IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

ОБЛАСТИ РЕШЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Э. И. ВИЛКАС

Пусть $A(X)=\|a_{ij}(X)\|_{m\times n}$ — матрица игры, $a_{ij}(X)$ — действительные функции s-мерного вектора X, α и β подмножества множеств $\{1, 2, \ldots, m\}$ и $\{1, 2, \ldots, n\}$, соответственно. Обозначим $A_{\alpha\beta}$ матрицу, составленную из элементов матрицы A, стоящих на пересечении строк α и столбцов β. Как показано автором [1]

$$\operatorname{val} A(X)=\max_{\alpha}\min_{\beta}\left[IA_{\alpha\beta}^{-1}(X)\,I^T\right]^{-1}=\min_{\beta}\max_{\alpha}\left[IA_{\alpha\beta}^{-1}(X)\,I^T\right]^{-1},$$

где I — вектор, состоящий из единиц, число которых соответствует размерности матрицы $A_{\alpha\beta}$, T — знак транспонирования. Поэтому решение параметрической матричной игры сводится к отысканию областей, в которых равенство минимаксов имеет место при фиксированных α и β. Следуя Р. Беллману [2], эти области, т. е. множества

$$X_{\alpha\beta}=\left\{X:\operatorname{val} A(X)=\left[IA_{\alpha\beta}^{-1}(X)\,I^T\right]^{-1}\right\},$$

мы назовем областями решения.

Настоящая заметка посвящается исследованию областей решения игры с матрицей $A(X)$. Множества $X_{\alpha\beta}$ в общем случае мы опишем системами неравенств (3) и (4), а для случая когда

$$a_{ij}(X)=\alpha_{ij}X^T+\beta_{ij},\quad \alpha_{ij}=(\alpha_{ij}^{(1)},\ \alpha_{ij}^{(2)},\ \ldots,\ \alpha_{ij}^{(s)}),\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

и α, β состоят только из двух элементов, укажем их структуру.

Обозначим $\bar{a}_{i\cdot}(X)$ i-ю строку матрицы $A_{\{1,2,\ldots,m\}\beta}(X)$, $\bar{a}_{\cdot j}(X)$ — j-ый столбец матрицы $A_{\alpha\{1,2,\ldots,n\}}(X)$, $\operatorname{adj} A$ — присоединенную матрицу, $O=(0, 0, \ldots, 0)$.

Теорема 1. *Равенство*

$$\operatorname{val} A(X)=\left[IA_{\alpha\beta}^{-1}(X)\cdot I^T\right]^{-1} \tag{2}$$

имеет место для тех и только тех X, для которых выполняется одна из систем неравенств

$$\begin{aligned}
&I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)>O,\\
&I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,\bar{a}_{\cdot j}(X)\geqslant|A_{\alpha\beta}(X)|\ \text{для всех } j\notin\beta,\\
&\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,I^T>O,\\
&\bar{a}_{i\cdot}(X)\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,I^T\leqslant|A_{\alpha\beta}(X)|\ \text{для всех } i\notin\alpha\cdot
\end{aligned} \tag{3}$$

и

$$
\begin{aligned}
&I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X) < O,\\
&I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,\bar{a}_{\cdot j}(X) \leqslant |A_{\alpha\beta}(X)| \quad \textit{для всех } j\notin\beta,\\
&\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,I^T < O,\\
&\bar{a}_{i\cdot}(X)\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,I^T \geqslant |A_{\alpha\beta}(X)| \quad \textit{для всех } i\notin\alpha.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Доказательство. Для того, чтобы вектор-функции $p(X)$ и $q(X)$ были оптимальными стратегиями в игре с матрицей $A(X)$, а $v(X)$ – значением этой игры, необходимо и достаточно (см., напр., [3], стр. 55), чтобы для всех i и j выполнялись неравенства

$$a_{i\cdot}(X)\,q(X)^T \leqslant v(X) \leqslant p(X)\,a_{\cdot j}(X),$$

где $a_{i\cdot}$ – i-я строка, $a_{\cdot j}$ – j-ый столбец матрицы A. Если сюда вместо $p(X)$ и $q(X)$ поставить соответствующие выражения для крайних оптимальных стратегий, полученные Л. С. Шепли и Р. Н. Сноу [4] (см. также [3], стр. 95)

$$p = \frac{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}}{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta} I^T}, \quad q = \frac{\operatorname{adj} A_{\alpha\beta} I^T}{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta} I^T}, \quad v = \frac{|A_{\alpha\beta}|}{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta} I^T}$$

и дополнительно потребовать, чтобы $p(X)$ и $q(X)$ были распределениями вероятностей, то равенство (2) будет иметь место для тех и только тех X, для которых

$$\frac{\bar{a}_{i\cdot}(X)\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X) I^T}{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X) I^T} \leqslant \frac{|A_{\alpha\beta}(X)|}{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X) I^T} \leqslant \frac{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,\bar{a}_{\cdot j}(X)}{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X) I^T} \tag{5}$$

при всех $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$ и

$$\frac{\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X) I^T}{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X) I^T} > O, \quad \frac{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)}{I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X) I^T} > O. \tag{6}$$

Докажем, что

$$
\begin{aligned}
&\bar{a}_{i\cdot}(X)\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,I^T \equiv |A_{\alpha\beta}(X)|,\\
&I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,\bar{a}_{\cdot j}(X) \equiv |A_{\alpha\beta}(X)|
\end{aligned}
\tag{7}
$$

для всех $i\in\alpha$ и $j\in\beta$. Для любой $r\times r$ – матрицы $B=\|b_{ij}\|$, $\operatorname{adj} B=\|B_{ji}\|$ имеет место соотношение

$$b_{1k}B_{1j} + b_{2k}B_{2j} + \ldots + b_{rk}B_{rj} = \begin{cases} |B|, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Поэтому

$$I\operatorname{adj} B\, b_{\cdot j} = \left(\sum_{i=1}^{r} B_{1i},\ \sum_{i=1}^{r} B_{2i},\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{r} B_{ri}\right)\begin{pmatrix} b_{1k}\\ b_{2k}\\ \vdots\\ b_{rk}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (b_{1k}B_{1i} + b_{2k}B_{2i} + \ldots + b_{rk}B_{ri}) = |B|$$

для любого j. Аналогично и для любого i

$$b_{i\cdot}\operatorname{adj} B\, I^T = |B|.$$

Для завершения доказательства тождеств (7) и теоремы остается положить $A_{\alpha\beta}=B$ и обе стороны неравенств (5) и (6) разделить на

$$I\operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(X)\,I^T \neq 0.$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда все $a_{ij}(X)$ – линейные функции.

Теорема 2. *Если имеет место* (1), *то множества*

$$X_{ij} = \left\{ X : \operatorname{val} A(X) = a_{ij}(X) \right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

замкнутые выпуклые множества.

Доказательство. Замкнутость множеств X_{ij} следует из непрерывности $a_{ij}(X)$ и $\operatorname{val} A(X)$.

Пусть в точках s-мерного евклидова пространства $X_1, X_2, \ldots, X_k$

$$\operatorname{val} A(X_t) = a_{i_0 j_0}(X_t), \quad t = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда для всех $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$

$$a_{i j_0}(X_t) \leqslant a_{i_0 j_0}(X_t) \leqslant a_{i_0 j}(X_t), \quad t = 1, 2, \ldots, k.$$

Умножая эти неравенства на

$$\lambda_t \geqslant 0, \quad t = 1, 2, \ldots, k, \quad \sum_{t=1}^{k} \lambda_t = 1,$$

и потом почленно складывая, в силу линейности функций $a_{ij}(X)$, получаем

$$a_{ij_0}\left(\sum_{t=1}^{k} \lambda_t X_t\right) \leqslant a_{i_0 j_0}\left(\sum_{t=1}^{k} \lambda_t X_t\right) \leqslant a_{i_0 j}\left(\sum_{t=1}^{k} \lambda_t X_t\right)$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Но это означает, что (i_0, j_0) является седловой точкой и для $\overline{X} = \sum_{t=1}^{k} \lambda_t X_t$.

Лемма. *Если* $A(x) = \| \alpha_{ij} x + \beta_{ij} \|_{2\times 2}$ $(s = 1)$, *то множество* X_A *тех* x, *для которых матрица* $A(x)$ *седловой точки не имеет и, следовательно,*

$$\operatorname{val} A(x) = \left[I A^{-1}(x) I^T \right]^{-1},$$

есть либо пустое множество, либо один интервал, конечный или бесконечный, либо два бесконечных интервала.

Доказательство. Легко показать на примерах, что все перечисленные альтернативы возможны.

Соотношение $x \in X_A$ означает, что либо

$$\begin{aligned} &a_{11}(x) > a_{12}(x), \quad a_{11}(x) > a_{21}(x), \\ &a_{22}(x) > a_{12}(x), \quad a_{22}(x) > a_{21}(x), \end{aligned} \tag{8}$$

либо

$$\begin{aligned} &a_{12}(x) > a_{11}(x), \quad a_{12}(x) > a_{22}(x), \\ &a_{21}(x) > a_{11}(x), \quad a_{21}(x) > a_{22}(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Во всех остальных случаях матрица $A(x)$ обладает седловой точкой.

В силу теоремы 2 множество X_A есть сумма не более чем пяти интервалов (вся прямая минус не более четырех замкнутых интервалов). Пусть в интервале (a, b) верно (8), а при $x = a$ хотя бы одно из неравенств (8) не выполняется. Тогда в силу линейности $a_{ij}(x)$ оно не выполняется и для всех $x \leqslant a$. То же самое можно сказать относительно точки b. Следовательно, существует только один интервал, в котором верно (8), и, аналогично, один интервал, в котором верно (9). Пусть в точке x_1 верно (8), а в точке x_2 — (9) и для определенности $x_1 < x_2$. Тогда легко видеть, что (8) выполняется для всех $x \leqslant x_1$, а (9) для всех $x \geqslant x_2$. Это и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Множество X_A может отличаться от множества

$$X'_A = \left\{ x : \operatorname{val} A(x) = \left[IA^{-1}(x)\, I^T \right]^{-1} \right\}$$

только крайними точками множества X'_A, если она их содержит. Далее под интервалом мы будем понимать любое из множеств $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$.

Теорема 3. *Если* $A(X) = \| \alpha_{ij} X^T + \beta_{ij} \|_{2\times 2}$, *то множество*

$$X_A = \left\{ X : \operatorname{val} A(X) = \left[IA^{-1}(X)\, I^T \right]^{-1} \right\}$$

либо пустое, либо есть выпуклый многогранник, либо один или два выпуклых бесконечных конуса с общей вершиной и общими ообразующими. Конусы могут быть усеченными. Сечение обоих конусов производит не более чем две гиперплоскости.

Доказательство. Одномерный случай теоремы — это лемма. В двумерном случае, пересекая X_A любой прямой l, в пересечении мы должны получить либо один интервал, либо два бесконечных интервала, так как на прямой l матрица A становится одномерной, оставаясь при этом линейной. Аналогично s-мерная задача сводится к одномерной. Для завершения доказательства достаточно заметить, что сторонами X_A являются гиперплоскости $[IA^{-1}(X) I^T]^{-1} = a_{ij}(X)$ (их всего 4), а невыпуклость X_A в одномерном случае означала бы, что существует одномерная матрица $A(x)$, для которой X_A состоит из двух интервалов, причем хотя бы один из них конечный. Но, в силу леммы это невозможно.

Теорема 4. *Если* $A(x) = \| \alpha_{ij} x + \beta_{ij} \|_{m\times n}$ $(s=1)$, α *и* β *состоят каждая из двух элементов, то множество*

$$X_{\alpha\beta} = \left\{ x : \operatorname{val} A(x) = \left[IA_{\alpha\beta}^{-1}(x)\, I^T \right]^{-1} \right\}$$

есть либо пустое, либо объединение не более чем $m+n-2$ *интервалов.*

Доказательство. В силу доказанной теоремы множество $X_{\alpha\beta}$ есть пересечение множества

$$X'_{\alpha\beta} = \left\{ x : \operatorname{val} A_{\alpha\beta}(x) = \left[IA_{\alpha\beta}^{-1}(x)\, I^T \right]^{-1} \right\}$$

и множества тех x, для которых выполняются неравенства

$$I \operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(x)\, \bar{a}_{\cdot j}(x) \geqslant |A_{\alpha\beta}(x)|, \quad j \notin \beta, \tag{10}$$

$$\bar{a}_{i\cdot}(x) \operatorname{adj} A_{\alpha\beta}(x)\, I^T \leqslant |A_{\alpha\beta}(x)|, \quad i \notin \alpha, \tag{11}$$

или им противоположные. По лемме $X'_{\alpha\beta}$ имеет такую же структуру, как и X_A. Но структуру множества X'_A имеют и решения неравенств (10) и (11), являющихся квадратными или линейными для любого $j \notin \beta$ или $i \notin \alpha$. Поэтому пересечение их содержит не более чем $m+n-2$ интервалов.

В заключение заметим, что подобного рода результаты для $X_{\alpha\beta}$, когда α и β имеют более двух элементов, можно получить с помощью теоремы 1 (тривиально в случае, когда все строки или столбцы, за исключением не более двух, постоянны). Следует отметить, что элементы $a_{ij}(X)$, $i \notin \alpha$ и $j \notin \beta$, никак не влияют на $\mathrm{val}\, A_{\alpha\beta}$ и $X_{\alpha\beta}$.

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Поступила в редакцию
26.VI.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Вилкас. Некоторые функциональные свойства значения матричной игры, Литовский мат. сб., т. 3, 1 (1963).
2. Р. Беллман. Динамическое программирование, ИИЛ, Москва, 1960.
3. Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр, Физматгиз, Москва, 1960.
4. L. S. Shapley, R. N. Snow. Basic solutions of diserete games, Contr. to the theory of games, vol. 1, Princeton, 1950, 27—36.

PARAMETRINIO MATRICINIO LOŠIMO SPRENDIMO SRITYS

E. VILKAS

(Reziumė)

Tegu $A(X)$ — lošimo matrica, priklausanti nuo s-mačio vektoriaus X. Straipsnyje nagrinėjamos aibės tų X, kuriems duotoji kvadratinė matricos $A(X)$ submatrica $A_{\alpha\beta}(X)$ nustato kraštinę optimalią strategiją, t. y. galioja (2) lygybė. Smulkiau nagrinėjamas tiesinis matricos $A(X)$ atvejis.

THE REGIONS OF DECISION OF THE PARAMETRIC MATRIX GAME

E. VILKAS

(Summary)

Let $A(X)$ be a game matrix depending on s-dimensional vector X. We discuss the sets of vectors X, for which a given submatrix $A_{\alpha\beta}(X)$ of matrix $A(X)$ defines a basic solution of game, i. e. equation (2) is hold. More detally is studied case of linear matrix $A(X)$.