IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1964

ОБ УТОЧНЕНИИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В МНОГОМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

А. БИКЯЛИС

Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots,$$
$$\xi_j=(\xi_{j1},\ \xi_{j2},\ \ldots,\ \xi_{jk})\in R_k,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,$$

где R_k есть k-мерное эвклидовое пространство. Без ограничения общности можно считать $M\xi_{1l}=0$, $M\xi_{1l}^2=1$, $l=1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Обозначим через $P(A)$ вероятностную функцию (в. ф.) ξ_1 и $P_n(A)$ – в. ф. нормированной суммы

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j,$$

а $\Phi(A)$ – в. ф. k-мерного нормального закона с нулевыми первыми моментами и ковариационной матрицей V случайного вектора ξ_1, которую в дальнейшем всегда будем считать несингулярной.

Как известно в. ф. $P_n(A)$ можно представить в виде:

$$P_n(A)=\int_A p_n(x)\,dx+a_n S_n(A),$$

где $S_n(A)$ есть сингулярная часть распределения $P_n(A)$.

Обозначим

$$\rho_1(P_n,\ \Phi)=\sup_{A\subset R_k}|P_n(A)-\Phi(A)|$$

и

$$\rho_2(p_n,\ \varphi)=\int_{R_k}|p_n(x)-\varphi(x)|\,dx,$$

где A – борелевское множество, $\varphi(x)$ – плотность k-мерного нормального закона $\Phi(A)$.

Цель настоящей работы – исследовать скорость сходимости по вариации $P_n(A)$ к $\Phi(A)$. Известно [1], что

$$\frac{1}{2}\rho_2(p_n,\ \varphi)\leqslant\rho_1(P_n,\ \Phi)\leqslant\rho_2(p_n,\ \varphi),$$

следовательно, сходимость по вариации $P_n(A)$ к $\Phi(A)$ эквивалентна сходимости в среднем $p_n(x)$ к $\varphi(x)$.

Полиномы $H_j(\omega)$, $\omega=(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_k)$ определяем с помощью формального тождества

$$\exp\left\{\sum_{j=3}^{\infty}\frac{(\lambda\omega)^j}{j!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{j-2}\right\}=\sum_{j=0}^{\infty}H_j(\omega)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j,$$

а $\tilde{H}_j(-\varphi)(x)$ и $\tilde{H}_j(\Phi)$ следующими равенствами:

$$\tilde{H}_j(-\varphi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k} H_j(it)\exp\left\{-it'x-\frac{1}{2}t'V^{-1}t\right\}dt$$

и

$$H_j(\Phi)(x)=\int\limits_{\substack{y_1\leqslant x_1\\ \cdots\cdots\\ y_k\leqslant x_k}}\tilde{H}_j(-\varphi)(y)\,dy,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $(\lambda\,\omega)$ есть скалярное произведение векторов λ и ω. $\lambda_1^{s_1}\cdot\lambda_2^{s_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_k^{s_k}$ является семиинвариантом $(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_k)$ порядка распределения $P(A)$.

Пусть

$$g_n(x)=\sum_{j=0}^{s-2}\tilde{H}_j(-\varphi)(x)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j$$

и

$$\psi_{k,s}(n)=1 \qquad \text{для} \quad k<2s,$$
$$\psi_{k,s}(n)=\sqrt{\ln\ln n} \qquad \text{для} \quad k=2s,$$
$$\psi_{k,s}(n)=(\ln n)^{\frac{k-2s}{4k}} \qquad \text{для} \quad k>2s.$$

$c_1,\ c_2,\ \ldots$ — положительные константы, независимые от $n,\ t,\ x$.

Предположим, что

(A). ξ_1 *имеет конечные моменты s-того порядка* $(s\geqslant 3)$.

(B). *В разложении*

$$P(A)=a\int\limits_A p(x)\,dx+(1-a)\,S(A)$$

$a>0$, *где* $S(A)$ *есть сингулярная часть в.ф.* $P(A)$.

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *При условиях* (A) *и* (B)

$$\rho_2(p_n,\ g_n)=\int\limits_{R_k}|p_n(x)-g_n(x)|\,dx=o\left(\frac{\psi_{k,s}(n)}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right).$$

Теорема 2. *При условиях* (A) *и* (B), *для*

$$\int\limits_{R_k}\prod_{j=1}^{k}|x_j|^{\delta}\,|p_n(x)-g_n(x)|\,dx=o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right).$$

Здесь $0\leqslant\delta<\dfrac{2s-k}{2k}$.

При доказательстве теорем нам понадобится следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $f_n(t)$ — *характеристическая функция нормированной суммы* S_n *и выполняются условия* (B), *то при* $|t|\leqslant c_1\sqrt{n}$ *имеет месмо следующее соотношение:*

$$\left|f_n(t)-\sum_{j=0}^{s-2}H_j(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\exp\left\{-\frac{1}{2}t'V^{-1}t\right\}\right|=\frac{c_2\,\delta_n}{(\sqrt{n})^{s-2}}\left[|t|^s+|t|^{3(s-2)}\right]e^{-c_3|t|^2},$$

где $|t|=\sqrt{t_1^2+\ldots+t_k^2}$ *и* $\delta_n\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство этой леммы можно найти в работе [2].

Лемма 2. *Если выполняется условие леммы* 1, *то при* $|t| = c_1\sqrt{n}$ *имеет место соотношение:*

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial t_j^s} \left[f_n(t) - \sum_{j=0}^{s-2} H_j(it) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j \exp\left\{ -\frac{1}{2} t' V^{-1} t \right\} \right] \right| =$$

$$= \frac{c_4 \delta_n'}{(\sqrt{n})^{s-2}} [1 + |t|^{4s-2}] e^{-c_5 |t|^2},$$

$j = 1, 2, \ldots, k$ *где* $\delta_n' \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Лемма 2 есть очевидное обобщение теоремы 1 П. Сурвилы [3]. Теперь приступим к

доказательству теоремы 1. Так как в. ф. $P(A)$ отвечает условию (B), ее можно представить в виде

$$P(A) = pQ_1(A) + qQ_2(A),$$

где

$$0 < p \leqslant 1, \ p + q = 1, \ Q_1(A) = \frac{1}{p} \int_A q_1(x)\, dx \quad \text{и} \quad q_1(x) < c < \infty.$$

Следовательно,

$$P_n(A) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} [Q_1(\sqrt{n} A)]^{j*} * [Q_2(\sqrt{n} A)]^{(n-j)*}.$$

Символ $[\ldots]^{l*}$ обозначает l-кратную композицию указанных в скобках функций. Если $\tilde{g}_{jn}(x)$ есть плотность в. ф.

$$[Q_1(\sqrt{n} A)]^{j*} * [Q_2(\sqrt{n} A)]^{(n-j)*},$$

то

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \tilde{g}_{jn}(x) =$$

$$= \sum_{j \geqslant np - \sqrt{n} \ln n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \tilde{g}_{jn}(x) + \sum_{j < np - \sqrt{n} \ln n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \tilde{g}_{jn}(x) = \sum_n{}'(x) + \sum_n{}''(x)$$

и

$$\rho_2(p_n, g_n) = \int_{R_k} |p_n(x) - g_n(x)|\, dx \leqslant \int_{R_k} \left| \sum_n{}'(x) - g_n(x) \right| dx + \sum_{j < np - \sqrt{n} \ln n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j}.$$

Из [4] известно, что если $0 < p \leqslant 1$ и $p + q = 1$, то

$$\sum_{j < np - \sqrt{n} \ln n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = o\left(\frac{1}{n^{ks}} \right), \qquad n \to \infty, \qquad (**)$$

и, следовательно,

$$\rho_2(p_n, g_n) = \int_{R_k} \left| \sum_n{}'(x) - g_n(x) \right| dx + o\left(\frac{1}{n^{ks}} \right), \qquad n \to \infty.$$

Остаётся оценить интеграл

$$\int_{R_k} \left| \sum_n{}'(x) - g_n(x) \right| dx.$$

Если $D_1 = [x : |x| \leqslant c_6 \sqrt{n}]$, то

$$\int_{R_k} \left| \sum_n{}'(x) - g_n(x) \right| dx \leqslant \int_{D_1} + \int_{\overline{D_1}} \left| \sum_n{}'(x) - g_n(x) \right| dx.$$

М. К. Халиковым доказано [1], что

$$\int\limits_{D_1}\left|\sum\nolimits_n'(x)-g_n(x)\right|dx=O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\rho_2(p_n,\ g_n)=\int\limits_{D_1}\left|\sum\nolimits_n'(x)-g_n(x)\right|dx+o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right).$$

Применяя обобщенное неравенство Гельдера [5], 169 стр., получаем

$$\int\limits_{D_1}\left|\sum\nolimits_n'(x)-g_n(x)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{j=1}^{k}\left\{\int\limits_{D_1}[1+|x_j|^{2s}]\left|\sum\nolimits_n'(x)-g_n(x)\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2k}}\left\{\int\limits_{D_1}\prod_{j=1}^{k}(1+|x_j|^{2s})^{-\frac{1}{k}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что

$$\left\{\int\limits_{D_1}\left[\prod_{j=1}^{k}(1+|x_j|^{2s})\right]^{-\frac{1}{k}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}=O\left(\psi_{k,s}(n)\right),$$

а интегралы

$$\int\limits_{D_1}(1+|x_j|^{2s})\left|\sum\nolimits_n'(x)-g_n(x)\right|^2dx,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

оценим при помощи равенства Парсеваля [6], 67 стр. Пусть

$$f\left(t,\sum\nolimits_n'\right)=\int\limits_{R_k}e^{i(tx)}\sum\nolimits_n'(x)\,dx,$$

$$f\left(t,\ \sum\nolimits_n''\right)=\int\limits_{R_k}e^{i(tx)}\sum\nolimits_n''(x)\,dx$$

и

$$f(t,\ g_n)=\int\limits_{R_k}e^{i(tx)}g_n(x)\,dx,$$

тогда

$$\int\limits_{D_1}(1+|x_j|^{2s})\left|\sum\nolimits_n'(x)-g_n(x)\right|^2dx\leqslant\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}\left|f\left(t,\ \sum\nolimits_n'\right)-f(t,\ g_n)\right|^2dt+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}\left|\frac{\partial^s}{\partial t_j^s}\left[f\left(t,\ \sum\nolimits_n'\right)-f(t,\ g_n)\right]\right|^2dt.$$

В силу леммы 1 и соотношения (**) имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}\left|f\left(t,\ \sum\nolimits_n'\right)-f(t,\ g_n)\right|^2dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_7\,\delta_n}{n^{s-2}}+\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\overline{D}_2}\left|f\left(t,\ \sum\nolimits_n'\right)\right|^2dt+\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\overline{D}_2}|f(t,\ g_n)|^2\,dt,$$

где $D_2=[t:|t|\leqslant c_1\sqrt{n}]$, $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Из $f(t,\ g_n)$ определения следует, что

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\overline{D}_2}f(t,g_n)^2\,|\,dt=o\left(\frac{1}{n^{s-2}}\right)$$

и отсюда

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}\left|f\left(t,\ \sum_n'\right)-f(t,\ g_n)\right|^2 dt=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{\bar{D}_s}\left|f\left(t,\ \sum_n'\right)\right|^2 dt+o\left(\frac{1}{n^{s-2}}\right).$$

Характеристическую функцию $f\left(t,\ \sum_n'\right)$ можно записать в виде:

$$f\left(t,\ \sum_n'\right)=\sum_{j\geqslant np-\sqrt{n}\ln n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}h_1^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)h_2^{n-j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

где $h_1^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ и $h_2^{n-j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ есть трансформации Фурье, соответственно, $[Q_1(\sqrt{n}A)]^{j*}$ и $[Q_2(\sqrt{n}A)]^{(n-j)*}$. Так как $Q_1(A)$ имеет ограниченную плотность, то

$$\int_{R_k}|h_1(t)|\,dt<c_8<\infty$$

и при $|t|>\delta$.

$$|h_1(t)|\leqslant e^{-c_9}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}\left|f\left(t,\ \sum_n'\right)-f(t,\ g_n)\right|^2 dt=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\right)^k e^{-c_9(np-2)}\int_{R_k}|h_1(t)|^2 dt+o\left(\frac{1}{n^{s-2}}\right)=o\left(\frac{1}{n^{s-2}}\right).$$

Итак,

$$\int_{D_1}(1+|x_j|^{2s})\left|\sum_n'(x)-g_n(x)\right|^2 dx=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}\left|\frac{\partial^s}{\partial t^s}\left[f\left(t,\ \sum_n'\right)-f(t,\ g_n)\right]\right|^2 dt+o\left(\frac{1}{n^{s-2}}\right).$$

При помощи соотношения (**) и леммы 2 повторяя все рассуждения получаем, что

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}\left|\frac{\partial^s}{\partial t_j^s}\left[f\left(t,\ \sum_n'\right)-f(t,\ g_n)\right]\right|^2 dt=o\left(\frac{1}{n^{s-2}}\right),\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

откуда и следует, что

$$\int_{\bar{D}_1}\left|\sum_n'(x)-g_n(x)\right|dx=o\left(\frac{\psi_{k,s}(n)}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right).$$

В результате

$$\rho_2(P_n,\ g_n)=O\left(\frac{\psi_{k,s}(n)}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right).$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие. *Пусть выполняется условие* (А) *для* $s=3$ *и условие* (В), *тогда*

$$\rho_1(P_n,\ \Phi)=O\left(\frac{\psi_{k,3}(n)}{\sqrt{n}}\right)$$

и

$$\sup_{A\subset R_k}\left|P_n(A)-\Phi(A)-\frac{1}{\sqrt{n}}\int_A d\tilde{H}_j(-\Phi)\right|=o\left(\frac{\psi_{k,3}(n)}{\sqrt{n}}\right).$$

Утверждение следует из соотношения (*).

Отметим, что при условиях теоремы 1 М. К. Халиковым [1] была получена оценка

$$\int\limits_{R_k} |p_n(x) - g_n(x)|\, dx = o\left(\frac{\ln^{\frac{k}{2}} n}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right).$$

Выражаю глубокую благодарность проф. И. П. Кубилюсу, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Институт физики и математики
Академии Наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
25.IX.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. М. К. Халиков. Локальная теорема для сумм независимых случайных векторов, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат., 1958, 2.
2. P. L. Hsu. The approximate distribution of the mean and variance of a simple independent variables, The Annales of Math. Stat., 1945, **16**, 1—29.
3. П. Сурвила. Остаточный член в асимптотическом разложении для плотностей, Лит. мат. сб., 1962, 2, 179—194.
4. Ю. В. Прохоров. Локальная теорема для плотностей, ДАН СССР, 1952, 83, 6, 797—800.
5. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд и Г. Полиа. Неравенства, И. Л., Госиздат, 1948.
6. S. Bochner, K. Chandrasekharan. Fourier transforms, Princeton, 1949.

APIE LIEKAMOJO NARIO PAGERINIMĄ DAUGIAMATĖJE CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE

A. BIKELIS

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjama nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių k-mačių atsitiktinių vektorių normuotos sumos tikimybinės funkcijos konvergavimo pagal variaciją greitis į atitinkamą k-matį normalinį dėsnį.

ON THE REFINEMENT OF THE REMAINDER TERM IN THE MULTIDIMENSIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM

A. BIKELIS

(Summary)

In the paper it is threated the rate of convergence in the variation of the probability funktion of the standardized sum of indenpendent and identically distributed k-dimensional random vectors to the correspondent k-dimensional normal law.