tag{4.9}$$

В то же время при всех $n \geqslant N_3$ $\delta_n < \frac{d^2}{6}$. Зафиксируем какое-нибудь $n \geqslant N_2 + N_3$ и рассмотрим функцию

$$A(r) = \Big| \sum_{m=0}^{n} a_{n_m}^m \left(\frac{\nu(r)\, r^{\alpha}}{x_r}\right)^m r^{n_m - \alpha m} \left(1 + \tilde{\varepsilon}_m(r)\right) \Big|$$

при $r = \bar{r}_l$, $l = 1, 2, \ldots$. Если $n_m < \alpha m$, то

$$|a_{n_m}^m| \left| \frac{\nu(r)\, r^{\alpha}}{x_r} \right|^m r^{n_m - \alpha m} \left| 1 + \tilde{\varepsilon}_m(r) \right| < \frac{d}{12n}, \quad r \geqslant R_6, \quad r = \bar{r}_l.$$

Кроме того (по-прежнему, при $r=\bar{r}_l$), за счет стремления к нулю $\tilde{\varepsilon}_m(r)$,

$$\sum_{m=0}^{n} |a_{n_m}^m| (\lambda_0 - 2g)^m r^{n_m - \alpha m} |\tilde{\varepsilon}_m(r)| < \frac{d}{8},$$

если $r \geqslant R_7$. Итак, для всех достаточно больших $\bar{r}_l$

$$A(\bar{r}_l) > \left| \sum_{m=0}^{n}{}' a_{\alpha m}^m \left(\frac{\nu(\bar{r}_l) \bar{r}_l^{\alpha}}{x_{\bar{r}_l}} \right)^m \right| - \frac{d}{8} - \frac{d}{12} = B_{n,l} - \frac{5}{24} d.$$

В силу (4.8) и (4.9)

$$B_{n,l} \geqslant \frac{d}{2} \quad \text{и} \quad A(\bar{r}_l) > \frac{7}{24} d > \frac{d}{4}.$$

С другой стороны,

$$A(\bar{r}_l) < B(\bar{r}_l)^{-N} + \delta_n < \frac{d}{12} + \frac{d}{6} = \frac{d}{4}$$

для $l > L$, и мы пришли к противоречию.

Следовательно, $\varliminf\limits_{r\to\infty,\, r\in S} \nu(r) r^{\alpha-1} \geqslant \lambda_0$. Если теперь ρ_l — последовательность исключительных значений из Ω, $\rho_l \uparrow \infty$, то как и раньше, найдем 2 последовательности R_l и R_l' обыкновенных значений таких, что

$$R_l, R_l' \in \tilde{\Lambda}_{k_l}, \quad R_l < \rho_l < R_l'; \quad R_l' = R_l \left[1 + o_l(1) \right].$$

Отсюда, точно так же, как выше, в § 4, найдем, что $\varliminf\limits_{l\to\infty} \nu(\rho_l) \rho_l^{\alpha-1} \geqslant \lambda_0$, и, таким образом,

$$\varliminf_{r\to\infty,\, r\in\Omega} \nu(r) r^{\alpha-1} \geqslant \lambda_0. \tag{4.10}$$

Следовательно, для $k > K(\varepsilon)$ и $r \in \tilde{\Lambda}_k$ $\nu(r) r^{\alpha-1} \geqslant \lambda_0 - \varepsilon$.

С другой стороны, для $\nu(r)$ при всех достаточно больших (обыкновенных или нет) значениях r мы имели оценку

$$\nu(r) \leqslant \frac{\ln M(r+h)}{\ln\left(1 + \frac{h}{r}\right)}$$

точно такого же вида, как и для $w(r)$. С помощью тех же рассуждений, что и в случае $w(r)$, находим, что если $r \in \Lambda_k'$, то $\nu(r) \leqslant E_3 r^{1-\alpha}$ и подавно $\nu(r) < E_3 r^{1-\alpha}$, если $r \in \tilde{\Lambda}_k \subset \Lambda_k'$. Учитывая (4.10), получаем, что $E_3 \geqslant \lambda_0$, или

$$(E+\delta) Q_1^{1-\alpha} e(1-\alpha) \geqslant \lambda_0.$$

Так как число $\delta > 0$ можно взять как угодно малым, а число $Q_1 > \exp\frac{1}{1-\alpha}$ — как угодно близким к $\exp\frac{1}{1-\alpha}$, то $E \geqslant \frac{\lambda_0}{e^2(1-\alpha)}$. Таким образом, имеет место

Теорема 5.1. *Если $y(x)$ — произвольное трансцендентное целое решение уравнения* (1.5) *и условия* а) – б) *выполнены, то*

$$\varliminf_{r\to\infty} r^{\alpha-1} \ln M(r) \geqslant \frac{\lambda_0}{e^2(1-\alpha)} = B > 0. \tag{4.11}$$

Было бы очень интересно заменить константу B в теореме 4.1 более точной. Если $y(x)$ – т.ц.р. уравнения (1.5) из класса $[1-\alpha, \infty)$, то из результатов § 4 следует, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{\alpha-1}\ln M(r)\geqslant\frac{\lambda_0}{1-\alpha}$, причем это неравенство уже не улучшается.

Если же $y(x)$ – произвольное т.ц.р., то, применяя (в усложненной форме) методы настоящего параграфа, можно заменить константу B величиной $\frac{\lambda_0}{1-\alpha}$, если степени n_k многочленов $P_k(x)$ удовлетворяют дополнительному условию: для всех достаточно больших k

$$\alpha k-n_k\geqslant\frac{1-\alpha}{2}+h,\quad \text{где}\quad h>0,\quad \text{а}\quad \alpha=\sup_{k\geqslant 1}\frac{n_k}{k}.$$

Это условие всегда выполняется, если, например, $n_k\leqslant\alpha k-\frac{1}{2}$.

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию 25.XI.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ф. Коробейник. Об одном методе исследования дифференциального уравнения бесконечного порядка, Мат. сб., т. 56(98):1 (1962), 107–128.
2. Ж. Валирон. Аналитические функции, ГИТТЛ (1957).
3. J. Valiron. Sur les functions entières vérifiant une classe d'équations différentielles, Bull. Société math., 51 (1923).
4. Ю. Ф. Коробейник. Исследование дифференциальных уравнений бесконечного порядка с полиномиальными коэффициентами с помощью операторных уравнений интегрального типа, Матем. сб., т. 49(91):2 (1959), 193–206.
5. А. О. Гельфонд и А. Ф. Леонтьев. Об одном обобщении ряда Фурье, Матем. сб., 29(71) (1951), 477—500.
6. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Москва, 1959.
7. J. Valiron. Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants, Ann. de l'Ecole Norm. Sup., 46 (1929), 25—53.

BEGALINĖS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SU POLINOMINIAIS KOEFICIENTAIS SVEIKIEJI SPRENDINIAI

J. F. KOROBEINIK

(Reziumė)

Darbe nagrinėjami diferencialinės lygties

$$y+\sum_{k=1}^{\infty}P_k(x)\,y^{(k)}=f(x),\qquad P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k}a_s^k x^s,\tag{1}$$

sveikieji sprendiniai, kai patenkintos sąlygos

$$\sup_{k\geqslant 1}\frac{n_k}{k}=\alpha<1;\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\sup_{0\leqslant s\leqslant n_k}|a_s^k|}<\infty.$$

Autorius įrodo lygties (1) sprendinių egzistenciją ir vienatinumą sveikų funkcijų klasėje $[1-\alpha,\sigma]$, $\sigma<\infty$ ir nurodo metodą sprendiniams aproksimuoti. Ištirta tokių sprendinių asimptotika ir gautas homogeninės lygties ($f\equiv 0$) sveikųjų transcendentinių sprendinių apatinis augimo rėžis.

ON INTEGRAL SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF INFINITE ORDER WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

J. F. KOROBEINIK

(Summary)

In this paper are investigated integral solutions of the differential equation

$$y+\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)}=f(x), \quad P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s, \tag{1}$$

under conditions

$$\sup_{k\geqslant 1}\frac{n_k}{k}=\alpha<1; \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\sup_{0\leqslant s\leqslant n_k}|a_s^k|}<\infty.$$

The author obtains a theorem of existence and uniqueness of solution of equation [1] in the class of integral functions $[1-\alpha, \sigma]$, $\sigma<\infty$, and indicates a method of approximate solution of this equation. Asymptotical behaviour of such integral solutions is also described and a lower bound of integral transcendental solutions of homogeneous equations (with $f=0$) is obteined.