ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
IV LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
1964

# ОБ УТОЧНЕНИИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В МНОГОМЕРНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ

А. БИКЯЛИС

Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных решетчатых случайных векторов

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots, \tag{1}$$
$$\xi_j=(\xi_{j1},\ \ldots,\ \xi_{jk})\in R_k,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,$$

принимающих значения из решетки $\alpha=\{m\}$, $m=(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k)$, $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, $k$-мерного пространства $R_k$. Без ограничения общности можно считать $M\xi_{1l}=0$, $M\xi_{1l}^2=1$, $l=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, максимальный шаг распределения 1.

Обозначим через $V$ ковариационную матрицу случайного вектора $\xi_1$, которую в дальнейшем будем считать несингулярной, и

$$P_n(m)=P\{\xi_1+\ldots+\xi_n=m\}.$$

Полиномы $H_j(\omega)$, $\omega=(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_k)$, определяем с помощью формального тождества

$$\exp\left\{\sum_{j=3}^{\infty}\frac{(\lambda\,\omega)}{j!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{j-2}\right\}=\sum_{j=0}^{\infty}H_j(\omega)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j, \tag{2}$$

а $\tilde{H}_j(-\varphi)\ (m)$ следующим равенством

$$\tilde{H}_j(-\varphi)\ (m)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}H_j(it)\exp\left\{-it'm-\frac{1}{2}\,t'V^{-1}t\right\}dt,\quad j=0,\ 1,\ \ldots \tag{3}$$

Здесь $(\lambda\omega)$ скалярное произведение векторов $\lambda$ и $\omega$. $\lambda_1^{s_1}\cdot\lambda_2^{s_2}\ldots\lambda_k^{s_k}$ является семиинвариантом $(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_k)$ — порядка случайного вектора $\xi_1$.

Цель настоящей работы — исследовать

$$\sum_{m\in\alpha}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|$$

и

$$\sum_{m\in\alpha}\left|\frac{m}{\sqrt{n}}\right|^{\nu}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|^{\beta}$$

в зависимости от $n$, где

$$Q_{n,s}(m)=\sum_{j=0}^{s-2}\tilde{H}_j(-\varphi)\ (m)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j. \tag{4}$$

Изменение $\nu$ и $\beta$ точнее будет указано позже.

По этому вопросу известна работа R. Ranga Rao [1], где автор доказывает следующую теорему.

Если (1) последовательность имеет конечные моменты $s$-того порядка ($s \geqslant 3$), то

$$\sum_{m \in \alpha} \left| P_n(m) - \sum_{j=0}^{s-3} \tilde{H}_j(-\varphi)\,(m) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \right| = O\left(\frac{\ln^{\frac{k}{2}} n}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right).$$

В 1962 году логарифмический множитель для $k=1$ в остаточном члене снял М. Маматов [2]. Он доказал, что, если последовательность независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots,$$

с максимальным шагом распределения 1, имеет $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = \sigma^2$ и конечный третий момент, то

$$\sum_{m \in \alpha} \left| P_n(m) - \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 n}} \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть (1) последовательность имеет конечные моменты $s$-того порядка $s \geqslant 3$. Тогда

$$\sum_{m \in \alpha} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right| = o\left(\frac{\Psi_{k,s}(n)}{n^{\frac{s-2}{2}}}\right);$$

здесь

$$\Psi_{k,s}(n) = 1 \quad \text{для} \quad k < 2s,$$

$$\Psi_{k,s}(n) = \sqrt{\ln\ln n} \quad \text{для} \quad k = 2s,$$

$$\Psi_{k,s}(n) = (\ln n)^{\frac{k-2s}{4k}} \quad \text{для} \quad k > 2s.$$

Теорема 2. Если $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют следующие неравенства $2/2s+1 < \beta \leqslant 2$, $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{\beta}{2}(2s+1)-1$, или $\beta \geqslant 2$, $0 \leqslant \nu \leqslant s\beta$, то для $k < 2s$

$$\sum_{m \in \alpha} \left| \frac{m}{\sqrt{n}} \right|^{\alpha} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right| = o\left(\frac{1}{n^{\frac{s-2}{2}\beta}}\right).$$

Доказательство теоремы 1. Если $\alpha_1 = [m : |m| \leqslant c_1\sqrt{n \ln n}]$, то

$$\sum_{m \in \alpha} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right| \leqslant \sum_{m \in \alpha_1} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right| + \sum_{m \in \alpha/\alpha_1} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right|.$$

Вторая сумма оценивается следующим образом:

$$\sum_{m \in \alpha \setminus \alpha_1} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right| \leqslant \sum_{m \in \alpha \setminus \alpha_1} P_n(m) + \sum_{m \in \alpha \setminus \alpha_1} Q_{n,s}(m) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} P\left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} \right| \geqslant c_2\sqrt{\ln n} \right\} + \sum_{m \in \alpha \setminus \alpha_1} Q_{n,s}(m) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{s-2}{2}}}\right).$$

сумму

$$I = \sum_{m \in \alpha_1} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right|$$

оценим применяя неравенство Гельдера [3], стр. 169,

$$I\leqslant\prod_{j=1}^{k}\left\{\sum_{m\in\alpha}\left[1+\left|\frac{m_j}{\sqrt{n}}\right|^{2s}\right]\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2k}}\left\{\sum_{m\in\alpha_1}\prod_{j=1}^{k}\left[1+\left|\frac{m_j}{\sqrt{n}}\right|^{2s}\right]^{-\frac{1}{k}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что

$$\left\{\sum_{m\in\alpha_1}\prod_{j=1}^{k}\left[1+\left|\frac{m_j}{\sqrt{n}}\right|^{2s}\right]^{-\frac{1}{k}}\right\}^{\frac{1}{2}}=O\left(n^{\frac{k}{4}}\Psi_{k,s}(n)\right).$$

Если $f_n(t)$ – характеристическая функция нормированной суммы

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$$

и $g_n(t)$ – преобразование Фурье функции $Q_{n,s}(m)$, то, применяя равенство Парсеваля [4], стр. 67, получим

$$\sum_{m\in\alpha}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|^2=\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{D_2}\left|f_n(t)-g_n(t)\right|^2dt+\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{\overline{D}_2}\left|g_n(t)\right|^2dt,$$

$$\sum_{m\in\alpha}\left|\frac{m_j}{\sqrt{n}}\right|^{2s}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|^2=$$

$$=\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{D_2}\left|\frac{\partial^s}{\partial t_j^s}\left[f_n(t)-g_n(t)\right]\right|^2dt+\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{\overline{D}_2}\left|\frac{\partial^s}{\partial t_j^s}g_n(t)\right|^2dt,$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,\quad D_2=[t:|t_j|\leqslant\pi\sqrt{n},\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k].$$

Обозначая $D_3=[t:|t|\leqslant c_3\sqrt{n}]$, получаем

$$\sum_{m\in\alpha}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|\leqslant\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{D_3}\left|f_n(t)-g_n(t)\right|^2dt+$$

$$+\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{D_2\setminus D_3}\left|f_n(t)\right|^2dt+\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{\overline{D}_3}\left|g_n(t)\right|^2dt,$$

$$\sum_{m\in\alpha}\left|\frac{m_j}{\sqrt{n}}\right|^{2s}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|\leqslant\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{D_3}\left|\frac{\partial^s}{\partial t_j^s}\left[f_n(t)-g_n(t)\right]\right|^2dt+$$

$$+\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{D_2\setminus D_3}\left|\frac{\partial_s}{\partial t_j^s}f_n(t)\right|^2dt+\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{\overline{D}_3}\left|\frac{\partial_s}{\partial t_j^s}g_n(t)\right|^2dt,\quad j=1,2,\ldots,k.$$

Известно, что

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{\overline{D}_3}\left|g_n(t)\right|^2dt=o\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+s-1}}\right)$$

и

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int_{\overline{D}_3}\left|\frac{\partial_s}{\partial t_j^s}g_n(t)\right|^2dt=o\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+s-2}}\right),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

В силу леммы 1 и 2 [5], получаем

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int\limits_{D_3}\left|f_n(t)-g_n(t)\right|^2 dt=o\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+s-2}}\right),$$

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int\limits_{D_3}\left|\frac{\partial^s}{\partial t_j^s}\left[f_n(t)-g_n(t)\right]\right|^2 dt=o\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+s-2}}\right).$$

Интегралы

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int\limits_{D_2\setminus D_3}\left|f_n(t)\right|^2 dt$$

и

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int\limits_{D_2\setminus D_3}\left|\frac{\partial^s}{\partial t_j^s}f_n(t)\right|^2 dt,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

легко оценивается, если учесть, что при $t\in D_2\setminus D_3$

$$\left|f_n(t)\right|\leqslant e^{-c_4 n},\quad\left|\frac{\partial^s}{\partial t_j^s}f_n(t)\right|\leqslant c_5\, e^{-c_4(n-s)},\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int\limits_{D_2\setminus D_3}\left|f_n(t)\right|^2 dt=o\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+s-2}}\right)$$

и

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^k}\int\limits_{D_2\setminus D_3}\left|\frac{\partial^s}{\partial t_j^s}f_n(t)\right|^2 dt=o\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}+s-2}}\right),$$

а тем самым

$$\sum_{m\in\alpha_1}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|=o\left(\frac{\Psi_{k,s}(n)}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right),$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.

Утверждение теоремы 2 легко получается из неравенств

$$\sum_{m\in\alpha}\left|\frac{m}{\sqrt{n}}\right|^{\nu}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|^{\beta}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{m\in\alpha}\left[1+\left|\frac{m}{\sqrt{n}}\right|^{2s}\right]\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\left[\sum_{m\in\alpha}\left[1+\left|\frac{m}{\sqrt{n}}\right|^{2s}\right]^{-\frac{\beta-2\nu}{2-\beta}}\right]^{\frac{2-\beta}{2}}$$

при $2/2s+1<\beta\leqslant 2,\quad 0\leqslant\nu\leqslant\frac{\beta}{2}(2s+1)-1,$

$$\sum_{m\in\alpha}\left|\frac{m}{\sqrt{n}}\right|^{\nu}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|^{\beta}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_m\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|^{\beta-2}\left|\frac{m}{\sqrt{n}}\right|^{l}\sum_{m\in\alpha}\left|\frac{m}{\sqrt{n}}\right|^{p}\left|P_n(m)-Q_{n,s}(m)\right|^2$$

при $\beta\geqslant 2$, $0\leqslant\nu\leqslant s\beta$. Здесь $l=0$, если $2s\geqslant\nu$, $l=\nu-2s$, если $\nu>2s$, $p=\nu$, если $2s\geqslant\nu$ и $p=2s$, если $\nu>2s$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
25.IX.1963

## ЛИТЕРАТУРА


1. R. Ranga Rao. On the central limit theorem in $R_k$, Bull. Amer. Math. Soc., 1961, **67**.
2. М. Маматов. О локальной теореме для решетчатого случая, Изв. АН УзССР сер. физ.-мат., 1962, **1**.
3. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд и Г. Полиа. Неравенства, И. Л., Госиздат, 1948.
4. S. Bochner, K. Chandrasekharan. Fourier transforms, Princeton, 1949.
5. А. Бикялис. Об уточнении остаточного члена в многомерной предельной теореме, Лит. мат. сб., 1964, **4**, 2.


## APIE LIEKAMOJO NARIO PAGERINIMĄ DAUGIAMATĖSE GLOBALINĖSE TEOREMOSE

A. BIKELIS


*(Reziumė)*

Sakysime, duota nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių rėtinių atsitiktinių $k$-mačių vektorių seka $\xi_1, \xi_2, \ldots$, turinti baigtinius $s$-tos ($s \geqslant 3$) eilės momentus ir nesinguliarinę kovariacijos matricą.

Straipsnyje gauta

$$\sum_{m \in \alpha} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right|$$

ir

$$\sum_{m \in \alpha} \left| \frac{m}{\sqrt{n}} \right|^{\nu} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right|^{\beta}$$

priklausomumas nuo $n$; čia $P_n(m) = P\{\xi_1 + \cdots + \xi_n = m\}$ ir $Q_{n,s}(m)$ apibrėžiama pagal (2), (3) ir (4).


## ON THE IMPROVEMENT OF THE REMAINDER TERM FOR THE MULTIDIMENSIONAL GLOBAL THEOREMS

A. BIKELIS


*(Summary)*

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ a sequence of indentically distributed, independent $k$-dimensional random vectors having lattice distribution with finite moments of integer order $s \geqslant 3$. We assume that the covariance matrix is non-singular.

Thus in the paper it is given the dependence of $n$ of the following sums:

$$\sum_{m \in \alpha} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right|$$

and

$$\sum_{m \in \alpha} \left| \frac{m}{\sqrt{n}} \right|^{\nu} \left| P_n(m) - Q_{n,s}(m) \right|^{\beta},$$

where $P_n(m) = P\{\xi_1 + \cdots + \xi_n = m\}$ and $Q_{n,s}(m)$ is defined by (2), (3) and (4).