III LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1963

ПОВЕДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ЕЕ МОДУЛЯ

Ш. И. СТРЕЛИЦ

Содержание

Введение

Виман и Валирон (см., например, [2]) разработали метод, с помощью которого они изучали поведение целых трансцендентных функций (а также голоморфных функций в круге) при больших значениях их модулей. Этими авторами были найдены предельные соотношения для производных в точках на концентрических окружностях $|z|=r$, в которых значение модуля функции близко к значению его максимума на соответствующих окружностях. Эти соотношения с успехом были использованы для установления порядков роста целых трансцендентных решений определенных классов обыкновенных дифференциальных уравнений. Иные соотношения в методе Вимана – Валирона были применены при изучении вопросов покрытия кругов значениями целых трансцендентных функций. В исследованиях таких вопросов удобен подход Макинтайра в обсуждаемой теории. Виман и Валирон, затем Заксер исходили при построении и развитии теории из степенных разложений рассматриваемых функций в окрестности начала координат. Важнейшими понятиями в этой теории являются центральный индекс и максимальный член тейлоровского разложения функций. Инструментом в этих исследованиях есть стандартный ряд, на основании которого строятся мажорантные ряды для сравнения с данными (см., например, [2]). Макинтайр в своих работах, как правило, не возвращается к исходным рядам Вимана – Валирона (см. [7]). Островский в работе [11] применил метод Вимана – Валирона к решению новых задач, использовав при этом идею Макинтайра.

В предлагаемой вниманию читателей работе метод Вимана – Валирона выводится по новому. Вместо центрального индекса мы вводим новую функцию, не связанную со степенными разложениями, а непосредственно связанную с максимумом модуля изучаемых функций. Изучение функции при больших значениях ее модуля мы проводим локально. Это позволяет перенести ряд результатов, известных в теории Вимана – Валирона в случае целых трансцендентных функций, на функции других классов (например, на функции, регулярные в углу, в полосе и др.). Заметим, что функция, которую мы вводим с помощью максимума модуля, о которой сказано выше, встречается уже в работах Макинтайра. В настоящей работе эта функция является центральной и используется систематически.

Преимущество метода, принятого нами, заключается, на наш взгляд, в его простоте, в возможных обобщениях, а также в его годности к исследованию целых трансцендентных функций многих комплексных переменных. Результаты, полученные этим путем в теории целых трансцендентных функций многих комплексных переменных, мы намереваемся изложить в отдельной статье.

§ 1. Предложения о возрастающих функциях

1.1. Р. Неванлинна, обобщая известную лемму Бореля о возрастающих функциях [6], доказал следующее предложение [10].

Лемма Р. Неванлинны. *Пусть $h(x)>0$ неубывающая и непрерывная справа на полуоси $x>0$ функция, стремящаяся в бесконечность вместе с x. Пусть, далее, $\varphi(t)$ – убывающая и непрерывная функция на полуоси $t>0$.*

Если

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\,dt<\infty, \tag{1.1.1}$$

то, за исключением некоторого множества интервалов E на полуоси $x>0$ конечной меры (число исключаемых интервалов на каждом ограниченном отрезке конечно) верно неравенство:

$$h\left[x+\varphi\left(h(x)\right)\right]-h(x)<1. \tag{2.1.1}$$

Если же

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\,dt=\infty, \tag{3.1.1}$$

то можно найти такую возрастающую и непрерывную функцию $h(x)$, для которой неравенство (2.1.1) не будет иметь место ни в одной точке полуоси $x>0$.

Для удобства дальнейших ссылок мы приведем доказательство этой леммы.

Доказательство леммы Р. Неванлинны. Предположим, что имеет место неравенство (1.1.1) и что в точке $x=\zeta_0$ имеет место неравенство, противоположное соотношению (2.1.1), т. е.

$$h\left[\zeta_0+\varphi\left(h(\zeta_0)\right)\right]-h(\zeta_0)\geqslant 1. \tag{4.1.1}$$

Рассмотрим последовательность точек

$$\tilde\zeta_n=\tilde\zeta_{n-1}+\varphi\left(h(\tilde\zeta_{n-1})\right);\quad \tilde\zeta_1=\zeta_0+\varphi\left(h(\zeta_0)\right). \tag{5.1.1}$$

Мы сейчас покажем, что во всех точках последовательности (5.1.1) неравенства

$$h\left(\tilde\zeta_n+\varphi\left(h(\tilde\zeta_n)\right)\right)-h(\tilde\zeta_n)\geqslant 1 \tag{6.1.1}$$

невозможны. Допустим, что это не так. Тогда

$$h(\bar\zeta_n)\geqslant h(\bar\zeta_{n-1})+1\geqslant h(\bar\zeta_{n-2})+2\geqslant\ldots\geqslant h(\zeta_0)+n. \tag{7.1.1}$$

Из (5.1.1), далее, вытекает в силу убывания функции $\varphi(t)$, что

$$\bar\zeta_n-\bar\zeta_{n-1}=\varphi\left(h(\bar\zeta_{n-1})\right)\leqslant\varphi\left(h(\bar\zeta_0)+n-1\right);\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

и

$$\sum_{n=1}^{N}(\bar\zeta_n-\bar\zeta_{n-1})\leqslant\sum_{n=1}^{N}\varphi\left(h(\bar\zeta_0)+n-1\right)<\varphi\left(h(\bar\zeta_0)\right)+\int\limits_{h(\zeta_0)}^{h(\bar\zeta_0)+N}\varphi(t)\,dt.$$

Поэтому по (1.1.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\bar\zeta_n-\bar\zeta_{n-1})<\varphi\left(h(\bar\zeta_0)\right)+\int\limits_{h(\zeta_0)}^{\infty}\varphi(t)\,dt<\infty,$$

так что $\lim\limits_{n\to\infty}\bar\zeta_n=\eta<\infty$. Но по (7.1.1) $\lim\limits_{n\to\infty}h(\bar\zeta_n)=h(\eta-0)=\infty$, что противоречит условию, наложенному в лемме на функцию $h(x)$. Следовательно, среди точек последовательности (5.1.1) найдется одна $\bar\zeta_{n_0}=\eta_0$, в которой имеет место неравенство (2.1.1). Так как функция $h(x)$ непрерывна справа, то найдется правосторонняя окрестность точки η_0, в которой справедливо (2.1.1). Пусть ζ_1 — первая точка на полуоси $x>\eta_0$, в которой имеет место неравенство (4.1.1) (с заменой ζ_0 на ζ_1). По предыдущему, среди точек последовательности

$$\zeta_n^{(1)}=\zeta_{n-1}^{(1)}+\varphi\left(h(\zeta_{n-1}^{(1)})\right);\qquad \zeta_1^{(1)}=\zeta_1+\varphi\left(h(\zeta_1)\right)$$

найдется такая, в которой верно (2.1.1). Обозначим ее через $\eta_1:\eta_1=\zeta_{n_1}^{(1)}$. Затем мы находим точку ζ_2, первую на полуоси $x>\eta_1$, в которой справедливо (4.1.1) и т. д.

В итоге этого процесса мы выделяем последовательность сегментов $[\zeta_j,\ \eta_j]$; $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, в точках которых неравенство (2.1.1) не всегда имеет место. Далее, на основании (7.1.1)

$$\eta_{j-1}-\zeta_{n_{j-2}}^{(j-1)}=\varphi\left(h(\zeta_{n_{j-2}}^{(j-1)})\right)\leqslant\varphi\left[h(\zeta_{j-1})-n_{j-1}\right]$$

и

$$\eta_{j-1}-\zeta_{j-1}\leqslant\sum_{m=0}^{n_{j-1}}\varphi\left[h(\zeta_{j-1})+m\right]\leqslant\sum_{m=0}^{n_{j-1}}\varphi\left[h(\eta_{j-2})+m\right]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{n_{j-1}}\varphi\left[h(\zeta_0)+n_0+n_1+\ldots+n_{j-2}+m\right]=\sum_{m=n_0+n_1+\ldots+n_{j-2}}^{n_0+n_1+\ldots+n_{j-2}+n_{j-1}}\varphi\left[h(\zeta_0)+m\right].$$

Отсюда

$$\sum_{j=0}^{N}(\eta_j-\zeta_j)\leqslant\sum_{m=0}^{n_0+n_1+\ldots n_N}\varphi\left[h(\zeta_0)+m\right]$$

и

$$\sum_{j=0}^{N}(\eta_j-\zeta_j)<\varphi\left(h(\zeta_0)\right)+\int\limits_{h(\zeta_0)}^{\infty}\varphi(t)\,dt<\infty. \tag{8.1.1}$$

Очевидно, можно несколько расширить исключенные сегменты, не нарушая при этом неравенство (8.1.1).

Этим доказана первая часть леммы Р. Неванлинны.

Допустим теперь, что имеет место неравенство (3.1.1). Функция

$$v=h(x)=\int_{t_0}^{x}\varphi(t)\,dt \tag{9.1.1}$$

возрастает и, кроме того, непрерывно дифференцируема ($\varphi(t)$ — непрерывная функция). Обратная к $h(x)$ функция $x=g(v)$ также возрастает и непрерывно дифференцируема, так как $h'(x)=\varphi(x)\neq 0$. По теореме о конечных приращениях $\left(\text{функция } g'(v)=\frac{1}{\varphi(x)}\text{ возрастает; } x=g(v)\right)$

$$g\left[v+\varphi\left(g(v)\right)\right]-g(v)\geqslant g'(v)\,\varphi\left(g(v)\right)=\frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi(x)=1.$$

Лемма доказана.

Замечание. Вместо неравенства (2.1.1) мы могли рассмотреть неравенство

$$h\left[x+A\varphi\left(h(x)\right)\right]-h(x)<c_0, \tag{10.1.1}$$

где c_0, A — произвольные постоянные. Отличие при доказательстве таким образом видеизмененной леммы заключалось бы только в том, что вместо неравенств (7.1.1) у нас сейчас было бы

$$h(\tilde{\zeta}_n)\geqslant h(\zeta_0)+nc_0.$$

При этом для меры исключаемого множества мы нашли бы верхнюю границу

$$A\left\{\varphi\left(h(x)\right)+\frac{1}{c_0}\int_{h(x_0)}^{\infty}\varphi(t)\,dt\right\}. \tag{11.1.1}$$

2.1. Пусть функции $h(x)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям, перечисленным лемме Р. Неванлинны, и условию (1.1.1). Функция $g(t)=h(e^t)$ также удовлетворяет условиям названной леммы и поэтому, вне некоторого множества интервалов $E'(t)$, полуоси $t>t_0$, мера которого не превосходит величины

$$\varphi[g(t_0)]+\int_{g(t_0)}^{\infty}\varphi(t)\,dt, \qquad g\left(t+\varphi\left(g(t)\right)\right)-g(t)<1.$$

Возвращаясь к переменному x, получим:

$$h\left[xe^{\varphi\left(h(x)\right)}\right]-h(x)<1, \tag{1.2.1}$$

причем

$$\int_{E'(t)}dt=\int_{E(x)}\frac{dx}{x}<\varphi[h(x_0)]+\int_{h(x_0)}^{\infty}\varphi(t)\,dt, \tag{2.2.1}$$

где $E(x)$ — множество интервалов, соответствующее множеству $E'(t)$ полуоси $t>t_0$.

Итак нами доказано следующее предложение:

Лемма 1.2.1. *Пусть $h(x)>0$ — неубывающая и непрерывная справа на полуоси $x>0$ функция и $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\infty$. Пусть, далее, $\varphi(t)>0$ — убывающая и непрерывная на полуоси $t>0$ функция, причем*

$$\int^{\infty}\varphi(t)\,dt<\infty.$$

Тогда, вне некоторого множества интервалов E полуоси $x>0$ конечной логарифмической меры (число исключаемых интервалов на каждом конечном сегменте конечно), справедливо неравенство

$$h\left[xe^{A\varphi(h(x))}\right]-h(x)<c_0, \qquad (3.2.1)$$

где c_0, A — произвольные постоянные. Множество E от чисел c_0, A зависит.

Заметим, что логарифмическая мера множества E меньше, чем число, определенное в (11.1.1).

Ниже всюду под множеством интервалов мы подразумеваем совокупность интервалов, число которых на каждом конечном сегменте конечно.

Сделаем замену $y=xe^{\frac{\tau}{2}}$, где $\tau=2\varphi\left(h(x)\right)$. Тогда из (1.2.1)

$$h\left(ye^{\frac{\tau}{2}}\right)-h\left(ye^{-\frac{\tau}{2}}\right)<c_0.$$

Но $y=xe^{\frac{\tau}{2}}>x$. Поэтому $h(x)\leqslant h(y)$ и $\varphi[h(x)]>\varphi[h(y)]$. Следовательно,

$$h\left(ye^{\varphi(h(y))}\right)-h(y)+h(y)-h\left(ye^{-\varphi(h(y))}\right)<c_0. \qquad (4.2.1)$$

Таким образом справедлива следующая

Лемма 2.2.1. *В условиях леммы 1.2.1, наложенных на функции $h(x)$ и $\varphi(t)$, вне множества интервалов E конечной логарифмической меры, верно неравенство*

$$|h(ye^{\tau})-h(y)|<c_0, \qquad (5.2.1)$$

где $|\tau|\leqslant\varphi[h(x)]$. Логарифмическая мера множества E меньше, чем

$$3\varphi\left[h(y_0)\right]+\frac{2}{c_0}\int\limits_{h(y_0)}^{\infty}\varphi(t)\,dt.$$

Неравенство (5.2.1) следует немедленно из (2.2.1) всюду на полуоси $y>y_0$ за исключением множества интервалов E, соответствующее множеству E^* на полуоси $x>x_0$ из леммы 1.2.1 при замене $y=xe^{\varphi[h(x)]}$.

Пусть $\{(x_j', x_j'')\}$ — последовательность интервалов, составляющая множество E^*. На оси y точкам интервала (x_j', x_j'') после замены $y=xe^{\varphi[h(x)]}$ соответствуют точки, лежащие в интервале (y_j', y_j''), где

$$y_j'=x_j'e^{\varphi[h(x_j')]};\qquad y_j''=x_j''e^{\varphi[h(x_j'')]},$$

так что

$$0\leqslant\sum_j\ln\frac{y_j''}{y_j'}=\sum_j\ln\frac{x_j''}{x_j'}+\sum_j\left\{\varphi[h(x_j')]-\varphi[h(x_j'')]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{E^*}\frac{dt}{t}+\varphi[h(x_0)]-\sum_j\left\{\varphi[h(x_{j-1}'')]-\varphi[h(x_j')]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{E^*}\frac{dt}{t}+\varphi[h(x_0)]<3\varphi[h(x_0)]+\frac{2}{c_0}\int\limits_{h(x_0)}^{\infty}\varphi(t)\,dt.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть E есть множество интервалов, исключенное из полуоси $x>x_0$ в соответствии с леммой 2.2.1. Из доказательств лемм

Р. Неванлинны и 2.2.1 вытекает, что если (x', x'') — составляющий множество E интервал, то

$$x'' - x' \geqslant x' \{ e^{\varphi[h(x')]} - 1 \}. \tag{6.2.1}$$

В частности, если

$$\varphi(t) = \frac{1}{t \ln^{1+\alpha} t}; \qquad \alpha = \text{const} > 0,$$

то

$$x'' - x' \geqslant x' \left[\frac{1}{h(x') \ln^{1+\alpha} h(x')} \right]. \tag{7.2.1}$$

Лемма 3.2.1. *В условиях леммы* 1.2.1, *наложенных на функции* $h(x)$ *и* $\varphi(t)$, *вне некоторого множества интервалов полуоси* E *с*

$$\int_E \frac{dt}{t \ln t} < \infty \tag{8.2.1}$$

верно неравенство

$$|h(ye^{\tau}) - h(y)| < c_0 \tag{9.2.1}$$

при

$$|\tau| \leqslant \varphi[h(x)] \ln x.$$

Доказательство этого предложения мы легко получим, применяя к функции $h(e^t)$ лемму 2.2.1, заметив при этом, что $e^{\varphi(t)} > 1 + \varphi(t)$ и $e^{-\varphi(t)} < 1 - \varphi(t)$ $(t > 0)$.

Здесь следует такое же замечание, какое мы сделали к лемме 2.2.1: если (x', x'') — составляющий интервал множества E, определенного в лемме 3.2.1, то

$$x'' > x' e^{\varphi[h(x')] \ln x'}; \tag{10.2.1}$$

в частности, если $\varphi(t) = \dfrac{1}{t \ln^{1+\alpha} t}$, то

$$x'' > x' e^{\frac{\ln x'}{h(x') \ln^{1+\alpha} h(x')}}. \tag{11.2.1}$$

Лемма 4.2.1. *В условиях леммы* 1.2.1, *наложенных на функции* $h(x)$ *и* $\varphi(t)$, *вне некоторого множества интервалов* E *с*

$$\int_E \frac{dt}{t \ln t} < \infty,$$

верно неравенство

$$h(ye^{\tau}) < qh(y),$$

где $q > 1$ — *произвольное постоянное, множество* E *зависит от* q *и* $0 \leqslant \tau \leqslant \varphi[\ln h(x)] \ln x$.

И здесь следует сказать, что если $(x', x'') \in E$, *то при* $\varphi(t) = (t \ln^{1+\alpha} t)^{-1}$

$$\frac{\ln x''}{\ln x'} > e^{\frac{1}{\ln^{1+\alpha} h(x)}}. \tag{12.2.1}$$

3.1. Мы сейчас переходим к выводу нескольких предложений, подобных изложенным в предыдущих пунктах, при дополнительных условиях, наложенных на функцию $h(x)$ при специальном выборе функции $\varphi(t)$.

Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы Р. Неванлинны и дополнительному условию

$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{\ln_p h(x)}{\ln x} = \rho < \infty, \qquad p \geqslant 1, \tag{1.3.1}$$

где $\ln_p a = \ln(\ln_{p-1} a)$ и $\ln_1 a = \ln a$.

Займемся разностью

$$h(xe^{\tau})-h(x), \tag{2.3.1}$$

где

$$\tau=\Big[h(x)\ln h(x)\ \ldots\ \ln_{p-1}h(x)\Big]^{-1}.$$

Мы сейчас покажем, что существуют точки на полуоси $x\geqslant x_0$, в которых

$$h(xe^{\tau})-h(x)<\rho', \tag{3.3.1}$$

где ρ' — произвольное число, причем $\rho'>\rho$.

Допустим, что в точке x_0 неравенство (3.3.1) не имеет место, т. е.

$$h(x_0e^{\tau_0})-h(x_0)\geqslant\rho',$$

где

$$\tau=\Big[h(x_0)\ln h(x_0)\ \ldots\ \ln_{p-1}h(x_0)\Big]^{-1}.$$

Построим, как в п.1 последовательность точек

$$x_j=x_{j-1}\exp\Big\{h(x_{j-1})\ln h(x_{j-1})\ \ldots\ \ln h(x_{j-1})\Big\}^{-1};$$

$$x_1=x_0\exp\Big\{h(x_0)\ln h(x_0)\ \ldots\ \ln_{p-1}h(x_0)\Big\}^{-1};\qquad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

и покажем, что среди точек этой последовательности найдется одна точка, в которой справедливо неравенство (3.3.1). Допустим, что это не так и что

$$h(x_j)-h(x_{j-1})\geqslant\rho',\qquad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{4.3.1}$$

Положим

$$g(x)=h(x)\ln h(x)\ \ldots\ \ln_{p-1}h(x).$$

Тогда

$$h(x_j)\geqslant h(x_{j-1})+\rho'\geqslant h(x_{j-1})+2\rho'\geqslant\ldots\geqslant h(x_0)+j\rho' \tag{5.3.1}$$

и

$$g(x_j)\geqslant\Big(h(x_0)+j\rho'\Big)\ln\Big(h(x_0)+j\rho'\Big)\ \ldots\ \ln_{p-1}\Big(h(x_0)+j\rho'\Big). \tag{5'.3.1}$$

Поэтому

$$\ln\frac{x_j}{x_{j-1}}\leqslant\frac{1}{\Big(h(x_0)+(j-1)\rho'\Big)\ln\Big(h(x_0)+(j-1)\rho'\Big)\ldots\ln_{p-1}\Big(h(x_0)+(j-1)\rho'\Big)}$$

и

$$\ln\frac{x_N}{x_0}\leqslant\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{\Big(h(x_0)+j\rho'\Big)\ln\Big(h(x_0)+j\rho'\Big)\ldots\ln_{p-1}\Big(h(x_0)+j\rho'\Big)}<$$

$$<\frac{1}{h(x_0)}+\frac{1}{\rho'}\int\limits_{h(x_0)}^{h(x_0)+N\rho'}\frac{dt}{t\ln t\ldots\ln_{p-1}t}=$$

$$=\frac{1}{h(x_0)}+\frac{1}{\rho'}\ln_p\Big(h(x_0)+N\rho'\Big)-\frac{1}{\rho'}\ln_p h(x_0). \tag{6.3.1}$$

Следовательно, если x_0 — достаточно большое число, то

$$\ln x_N<\ln x_0+\frac{1}{\rho'}\ln_p\Big(h(x_0)+N\rho'\Big). \tag{7.3.1}$$

С другой стороны

$$\ln x_N=\frac{\ln x_N}{\ln_p h(x_N)}\cdot\ln_p h(x_N)>\frac{1}{\rho''}\ln_p h(x_N), \tag{8.3.1}$$

где $\rho''>\rho$ произвольное число, которое может быть выбрано сколь угодно близко к ρ, если для этого взять число N достаточно большим. Далее по (5.3.1)

$$\ln h(x_N)>\ln[h(x_0)+N\rho'].$$

Отсюда и из (7.3.1) и (8.3.1)

$$\frac{1}{\rho''}\ln_p[h(x_0)+N\rho']<\ln x_0+\frac{1}{\rho'}\ln_p[h(x_0)+N\rho']$$

или

$$\frac{\rho'}{\rho''}<\frac{\rho'\ln x_0}{\ln_p[h(x_0)+N\rho']}+1. \tag{9.3.1}$$

Как мы уже указали, если N достаточно велико, то $\frac{\rho'}{\rho''}>1$, в то время, как

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\rho'\ln x_0}{\ln_p[h(x_0)+N\rho']}=0.$$

Это означает, что неравенство (9.3.1) при большом значении N противоречиво. Итак, предположение, что неравенство (4.3.1) выполняется при всех j не верно.

Нас теперь интересует логарифмическая мера того множества точек $\bar{E}$, в которых неравенство (3.3.1) не имеет место. Точно также, как это сделано в доказательстве леммы Р. Неванлинны, мы находим последовательность интервалов (ζ_j, η_j); $j=0, 1, 2, \ldots$ содержащих точки, в которых неравенство (3.3.1) не имеет место. При этом концы каждого интервала ζ_j и η_j связаны соотношениями

$$\zeta_j=\zeta_0^{(j)};\quad \zeta_k^{(j)}=\zeta_{k-1}^{(j)}\exp\left\{\frac{1}{h(\zeta_{k-1}^{(j)})\ln h(\zeta_{k-1}^{(j)})\ldots\ln_{p-1}h(\zeta_{k-1}^{(j)})}\right\};\quad \zeta_{n_j}^{(j)}=\eta_j.$$

Неравенство (6.3.1) показывает, что при значении N достаточно большом в соответствии с (5.3.1)

$$\sum_{j=0}^{N}\ln\frac{\eta_j}{\zeta_j}\leqslant\sum_{j=0}^{n_0+n_1+\ldots+n_N}\frac{1}{\left(h(x_0)+j\rho'\right)\ln\left(h(x_1)+j\rho'\right)\ldots\ln_{p-1}\left(h(x_0)+j\rho'\right)}<$$

$$<\frac{1}{\rho'}\ln_p\left(h(x_0)+(n_0+n_1+\ldots+n_N)\rho'\right)<\frac{1}{\rho'}\ln_p h(\eta_N)<\frac{\left(1+o(1)\right)\rho}{\rho'}\ln\eta_N.$$

Таким образом, мы показали, что логарифмическая мера множества точек, в которых неравенство (3.3.1) не всегда выполнимо, содержащегося в промежутке $[x_0, x]$, меньше чем $\frac{\left(1+o(1)\right)\rho}{\rho'}\ln x$. Отсюда следует, что логарифмическая мера дополнения $E(x)=[x_0, x]-\bar{E}\cap[x_0, x]$ не меньше чем $\left\{1-\frac{\left(1+o(1)\right)\rho}{\rho'}\right\}\ln x$, т. е.

$$\int_{E(x)}\frac{dt}{t}>\left\{1-\frac{\left(1+o(1)\right)\rho}{\rho'}\right\}\ln x,$$

где $o(1)\to 0$ при $k\to\infty$ (напомним, что $\rho'>\rho$). Так же, как это сделано в п. 2, легко показать, что неравенство

$$|h(x^\tau)-h(x)|<2\rho', \tag{10.3.1}$$

при

$$|\tau|\leqslant\frac{1}{h(x)\ln h(x)\ldots\ln_{p-1}h(x)},$$

имеет место на множестве интервалов E, обладающем тем свойством, что его пересечение с промежутком $[x_0, x]\,E(x)$ такое, что

$$\int\limits_{E(x)} \frac{dt}{t} > \left(1 - \frac{\left(1+o(1)\right)\rho}{\rho'}\right)\ln x.$$

Сформулируем полученный вывод в виде леммы.

Лемма 1.3.1. *Пусть $h(x) > 0$ — неубывающая и непрерывная справа функция на полуоси $x > x_0$, причем $\lim h(x) = \infty$ и*

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\ln_p h(x)}{\ln x} = \rho < \infty; \qquad (p \geqslant 1).$$

Имеет место неравенство

$$|h(xe^{\tau}) - h(x)| < 2\rho'$$

при

$$|\tau| \leqslant \frac{1}{h(x)\ln h(x)\ldots\ln_{p-1}h(x)},$$

на таком множестве интервалов E, что логарифмическая мера той его части $E(x)$, которая содержится в любом промежутке $[x_0, x]$, если x_0 достаточно велико, больше, чем

$$\left(1 - \frac{\left(1+o(1)\right)\rho}{\rho'}\right)\ln x,$$

4.1. **Лемма 1.4.1.** *Пусть $h(x_0) > 0$ — неубывающая и непрерывная справа на полуоси $x > x_0$ функция с $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$. Пусть, далее, существует такая последовательность точек $\{\tilde{x}_j\}$; $\tilde{x}_j \cdot \uparrow \infty$, что*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln h(\tilde{x}_j)}{\ln \tilde{x}_j} = \rho < \infty. \tag{1.4.1}$$

Тогда найдется такая последовательность точек $\{x_j\}$; $x_j \uparrow \infty$, что

$$|h(x_j e^{\tau}) - h(x_j)| < 2\rho' \tag{2.4.1}$$

при

$$|\tau| \leqslant \frac{1}{h(x_j)};$$

$\rho' > \rho$ — произвольное число.

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $\{\bar{\bar{x}}_j\} = \{\tilde{x}_j^{1-\alpha}\}$, где $\alpha: 1 > \alpha > 0$ — произвольное положительное число такое, что $\rho'(1-\alpha) > \rho$. Очевидно, что при достаточно большом j

$$\ln h(\bar{\bar{x}}_j) \leqslant \ln h(\tilde{x}_j)$$

и поэтому

$$\frac{\rho^*}{1-\alpha} = \varlimsup_{j\to\infty} \frac{\ln h(\bar{\bar{x}}_j)}{\ln \bar{\bar{x}}_j} \leqslant \lim_{j\to\infty} \frac{\ln h(\tilde{x}_j)}{(1-\alpha)\ln \tilde{x}_j} = \frac{\rho}{1-\alpha} > \infty.$$

Покажем, как мы это сделали неоднократно, что среди последовательности точек

$$x_{jk} = x_{jk-1}\exp\left\{\frac{2}{h(x_{jk-1})}\right\}; \qquad x_{j_0} = \bar{\bar{x}}_j$$

найдется такая точка, в которой неравенство

$$h(x_{jk}e^{2|\tau|}) - h(x_{jk}) < 2\rho' \tag{3.4.1}$$

справедливо. Допустим противное. Тогда

$$h(x_{j_k}) \geqslant h(x_{jk-1}) + 2\rho' \geqslant \ldots \geqslant h(x_j) + 2k\rho'.$$

Как и в п. 3 мы легко придем к неравенству (см. (6.3.1)):

$$\ln x_{jN} < \ln x_{j0} + \frac{1}{\rho'} \ln [h(\bar{\bar{x}}_j) + 2N\rho'] - \frac{1}{\rho'} \ln h(\bar{\bar{x}}_j) + \frac{1}{h(x_{j0})}. \qquad (4.4.1)$$

Посмотрим теперь, для каких N будет $x_{jN} < \bar{x}_j$. Согласно (3.4.1) достаточно решить неравенство

$$\ln \bar{\bar{x}}_j + \frac{1}{\rho'} \ln [h(\bar{\bar{x}}_j) + 2N\rho'] - \frac{1}{\rho'} \ln h(\bar{\bar{x}}_j) + \frac{1}{h(\bar{\bar{x}}_j)} < \ln x_j$$

или

$$\frac{1}{\rho'} \ln [h(\bar{\bar{x}}_j) + 2N\rho'] - \frac{1}{\rho'} \ln h(\bar{\bar{x}}_j) < \ln \frac{\bar{x}_j}{\bar{\bar{x}}_j} - \frac{1}{h(\bar{\bar{x}}_j)} < \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \bar{\bar{x}}_j - \frac{1}{h(\bar{\bar{x}}_j)}.$$

Отсюда

$$N < \frac{h(\bar{\bar{x}}_j)\left\{\bar{\bar{x}}_j^{\frac{2\rho'\alpha}{1-\alpha}} e^{-\frac{1}{h(\bar{\bar{x}}_j)}} - 1\right\}}{2\rho'}.$$

Если $\bar{\bar{x}}_j$ достаточно велико, то можно взять

$$N = \frac{h(\bar{\bar{x}}_j)\bar{\bar{x}}_j^{\frac{2\rho'\alpha}{1-\alpha}}}{4\rho'} - \vartheta; \qquad 0 \leqslant \vartheta < 1. \qquad (5.4.1)$$

Будем считать, что N в неравенстве (4.4.1) удовлетворяет соотношению (5.4.1). Выберем из последовательности $\bar{\bar{x}}_j$ такую последовательность $\bar{\bar{x}}_{j_q}$, что

$$\lim \frac{\ln h(\bar{\bar{x}}_{j_q})}{\ln \bar{\bar{x}}_{j_q}} = \frac{\rho^*}{1-\alpha}$$

и положим в (4.4.1) и (5.4.1) $\bar{\bar{x}}_j = \bar{\bar{x}}_{i_q}$. Как и в предыдущем пункте, мы приходим к неравенству (см. (8.3.1))

$$[1 + o(1)] \frac{1-\alpha}{\rho^*} \ln [h(\bar{\bar{x}}_{i_q}) + 2N\rho'] < \ln \bar{x}'_{i_q} + \frac{1}{\rho'} \ln [h(\bar{\bar{x}}_{i_q}) + 2N\rho'] - \ln h(\bar{\bar{x}}_{i_q}). \qquad (6.4.1)$$

Подставив N из (5.4.1) в (6.4.1), разделив на $\ln \bar{\bar{x}}_{i_q}$ и переходя затем к пределу при $q \to \infty$, найдем неравенство

$$\frac{1-\alpha}{\rho^*}\left(\frac{\rho^*}{1-\alpha} + \frac{2\rho'\alpha}{1-\alpha}\right) \leqslant 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha}$$

или

$$\frac{\rho'(1-\alpha)}{\rho^*} \leqslant 1.$$

Последнее неравенство противоречит выбору числа α, сделанному выше. Это противоречие и доказывает сделанное нами утверждение. Пусть $\{x_j\}$ — последовательность точек, в которой справедливо (3.4.1). Положив в неравенство (3.4.1) $x_j e^{\tau} = y_j$, точно так же, как в п. 3, завершим доказательство леммы.

5.1. Применим лемму 2.2.1 к функции

$$g(x) = \sqrt{\frac{h(x)}{\ln^{1+\alpha} h(x)}}; \qquad 0 < \alpha = \text{Const},$$

если

$$\varphi(t) = \frac{1}{t \ln^{1+\alpha} t}.$$

Функции $g(x)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям леммы Р. Неванлинны при $x > x_0$, если x_0 достаточно велико. По лемме 2.2.1 из оси x исключается множество интервалов, логарифмическая мера которого меньше чем

$$\frac{3}{g(x_0)\ln^{1+\alpha} g(x_0)} + \frac{2}{c_0}\int\limits_{g(x_0)}^{\infty} \frac{dt}{t\ln^{1+\alpha} t} < \frac{2^{\alpha+2}+1}{\alpha c_0}\,\frac{1}{\ln^{\alpha} h(x_0)} = \frac{C(\alpha, c_0)}{\ln^{\alpha} h(x_0)}. \qquad (1.5.1)$$

Вне этого множества

$$\left|\sqrt{\frac{h(xe^{\tau})}{\ln^{1+\alpha} h(xe^{\tau})}} - \sqrt{\frac{h(x)}{\ln^{1+\alpha} h(x)}}\right| < c_0 \qquad (2.5.1)$$

при

$$|\tau| \leqslant \frac{2^{1+\alpha}\left(1+o(1)\right)}{\sqrt{h(x)\ln^{1+\alpha} h(x)}}.$$

Неравенство (2.5.1) будет тем более удовлетворено, если взять

$$|\tau| \leqslant \left(h(x)\ln^{1+\alpha} h(x)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Пусть сейчас $\tau > 0$. По теореме о конечных приращениях

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^{1+\alpha} h(xe^{\tau})}{h(xe^{\tau})}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\ln^{1+\alpha} h(xe^{\tau})} + \frac{1+\alpha}{\ln^{2+\alpha} h(xe^{\tau})}\right)\left(h(xe^{\tau}) - h(x)\right) < C_0.$$

Отсюда (вне множества интервалов E ограниченной логарифмической меры) при

$$0 \leqslant \tau < \frac{1}{\sqrt{h(x)\ln^{1+\alpha} h(x)}}$$

верно неравенство

$$h(xe^{\tau}) - h(x) < 2\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln h(x)}\right)\right) c_0 \sqrt{h(x)\ln^{1+\alpha} h(x)}.$$

Аналогичное неравенство мы нетрудно найдем и при $\tau > 0$.

Итак справедлива

лемма 1.5.1. *Вне некоторого множества интервалов E на полуоси $x > x_0$, где x_0 — достаточно велико, с*

$$\int\limits_{E} \frac{dt}{t} < \frac{2^{\alpha+1}+1}{\alpha c_0}\,\frac{1}{\ln^{\alpha} h(x_0)}$$

верно неравенство

$$|h(xe^{\tau}) - h(x)| < 2c_0\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln h(x)}\right)\right)\sqrt{h(x)\ln^{1+\alpha} h(x)}$$

при

$$|\tau| \leqslant \frac{1}{\sqrt{h(x)\ln^{1+\alpha} h(x)}}.$$

Таким же точно образом из леммы 1.3.1 следует

лемма 2.5.1. *Пусть $h(x) > 0$ — неубывающая и непрерывная справа функция на полуоси $x > x_0$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$ и*

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\ln_p h(x)}{\ln x} = \rho < \infty; \qquad p \geqslant 1.$$

В этих условиях на некотором множестве интервалов, логарифмическая мера подмножества которого на сегменте $[x_0, x]$ при x_0 достаточно большом и любом x не меньше, чем

$$\left(1-\frac{\left(1+o(1)\right)\rho}{\rho'}\right)\ln x,$$

где $\rho'>\rho$ — произвольное число, $o(1)\underset{x\to\infty}{\to}0$, справедливо неравенство

$$|h(xe^{\tau})-h(x)|<C\sqrt{h(x)\ln h(x)\ \ldots\ \ln_{p-1}h(x)}$$

при

$$|\tau|\leqslant\frac{1}{C\sqrt{h(x)\ln h(x)\ldots\ln_{p-1}h(x)}},$$

где $C=2\sqrt{\rho'}$ при $p>2$ и $C=\sqrt{2\rho'}$ при $p=2$; $\rho'>\rho$.

Наконец справедлива

лемма 3.5.1. *Пусть $h(x)>0$ — неубывающая и непрерывная справа функция с $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\infty$. Пусть, далее, $\{\tilde{x}_j\}$, $\tilde{x}_j\uparrow\infty$ такая последовательность, что*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln h(\tilde{x}_j)}{\ln\tilde{x}_j}=\rho<\infty.$$

Тогда существует такая последовательность точек $\{x_j\}$; $x_j\uparrow\infty$, что в них

$$|h(x_je^{\tau})-h(x_j)|<\sqrt{2\rho' h(x_j)}$$

при

$$|\tau|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\rho' h(x_j)}}.$$

Замечание. При выводе леммы 2.5.1 и 3.3.1 надо иметь ввиду, что вне некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры

$$\ln h(xe^{\tau})-\ln h(x)<0(1),$$

при

$$\tau\leqslant\frac{1}{\sqrt{h(x)}}.$$

6.1 Лемма 1.6.1. *Пусть $\ln h(x)>1$ — неубывающая, непрерывная и выпуклая по $\ln x$ функция на полуоси $x>x_0$. Пусть, далее,*

$$\lim_{x\to\infty}H(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{xh'(x)}{h(x)}=\infty;\qquad H(x)=\frac{d\ln h(x)}{d\ln x}\ {}^{*}. \tag{1.6.1}$$

Предположим наконец, что на последовательности точек $\{x_j\}$; $\tilde{x}_j\uparrow\infty$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\ln h(\tilde{x}_j)}{\ln\tilde{x}_j}=\lambda\leqslant\infty. \tag{2.6.1}$$

Тогда найдется такая последовательность точек $\{x_j\}$; $x_j\uparrow\infty$, что

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln H(x_j)}{\ln x_j}=\lambda';\qquad \lambda'\leqslant\lambda. \tag{3.6.1}$$

Наоборот, если на последовательности точек $\{x_j\}$; $x_j\uparrow\infty$ имеет место предельное соотношение (3.6.1), то найдется такая последовательность точек $\{\tilde{x}_j\}$, $\tilde{x}_j\uparrow\infty$, на которой справедливо предельное равенство (2.6.1), причем $\lambda\leqslant\lambda'$.

---

* $h'(x)$ — производная справа от $h(x)$ по x.

Доказательство. Так как функция $\ln h(x)$ выпукла по $\ln x$, то, как известно (см., например, [16]),

$$H(x')\ln\frac{x''}{x'} \leqslant \ln h(x'') - \ln h(x') \leqslant H(x'')\ln\frac{x''}{x'}. \tag{4.6.1}$$

Пусть имеет место (2.6.1). Положим в (4.6.1) $x''=\tilde{x}_j$ и $x'=(1-\alpha)\tilde{x}_j$, где α — постоянное число, причем $0<\alpha<1$. Мы находим:

$$H[(1-\alpha)x_j]\ln\frac{1}{1-\alpha} \leqslant \ln h(\tilde{x}_j). \tag{5.6.1}$$

Из (5.6.1) вытекает, что

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\ln H[(1-\alpha)\tilde{x}_j]}{\ln[(1-\alpha]\tilde{x}_j]} \leqslant \lim_{j\to\infty}\frac{\ln\ln h(\tilde{x}_j)}{\ln\tilde{x}_j}. \tag{6.6.1}$$

Последнее неравенство и доказывает первую половину леммы.

Предположим теперь, что имеет место соотношение (3.6.1). Положив в (4.6.1) $x''=\tilde{x}_j$, $x'=\tilde{x}_0$, найдем:

$$\ln h(\tilde{x}_j) - \ln h(\tilde{x}_0) \leqslant H(\tilde{x}_j)\ln\frac{\tilde{x}_j}{\tilde{x}_0}. \tag{7.6.1}$$

Отсюда, точно также, как мы это сделали выше, вытекает и вторая половина леммы.

Следствие. Справедливы предельные равенства:

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\ln\ln h(x)}{\ln x} = \overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\ln H(x)}{\ln x} \tag{8.6.1}$$

и

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\ln\ln h(x)}{\ln x} = \underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\ln H(x)}{\ln x}. \tag{9.6.1}$$

Эти равенства — простые следствия неравенств (5.6.1) и (7.6.1), которые, если их объединить, принимают следующий вид:

$$H[(1-\alpha)x]\ln\frac{1}{1-\alpha} \leqslant \ln h(x) \leqslant \ln h(x_0) + H(x)\ln\frac{x}{x_0}. \tag{10.6.1}$$

Неравенство (10.6.1) и доказывает следствие.

Замечание. В неравенстве (3.3.1) число ρ' нельзя заменить на число меньше ρ. В этом можно убедиться на примере функции $\exp_p r^\rho$, где $\exp_p r^\rho = \exp\{\exp_{p-1} r^\rho\}$ и $\exp_0 r^\rho = r^\rho$.

§ 2. Функции с однозначным модулем

1.2. Рассмотрим класс B_0 функций $f(z)$ $\left(f(z)\in B_0\right)$ в области $D: z\neq\infty$, обладающих следующими свойствами:

1. $f(z)$ — регулярная в D функция, за исключением, может быть, некоторой последовательности точек b_j; $j=1, 2, 3, \ldots$ с единственной предельной точкой в бесконечности.

2. $|f(z)|$ — есть однозначная функция во всей области D.

3. Какое бы ни было замкнутое множество $\bar{\Delta}\subset D$, найдется такая постоянная $C=C(\bar{\Delta})$, что при $z\in\bar{\Delta}$

$$|f(z)| \leqslant C(\bar{\Delta}, f).$$

Мы сейчас покажем, что из этих свойств вытекает $f(b_j)=0$ и что в достаточной малой окрестности точки b_j справедливо разложение:

$$f(z) = (z-b_j)^{\alpha_j}\tilde{f}(z), \tag{1.1.2}$$

где α_j — некоторые действительные числа, а $\tilde{f}(z)$ — голоморфная функция в некоторой окрестности точек b_j.

Функция $|f^2(z)|=u^2(r,\ \varphi)+v^2(r,\ \varphi)$; $f(z)=u(r,\ \varphi)+iv(r,\ \varphi)$ есть однозначная функция в области D. Поэтому будут однозначными также функции

$$\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}+v\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}}{u^2+v^2} \quad \text{и} \quad \frac{u\dfrac{\partial u}{\partial r}+v\dfrac{\partial v}{\partial r}}{u^2+v^2}.$$

Это означает, что вне точек последовательности b_j; $j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ функция

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{r\left(u\dfrac{\partial u}{\partial r}+v\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)+i\left(u\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}+v\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\right)}{u^2+v^2} \tag{2.1.2}$$

однозначна. Для функции $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ точки b_j являются изолированными особенностями, т. е. либо являются полюсами, либо существенно особыми точками. В самом общем случае в достаточно малой окрестности Δ_0 точки b_j, в которой кроме самой точки b_j нет других точек последовательности b_i, имеем разложение:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{\beta_i}{(z-b_j)^i}. \tag{3.1.2}$$

Возьмем в Δ_0 какую либо точку z_0 и проинтегрируем тождество (3.1.2) от z_0 до z. Имеем:

$$\tilde{f}(z)=C_0(z-b_j)^{\beta_1}e^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{i+1}\frac{\beta_i}{(z-b_j)^i}}, \tag{4.1.2}$$

где C_0 — некоторая постоянная, а Σ' означает, что из суммы исключено слагаемое при $i=1$. Заметим теперь, что по условию 2 определения класса $B_0\ \beta_1$ — число действительное. Функция

$$g(z)=[f(z)]^{\frac{1}{\beta_1}}=C_0^{\frac{1}{\beta_1}}(z-b_j)\exp\left\{\frac{1}{\beta_1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{i+1}\frac{\beta_i}{(z-b_j)^i}\right\} \tag{5.1.2}$$

является таким образом однозначной функцией в Δ_0 и для $g(z)$ точка b_j есть существенная особенность. Но по условию 3 определения класса B_0 это невозможно, так как, если b_j была бы существенной особенностью, то в Δ_0 функция $g^\varepsilon(z)$, $\varepsilon=\pm 1$ была бы неограниченной. Следовательно, в равенстве (5.1.2) все $\beta_m=0$, $m=2,\ 3,\ \ldots$. Этим доказано представление (1.1.2). Число $\beta_1:\beta_1>0$ мы будем называть кратностью нуля b_j ($\beta_1>0$ по условию 3).

2.2. Пусть $f(z)\in B_0$ и $\{a_j\}$ — последовательность нулей, расположенных в порядке возрастания их модулей $|a_j|$, функции $f(z)$ с кратностями α_j. Среди точек этой последовательности имеются и особенности функции $\tilde{f}(z)$. Определим функцию $n(r)$ следующим образом. Установим в круге $|z|<r$ все нули функции $f(z)$. Пусть это будут нули $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{p(r)}$. Тогда, по определению

$$n(r)=\sum_{j=1}^{p(r)}\alpha_j \tag{1.2.2}$$

функция $n(r)$ есть, очевидно, обобщенная функция плотности). Нетрудно видеть, что для функции $f(z)$ имеет место теорема Пуассона – Йенсена. По этой теореме, положив

$$\left|\frac{f(z)}{z^{\alpha_0}}\right|_{z=0}=A_0 \quad \text{и} \quad n(r)=n\left(r, \frac{f(z)}{z^{\alpha}}\right),$$

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi-\alpha_0\ln r-\ln A_0$$

(см., например, [5]).

Легко, далее, установить, что, если $f(z)\not\equiv \mathrm{Const}$, то справедлива теорема максимума: $\max|f(z)|$ в любой замкнутой ограниченной области $\overline{\Delta}$ достигается только на границе. Это доказывается обычным путем, исходя из соответствующего локального свойства: в достаточно малой замкнутой окрестности C_0 произвольной точки z функция $|f(z)|$ достигает максимум на границе. Это очевидно, если $z\neq a_j$; $j=0, 1, 2, \ldots$. Если же $z=a_j$ и a_j есть особенность функции $f(z)$, то соответствующее свойство максимума верно для функции $[f(z)]^{\frac{1}{\alpha_j}}$, а затем и для $f(z)$. Положим

$$\max_{|z|=r}|f(z)|=M(r). \tag{3.2.2}$$

Из теоремы о максимуме функции $|f(z)|$ обычным приемом (рассмотрением функции $\frac{f(z)}{z^{\lambda}}$) легко показать, что $\ln M(r)$ есть выпуклая функция от $\ln r$. Введем еще функцию

$$K(r)=\frac{rM'(r)}{M(r)}, \tag{4.2.2}$$

где под $M'(r)$ мы подразумеваем производную справа (которая всегда существует; см., например, [12]) функции $M(r)$. Как известно, функция $K(r)$ возрастающая (как производная справа выпуклой функции $\ln M(r)$ по $\ln r$) и справедливо неравенство

$$K(r')\ln\frac{r''}{r'}\leqslant \ln M(r'')-\ln M(r')\leqslant K(r'')\ln\frac{r''}{r'}. \tag{5.2.2}$$

Ниже всюду мы предполагаем, что $\lim\limits_{r\to\infty}K(r)=\infty$. Отсюда на основании неравенства (5.2.2) вытекает, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{\ln r}=\infty. \tag{6.2.2}$$

Можно утверждать нечто большее: функция $\frac{\ln M(r)}{\ln r}$ есть при $r>r_0$, где r_0 достаточно велико, возрастающая функция от r. В самом деле, справедливо неравенство ($M'(r)$ – производная справа):

$$\left(\frac{\ln M(r)}{\ln r}\right)'=\frac{1}{r}\left[\frac{\frac{rM'(r)}{M(r)}}{\ln r}-\frac{\ln M(r)}{\ln^2 r}\right]=\frac{K(r)\ln r-\ln M(r)}{r\ln^2 r}>0,$$

если r_0 достаточно велико, как это следует из соотношения (5.5.2), если там положить $r''=r$, $r'=r_0>1$:

$$\ln M(r)<\ln M(r_0)+K(r)\ln r-K(r)\ln r_0 \tag{7.2.2}$$

или

$$K(r)\ln r - \ln M(r) > K(r)\ln r_0 - \ln M(r_0),$$

так как $\lim\limits_{r\to\infty} K(r) = \infty$. Наше утверждение будет доказано, если заметить, что функция $\ln M(r)$ — непрерывная.

3.2. Вернемся к равенству (2.2.2). Из него следует, что при $r > 1$

$$n(r)\tau \leqslant \int\limits_r^{re^\tau} \frac{n(t)}{t}\,dt \leqslant \ln M(re^\tau) - \ln A_0 = \ln re^\tau \cdot \frac{\ln M(re^\tau)}{\ln re^\tau} - \ln A_0. \qquad (1.3.2)$$

Обозначим:

$$\frac{\ln M(r)}{\ln r} = m(r).$$

В предыдущем пункте мы показали, что функция $m(r)$, возрастая, стремится в бесконечность вместе с r. По лемме 3.2.1, положив там $\varphi(t) = \frac{1}{t\ln^{1+\alpha} t}$, где $\alpha > 0$ — произвольное постоянное число, вне некоторого множества E, для которого

$$\int\limits_E \frac{dt}{t\ln t} < \infty,$$

найдем при

$$0 < \tau < \frac{\ln r}{\left(\ln m(r)\right)^{1+\alpha}}$$

неравенство

$$m(re^\tau) < q' m(r).$$

Из (1.3.2) тогда следует, что при $r > r_0$, где r_0 достаточно велико, вне некоторого множества интервалов E' с

$$\int\limits_{E'} \frac{dt}{t\ln t} < \infty$$

верно соотношение:

$$n(r) < q' \ln re^\tau \frac{\ln M(r)}{\ln r} \cdot \frac{\ln^{1+\alpha} m(r)}{\ln r} < qm(r)\ln^{1+\alpha} m(r), \qquad (2.3.2)$$

где $q > q'$ — произвольное число и $E' = E'(\alpha)$.

Пусть $\{(r_j', r_j'')\}$ — последовательность интервалов, составляющая множество E'. При $r > \bar r$, где $\bar r$ — достаточно большое число, по замечанию к лемме 4.2.1 выводим, что

$$\infty > \sum_{j=j_0}^{\infty} \int\limits_{r_j'}^{r_j''} \frac{dt}{t\ln t} = \sum_{j=j_0}^{\infty} \ln\frac{\ln r_j''}{\ln r_j'} \geqslant \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{1}{\ln^{1+\alpha} m(r_j')} > \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{1}{m(r_j)\ln^{1+\alpha} m(r_j)}. \qquad (3.3.2)$$

Пусть, по прежнему, a_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ нули функции $f(z) \in B_0$ и α_j их кратности. Предположим, что подпоследовательность $\{\lambda_j''\} = \{|a_j''|\}$ последовательности $\{|a_j|\}$ покрывается множеством E', а подпоследовательность $\{\lambda_j'\} = \{|a_j|\}$, оставшаяся после исключения последовательности $\{\lambda_j''\}$, им не покрывается. Пусть кратности точек a_j' равно α_j'. Построим для последовательности $\{\lambda_j'\}$ функцию кратности

$$\tilde n(r) = \sum_{j=1}^{\tilde p(r)} \alpha_j,$$

где суммирование проводится по всем j, для которых $\lambda'_j < r$. Очевидно

$$\tilde{n}(r) \leqslant n(r).$$

На каждом интервале полуоси $r > \bar{r}_0$, который покрывается множеством E', функция $\tilde{n}(r)$ постоянна. Вне множества E' имеет место неравенство (2.3.2). Отсюда вытекает, что на всей полуоси $r > \bar{r}$

$$n(r) < qm(r)\ln^{1+\alpha} m(r).$$

Из каждой точки λ'_j, как из центра, проведем окрестность длины

$$\frac{2\alpha'_j}{m(\lambda_j)\ln^{1+\beta} m(\lambda_j)}; \qquad \beta > \alpha + 1.$$

Имеем:

$$J = \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{\alpha'_j}{m(\lambda_j)\ln^{1+\alpha} m(\lambda_j)} = \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{d\tilde{n}(t)}{m(t)\ln^{1+\beta} m(t)} = \frac{\tilde{n}(t)}{m(t)\ln^{1+\beta} m(t)}\Bigg|_{\bar{r}}^{\infty} -$$

$$-\int_{\bar{r}}^{\infty} \tilde{n}(t)\, d\left(\frac{1}{m(t)\ln^{1+\beta} m(t)}\right) \leqslant \frac{1}{\ln^{\beta-\alpha} m(r)} - \int_{0}^{\infty} m(t)\ln^{1+\alpha} m(t)\, d\left(\frac{1}{m(t)\ln^{1+\beta} m(t)}\right).$$

В последний интеграл введем замену.

$$y = \frac{1}{m(t)\ln^{1+\beta} m(t)}.$$

Отсюда $m(t) < \dfrac{1}{y}$ и

$$I < \frac{1}{\ln^{\beta-\alpha} m(\bar{r})} + \int_{0}^{R_0} \frac{dy}{y\ln^{\beta-\alpha} y} < \infty,$$

где $R_0 = [m(\bar{r})\ln^{1+\beta} m(\bar{r})]^{-1}$. Итак нами доказано, что ряд

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{\alpha'_j}{m(\lambda_j)\ln^{1+\beta} m(\lambda'_j)} < \infty.$$

Займемся теперь последовательностью точек $\{\lambda''_j\}$, которая покрывается множеством E'. Пусть (r'_j, r''_j) — составляющий множество E' интервал — покрывает точки $\lambda''_i, \lambda''_{i+1}, \ldots, \lambda''_{i+p_i}$. Из точки λ''_i влево на полуоси $r > \bar{r}$ отложим полуинтервал длины

$$\frac{1}{m(\lambda''_j)\ln^{1+\beta} m(\lambda''_i)},$$

а от точки λ''_{i+p_i} — вправо полуинтервал длины

$$\frac{1}{m(\lambda''_{i+p_i})\ln^{1+\beta} m(\lambda''_{i+p_i})}.$$

Очевидно $r'_j < \lambda''_j$. Поэтому

$$\frac{1}{m(\lambda''_{i+l})\ln^{1+\beta} m(\lambda''_{i+l})} < \frac{1}{m(r'_j)\ln^{1+\alpha} m(r'_j)},$$

при любом l. Из (3.3.2), далее, следует, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{m(\lambda''_i)\ln^{1+\beta} m(\lambda''_i)} + \frac{1}{m(\lambda''_{i+p_i})\ln^{1+\beta} m(\lambda''_{i+p_i})}\right\}$$

сходится. Таким образом

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\int\limits_{\lambda_j'\exp\left\{-\alpha_j[m(\lambda_j)\ln^{1+\beta}m(\lambda_j)]^{-1}\right\}}^{\lambda_j'\exp\left\{[m(\lambda_j')\ln^{1+\beta}m(\lambda_j')]^{-1}\alpha_j\right\}}\frac{dt}{t}+\sum_{i=i_0}^{\infty}\int\limits_{\lambda_i''\exp\left\{-[m(\lambda_i'')\ln^{1+\beta}m(\lambda_i'')]^{-1}\right\}}^{\lambda_i''}\frac{dt}{t}+$$

$$+\sum_{i=i_0}^{\infty}\int\limits_{\lambda_{i+p_i}''}^{\lambda_{i+p_i}''\exp\left\{m(\lambda_{i+p_i}'')\ln^{1+\beta}m(\lambda_{i+p_i}'')\right\}^{-1}}\frac{dt}{t}+\int\limits_{E'}\frac{dt}{t\ln t}<\infty.$$

Обозначим $\min(\alpha_j,\ 1)=\beta_j$. Из (7.2.2) вытекает, что $m(r)<K(r)$ при $r>\bar{r}$, если $\bar{r}$ достаточно велико. Мы исключаем из полуоси $r>\bar{r}$ множество интервалов $\tilde{E}$, являющимся теоретической суммой последовательностей интервалов

$$\left\{\left(\lambda_j' e^{-\beta_j'[K(\lambda_j')\ln^{1+\beta}K(\lambda_j')]^{-1}},\quad \lambda_j' e^{\beta_j'[K(\lambda_j')\ln^{1+\beta}K(\lambda_j')]^{-1}}\right)\right\};$$

$$\left\{\left(\lambda_i'' e^{-[K(\lambda_i'')\ln^{1+\beta}K(\lambda_i'')]^{-1}},\quad \lambda_i''\right)\right\};$$

$$\left\{\left(\lambda_{i+p_i}'',\quad e^{[K(\lambda_{i+p_i}'')\ln^{1+\beta}K(\lambda_{i+p_i}'')]^{-1}}\right)\right\}$$

и множества E'. Множество $\tilde{E}$, как мы выше показали, такое, что

$$\int\limits_{\tilde{E}}\frac{dt}{t\ln t}<\infty.$$

Будем считать, что множество $\tilde{E}$ состоит из последовательности интервалов $\{(r_j',\ r_j'')\}$.

4.2. Пусть $r\notin\tilde{E}$ и $\tilde{r}_j''<r<\tilde{r}_{j+1}'$, где $(\tilde{r}_j'',\ \tilde{r}_{j+1}')$ интервал, заключенный между двумя соседними точками $|a_j|$ и $|a_{j+1}|$. Покажем теперь, что в круге $|\eta|<\tau$, где

$$\tau=\frac{1}{2}\ \frac{\gamma_j}{K(r)\ln^{1+\beta}K(r)}$$

и $\gamma_j=\min(\beta_j,\ \beta_{j+1})$, функция $f(\zeta e^{\eta})\ \left(f(z)\in B_0\right)$ в нуль не обращается. $M(r)=|f|(\zeta)$; $|\zeta|=r$. По построению

$$\tilde{r}_j''=|a_j|\,e^{\frac{\beta_j}{K(|a_j|)\ln^{1+\beta}K(|a_j|)}};\qquad \tilde{r}_{j+1}'=|a_{j+1}|\,e^{-\frac{\beta_j}{K(|a_{j+1}|)\ln^{1+\beta}K(|a_{j+1}|)}}.$$

Оценим разности

$$re^{-\frac{\gamma_j}{2K(|r|)\ln^{1+\beta}K(r)}}-|a_j|;\qquad |a_{j+1}|-re^{\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)}}.$$

По (1.4.2) имеем:

$$re^{-\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)}}-|a_j|>r_j''e^{-\frac{\gamma_j}{2K(r_j'')\ln^{1+\beta}K(r_j'')}}-|a_j|\geqslant$$

$$\geqslant|a_j|\exp\left\{\frac{\beta_j}{K(|a_j|)\ln^{1+\beta}K(|a_j|)}-\frac{\gamma_j}{2K(|a_j|)\ln^{1+\beta}K(|a_j|)}\right\}-|a_j|\geqslant 0$$

$\left(\gamma_j=\min(\beta_j,\ \beta_{j+1})\right)$;

$$d=|a_{j+1}|-re^{\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)}}\geqslant|a_{j+1}|-r_{j+1}'e^{\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)}}=$$

$$=|a_{j+1}|\left(1-\exp\left\{\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)}-\frac{\beta_{j+1}}{K(|a_{j+1}|)\ln^{1+\beta}K(|a_{j+1}|)}\right\}\right).$$

Предполагая

$$|a_{j+1}| < re^{\tau}, \tag{2.4.2}$$

получим:

$$d > |a_{j+1}| \left(1 - \exp\left\{\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)} - \frac{\beta_{j+1}}{K(re^{\tau})\ln^{1+\beta}K(re^{\tau})}\right\}\right).$$

Но по лемме 2.2.1 вне некоторого множества интервалов E'' ограниченной логарифмической меры справедливо неравенство

$$K(re^{\tau}) - K(r) < C_0.$$

Если $r \notin E''$, то

$$d > |a_{j+1}| \left(1 - \exp\left\{\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)} - \frac{\beta_{j+1}}{\left(K(r)+C_0\right)\ln^{1+\beta}\left(K(r)+C_0\right)}\right\}\right) =$$

$$= |a_{j+1}| \left(1 - \exp\left\{\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)} - \frac{\left(1+o(1)\right)\beta_{j+1}}{K(r)\ln^{1+\beta}K(r)}\right\}\right) =$$

$$= |a_{j+1}| \left(1 - \exp\left\{\frac{\gamma_j - 2\left(1+o(1)\right)\beta_{j+1}}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)}\right\}\right).$$

Так как по определению $\gamma_j \leqslant \beta_{j+1}$, то

$$\frac{\gamma_j}{2} - \left(1 + o(1)\right)\beta_{j+1} < 0,$$

если j достаточно велико. При таких j $d > 0$ и $|a_{j+1}| > re^{\tau}$. Но последнее противоречит предположению (2.4.2). Итак предположение (2.4.2) невозможно. Мы доказали следующее предложение (сохраняем все термины, введенные в настоящем параграфе).

Теорема 1.2. В круге $|\eta| < \tau$, где

$$\tau = \frac{1}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)},$$

$r \notin E = \tilde{E} \cup E''$, $E = E(\beta)$, причем

$$\int_E \frac{dt}{t\ln t},$$

функция $\left(f(\zeta e^{\eta})\ f(z) \in B_0\right)$ в нуль не обращается.

§ 3. Соотношения для функции класса B_0 в точках максимума ее модуля

1.3. Напомним введенные в предыдущем параграфе обозначения для функций $f(z)$ класса B_0: $\{a_j\}$ — последовательность нулей функции $f(z)$; $\{\alpha_j\}$ — кратности соответствующих нулей, $M(r) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$; $K = K(r) = K(r, f) = \frac{rM'(r)}{M(r)}$ $\left(M'(r)\right.$ — производная справа$\left.\right)$. Кроме условий 1, 2 и 3 (см. п. 1.2), определяющих класс функций B_0, мы ограничим класс рассматриваемых нами функций еще двумя дополнительными условиями:

4.

$$\lim_{r\to\infty} K(r) = \infty$$

(это условие было наложено на функцию $f(z)$ уже в § 2; напомним, что $K(r)$ — функция возрастающая) и

5.

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\ \frac{\ln\frac{+1}{\gamma_j}}{\ln K(|a_j|)}=0.$$

Последнее условие выражает тот факт, что кратности α_j не должны очень быстро стремиться к нулю. Это условие, например, всегда выполнено, если $f(z)$ — целая функция.

2.3. Пусть $r\notin E$, где E — множество интервалов, определенное теоремой 1.2. и $|a_j|<r<|a_{j+1}|$. Обозначим через ζ — точку, в которой функция $f(z)$ достигает максимум на окружности $|z|=|\zeta|=r$; так что $|f(\zeta)|=M(r)$. Введем оператор D по определению

$$Df(z)=z\frac{\partial f}{\partial z};\qquad D^jf=D(D^{j-1}f).$$

Рассмотрим ряд

$$\ln f(\zeta e^{\eta})=\ln f(\zeta)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}D^j\ln f(\zeta)\,\eta^j,\qquad \eta=\tau+i\sigma. \tag{1.2.3}$$

Ряд (1.2.3), как показано в теореме 1.2, сходится в круге

$$|\eta|<\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)},$$

в котором нет нулей функции $f(z)$. Оценим теперь коэффициенты ряда (1.2.3) по действительной части функции

$$L=L(\eta)=\ln f(\zeta e^{\eta})-\ln f(\zeta)-D\ln f(\zeta)\,\eta$$

(см. ниже). Заметим сначала, что ζ можно выбрать так, что

$$D\ln f(\zeta)=\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=K(r).$$

Соответствующее утверждение для целых функций доказано Макинтайром [8] в предположении, что функция $K(r)$ в рассматриваемой точке непрерывна; нами (см. [14]) это равенство было доказано без этого ограничения. Это доказательство сохраняет силу и в случае функций класса B_0. Поэтому мы на соответствующем доказательстве не останавливаемся. Имеем:

$$L=\mathrm{Re}\left\{\ln\frac{f(\zeta e^{\eta})}{f(\zeta)}-K(r)\,\eta\right\}=\ln\left|\frac{f(\zeta e^{\tau})}{f(\zeta)}\right|-K(r)\,\tau\leqslant\ln M(re^{\tau})-\ln M(r)-K(r)\,\tau.$$

По неравенству (5.2.2)

$$L\leqslant[K(re^{\tau})-K(r)]\,\tau.$$

В круге

$$|\eta|\leqslant\frac{\gamma_j}{2K(r)\ln^{1+\beta}K(r)}$$

$\Big($в котором ряд (1.2.3) сходится: $\gamma_j=\min(\beta_j,\ \beta_{j+1})$; $\beta_j=\min(\alpha_j,\ 1)\Big)$ по лемме 4.2.1 при

$$\varphi(t)=\frac{1}{t\ln^{1+\alpha}t};\qquad K(r\,e^{\tau})-K(r)<1. \tag{3.2.3}$$

По условию 5 настоящего параграфа

$$\frac{1}{\gamma_j}\leqslant\left[K(|a_{j+1}|)\right]^{o(1)};\qquad \gamma_j\geqslant\frac{1}{K^{o(1)}(|a_{j+1}|)}>\frac{1}{K^{o(1)}(r)}.$$

так как $r<|a_{j+1}|$. Отсюда следует, что неравенство (3.2.3) будет иметь место также в круге

$$|\eta|<\frac{1}{K^{1+o(1)}(r)}. \tag{4.2.3}$$

Как известно (см., например, [17]), справедлива следующая оценка: если действительная часть ряда

$$h(z)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

в круге $|z|<R$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} h(z)<U,$$

то

$$|a_n|<\frac{2(U-\operatorname{Re} a_0)}{R^n}; \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

В нашем случае ряда (1.2.3) мы получаем:

$$\frac{1}{j!}|D^j \ln f(\zeta)|<2|\tau|^{j-1}=2[K^{1+o(1)}]^{j-1}, \qquad j=2,\ 3,\ 4,\ \ldots.$$

Нами доказано следующее предложение.

Теорема 1.3. *Пусть $r\notin E=E(\beta)$, где E — множество интервалов, определенное теоремой 1.2. Пусть, далее ζ — точка, в которой достигается максимум функции $|f(z)|$; $f(z)\in B_0$ на окружности $|z|=|\zeta|$. Тогда*

$$|D^j \ln f(\zeta)|<2j!\,[K^{1+o(1)}(r)]^{j-1}; \qquad j=2,\ 3,\ 4,\ \ldots \tag{6.2.3}$$

3.3. Наряду с рядом (1.2.3) рассмотрим также ряд

$$f(\zeta e^{\eta})=f(\zeta)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}D^j f(\zeta)\eta^j. \tag{1.3.3}$$

Нашей целью является выразить функции $D^j f(\zeta)$ через $D^i \ln f(\zeta)$. Из (1.2.3) имеем

$$f(\zeta e^{\eta})=f(\zeta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}D^j \ln f(\zeta)\frac{\eta^j}{j!}\right\}=f(\zeta)\sum_{m=0}^{\infty}A_m\eta^m. \tag{2.3.3}$$

Здесь коэффициенты A_m следующего вида:

$$A_m=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_q} B_{i_1\ldots i_q}\prod_{p=1}^{q}\left(D^p\ln f(\zeta)\right)^{i_p}+\frac{1}{m!}K^m(r), \tag{3.3.3}$$

где суммирование проводится по всем целым неотрицательным $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_q$, для которых $\Sigma p i_p=m$; $p<m$; $B_{i_1 i_2,\ldots,i_q}$ — постоянные числа. С другой стороны методом полной математической индукции легко показать, что

$$D^j f(\zeta)=\zeta^j f^{(j)}(\zeta)+j!\sum_{k=0}^{j-1}C_k\zeta^k f^{(k)}(\zeta), \tag{4.3.3}$$

где C_k — постоянные. Из (1.3.3), (2.3.3), (3.3.3) и (4.3.3) вытекает следующее тождество:

$$\frac{\zeta^m f^{(m)}(\zeta)}{f(\zeta)}=\sum_{i_1,\ldots,i_q} B_{i_1\ldots i_q}\prod_{p=1}^{q}\left(D^p\ln f(\zeta)\right]^{i_p}+K^m(r)-\sum_{k=0}^{m-1}C_k\frac{\zeta^k f^{(k)}(\zeta)}{f(\zeta)}, \tag{5.3.3}$$

$$\Sigma p i_p=m; \qquad i_p<m.$$

С помощью полученного тождества (5.3.3) мы теперь докажем следующее предложение.

Теорема 2.3. *Вне некоторого множества интервалов E с*

$$\int_E \frac{dt}{t\ln t} < \infty$$

справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{K^j(r)} \frac{\zeta^j f^{(j)}(\zeta)}{f(\zeta)} = 1. \tag{5.3.3}$$

Доказательство. Тождество (2.2.3) показывает, что соотношение (5.3.3) верно при $j=1$. Допустим теперь, что соотношения (6.3.3) имеют место при $j=1, 2, \ldots, m-1$. Покажем, что предельное равенство (6.3.3) верно и при $j=m$. Для этого разделим тождество (5.3.3) на $K^m(r)$. На основании теоремы 1.2 найдем:

$$\prod_{p=1}^{q} |D^p \ln f(\zeta)|^{i_p} < \tilde{A}_m [K^{1+o(1)}]^{\Sigma(p-1)i_p} = \tilde{A}_m [K^{1+o(1)}]^{m-\Sigma i_p} < \tilde{A}_m [K^{1+o(1)}]^{m-1},$$

где $\tilde{A}_m$ — некоторая постоянная. Следовательно, из (5.3.3)

$$\left| \frac{\zeta^m f^{(m)}(\zeta)}{f(\zeta)} \cdot \frac{1}{K^m} - 1 \right| < \tilde{\tilde{A}}_m K^{-1+o(1)} + \sum_{k=1}^{m-1} |C_k| \frac{\zeta^k f^{(k)}(\zeta)}{f(\zeta)} \frac{1}{K^m} \to 0, \qquad r\to\infty,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Поведение целых трансцендентных функций при больших значениях их модулей

1.4. Результаты предыдущих §§ 2 и 3 можно уточнить и улучшить в случае целых трансцендентных функций. К изложению этого мы и переходим. Для оценки (6.2.3) мы пользовались разложением (1.2.3). Определить радиус сходимости последнего в случае функций класса B_0 и была основной трудностью. В случае целых трансцендентных функций эта задача разрешается сравнительно легко. Мы ниже рассмотрим более общий случай.

Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция, а w — точка на окружности $|z|=r$, в которой

$$|f(w)| > K^{-\beta}(r) M(r), \qquad \beta < \frac{1}{2}. \tag{1.1.4}$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{f(we^{\eta}) e^{-K(r)\eta}}{f(w)} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \eta^j; \qquad \eta = \tau + i\sigma. \tag{2.1.4}$$

Имеем:

$$\left| \frac{f(we^{\eta})}{f(w)} e^{-K(r)\eta} \right| \leqslant K^{\beta}(r) \frac{M(re^{\tau})}{M(r)} e^{-K(r)\tau} =$$

$$= K^{\beta}(r) \exp\{\ln M(re^{\tau}) - \ln M(r) - K(r)\tau\} \leqslant K^{\beta}(r) \exp\{[K(re^{\tau}) - K(r)]\tau\}.$$

Заметим, что по лемме 1.6.1 $\lim\limits_{r\to\infty} K(r) = \infty$. По лемме 1.5.1 при $|\tau| \leqslant [K \ln^{1+\alpha} K]^{-\frac{1}{2}}$, $K = K(r)$, вне некоторого множества интервалов E конечной логарифмической меры на полуоси $r > 0$,

$$|K(re^{\tau}) - K(r)| < \sqrt{K \ln^{1+\alpha} K}$$

и

$$\left|\frac{f(we^{\eta})}{f(w)}\right| e^{-K(r)\tau} < eK^{\beta}(r). \tag{3.1.4}$$

По теореме Коши мы получаем следующие оценки коэффициентов ряда (2.1.4):

$$|A_j| \leqslant 2eK^{\beta}(r)\,[K(r)\ln^{1+\alpha}K(r)]^{\frac{j}{2}}; \qquad j=2,\ 3,\ 4,\ \ldots . \tag{4.1.4}$$

Теорема 1.4. *Пусть* $|w|=r$ *и*

$$|f(w)| > K^{-\beta}(r)\,M(r); \qquad \beta < \frac{1}{2}.$$

В этих условиях вне некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры E функция $f(we^{\eta})$ *в круге*

$$|\eta| < qK^{-\frac{1}{2}-\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K; \qquad K=K(r),$$

где $q: 0<q<1$ *— некоторая постоянная, в нуль не обращается.*

Доказательство. На основании оценки (3.1.4) мы из (2.1.4) выводим, что при

$$|\eta| < qK^{-\frac{1}{2}-\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K; \qquad K=K(r),$$

$$\left|\frac{f(we^{\eta})}{f(w)}e^{-K(r)\eta}\right| \geqslant 1-2eK^{\beta}\sum_{j=1}^{\infty}(K\ln^{1+\alpha}K)^{\frac{j}{2}}|\eta|^{j} = 1-2e\frac{q}{1-qK^{-\beta}} > 0, \tag{5.1.4}$$

если $qk^{-\beta}<1$ и q — достаточно малое постоянное положительное число.

Теорема доказана.

2.4. Приводимые ниже в этом параграфе результаты были в том или ином виде получены Макинтайром [7] и Островским [11]. В нашем изложении все эти результаты получаются единым образом и легко распространяются на функции других классов (соответствующие обобщения мы далее приводим).

Теорему 1.4 мы сейчас сформулируем несколько иначе.

Теорема 2.4. *Пусть* $f(z)$ *— целая трансцендентная функция;* $w: |w|=r$ *— точка, в которой*

$$|f(w)| > K^{-\beta}(r)\,M(r); \qquad \beta < \frac{1}{2}. \tag{1.2.4}$$

В тождестве

$$f(we^{\eta}) = f(w)\,e^{K(r)\eta}\left(1+\omega(\eta)\right) \tag{2.2.4}$$

при

$$|\eta| \leqslant K^{-\frac{1}{2}-\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K; \qquad K=K(r) \tag{3.2.4}$$

справедливо неравенство

$$|\omega(\eta)| < K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K\,|\eta|. \tag{4.2.4}$$

Если $w=\zeta$, *где* ζ *— точка, в которой достигается максимум функции* $|f(z)|$ *на окружности* $|z|=r$, *то*

$$|\omega(\eta)| < (\sqrt{K\ln^{1+\alpha}K}\,|\eta|)^{2}. \tag{5.2.4}$$

Неравенства (4.2.4) и (5.2.4) верны для всех r за исключением, быть может, некоторого множества интервалов E ограниченной логарифмической меры, причем E зависит от $\alpha: E=E(\alpha)$.

Кроме того имеет место предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{K(r)} \frac{wf'(w)}{f(w)} = 1, \tag{6.2.4}$$

где, переходя к пределу, следует, быть может, пропустить множество интервалов E конечной логарифмической меры.

Доказательство. (4.2.4) есть простая перефразировка неравенства (5.1.4) $\Big($замена постоянных в (5.1.4) на единицы возможно за счет увеличения числа $\alpha\Big)$. Неравенство (5.2.4) выводится из того же ряда (2.1.4), если заметить, что при $w=\zeta$ $\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=K(r)$, $A_1=0$ и $\beta=0$. Перейдем теперь к доказательству соотношения (6.2.4). Коэффициент A_1 ряда (2.1.4) равен следующему выражению:

$$A_1=\frac{wf'(w)}{f(w)}-K(r). \tag{7.2.4}$$

Но по (4.1.4)

$$\left|\frac{wf'(w)}{f(w)}-K(r)\right|<K^{\beta+\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K(r).$$

Последнее неравенство и выражает наше утверждение $\Big($следует заметить, что $\beta+\frac{1}{2}<1\Big)$.

3.4. Некоторое уточнение возможно, если изучать функции, удовлетворяющие дополнительным условиям ограничения роста.

Теорема 3.4. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция, причем*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{p+1} M(r,f)}{\ln r}=\rho<\infty. \tag{1.3.4}$$

Пусть, далее, в точке w; $|w|=r$

$$|f(w)|>K^{-\beta}(r)M(r); \qquad \beta<\frac{1}{2}. \tag{2.3.4}$$

На некотором множестве интервалов E, обладающем тем свойством, что логарифмическая мера множества $E_r=E\cap(0,r)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{E_r}\frac{dt}{t}>\left(1-\frac{\big(1+o(1)\big)\rho}{\rho}\right)\ln r, \tag{3.3.4}$$

в тождестве

$$f(we^{\eta})=f(w)\,e^{K(r)\eta}\Big(1+\omega(\eta)\Big)$$

при

$$|\eta|<\frac{1}{4ec'}\cdot\frac{1}{K^{\beta}\sqrt{K\ln K\ldots\ln_{p-1}K}} \tag{4.3.4}$$

функция $\omega(\eta)$ удовлетворяет соотношению

$$|\omega(\eta)|<4e\sqrt{c'}\,K^{\beta}\sqrt{K\ln K\ldots\ln_{p-1}K}\;|\eta|. \tag{5.3.4}$$

Если $w=\zeta$, где ζ — точка, в которой достигается $\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$, то

$$|\omega(\eta)|<\frac{2ec'}{1-q}\left(\sqrt{K\ln K\ldots\ln_{p-1}K}\;|\eta|\right)^2 \tag{6.3.4}$$

при

$$|\eta| < \frac{q}{\sqrt{c'}} \frac{1}{\sqrt{K \ln K \ldots \ln_{p-1} K}} \tag{7.3.4}$$

и $q = \dfrac{\sqrt{1+8e}-1}{4e}$.

Всюду $c' = 2\sqrt{\rho'}$ *при* $p \geqslant 2$ *и* $c' = \sqrt{2\rho'}$ *при* $p = 1$, $\rho' : \rho' > \rho$ — *произвольное число.*

Доказательство. Исходим опять из ряда (2.1.4). По лемме 1.4.1

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_p K(r)}{\ln r} = \rho < \infty.$$

Пусть теперь ρ' — произвольное число, причем $\rho' > \rho$. В соответствии с леммой 2.5.1 на некотором множестве интервалов со свойствами, перечисленными в доказываемой лемме, верно неравенство:

$$\left| \frac{f(we^{\eta})}{f(w)} e^{-K(r)\eta} \right| < eK^{\beta}(r)$$

при

$$|\eta| < \frac{1}{\sqrt{c' K \ln K \ldots \ln_{p-1} K}},$$

где $c' = 4\rho'$ при $p \geqslant 2$ и $c' = 2\rho'$ при $p = 1$. Для коэффициентов ряда (2.1.4) мы сейчас находим $\left(\text{при } |\eta| = (c' K \ln K \ldots \ln_{p-1} K)^{-\frac{1}{2}}\right)$:

$$|A_j| < 2eK^{\beta}(c' K \ln K \ldots \ln_{p-1} K)^{\frac{j}{2}}.$$

Отсюда

$$|\omega(\eta)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |A_j|\,|\eta|^j \leqslant 2eK^{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} [(c' K \ln K \ldots \ln_{p-1} K)^{\frac{1}{2}} |\eta|]^j =$$

$$= 2eK^{\beta}\sqrt{c' K \ln K \ldots \ln_{p-1} K}\,|\eta| \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{c' K \ln K \ldots \ln_{p-1} K}\,|\eta|} =$$

$$= \frac{2e\sqrt{c'}}{1 - qK^{-\beta}} K^{\beta}\sqrt{K \ln K \ldots \ln_{p-1} K}\,|\eta| = \frac{2e\sqrt{c'}\,q}{1 - qK^{-\beta}} < 4e\sqrt{c'}\,q,$$

если

$$|\eta| < \frac{q}{\beta\sqrt{c_1 K \ln K \ldots \ln_{p-1} K}}$$

и r достаточно велико. Если $q < \dfrac{1}{4e\sqrt{c'}}$, то $4e\sqrt{c'}\,q < 1$ и найденное неравенство будет тем более удовлетворено, если

$$|\eta| < \frac{1}{4e\sqrt{c'}} \cdot \frac{K^{-\beta}}{\sqrt{c' K \ln K \ldots \ln_{p-1} K}}.$$

Если $w = \zeta$, то

$$|\omega(\eta)| \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} |A_j|\,|\eta|^j < \frac{2e}{1-q}\left(\sqrt{c' K \ln K \ldots \ln_{p-1} K}\,|\eta|\right)^2 = \frac{2eq^2}{1-q},$$

если

$$|\eta| < \frac{q}{\sqrt{c' K \ln K \ldots \ln_{p-1} K}}.$$

Естественно требовать, чтобы $\dfrac{2eq^2}{1-q} < 1$, т. е. $q < \dfrac{\sqrt{1+8e}-1}{4e}$.

Совершенно так же доказывается и следующее предложение.

Теорема 4.4. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция. Пусть, далее существует такая последовательность точек $\{\bar{r}_j\}$, $\bar{r}_j\uparrow\infty$, что*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\ln M(\bar{r}_j)}{\ln\bar{r}_j}=\rho<\infty.$$

Тогда найдется такая последовательность точек $\{r_j\}$; $r_j\uparrow\infty$, что в тождестве

$$f(w_je^{\eta_j})=f(w_j)\,e^{K(r)\eta_j}\Big(1+\omega(\eta)\Big);\qquad |w_j|=r_j$$

при условии, что в точках w_j

$$|f(w_j)|>K^{-\beta}(r_j)\,M(r_j),\qquad \beta<\frac{1}{2}$$

справедливы оценки (5.3.4) *с* (4.3.4) *и* (6.3.4) *с* (7.3.4).

4.4. Теорема 5.4. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция. Пусть, далее, $\{w\}$ — множество точек, на которых*

$$|f(w)|>K^{-\beta}(r)\,M(r);\qquad |w|=r,\qquad \beta<\frac{1}{2}. \tag{1.4.4}$$

Тогда вне некоторого множества интервалов E ограниченной логарифмической меры

$$|D^j\ln f(w)|<Cj!\,(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^j\ln K. \tag{2.4.4}$$

В частности, если $w=\zeta$, где ζ — точка в которой достигается максимум функции $|f(z)|$ на окружности $|z|=r$, то

$$|D^j\ln f(\zeta)|<Cj!\,(K\ln^{1+\alpha}K)^{\frac{j}{2}}, \tag{3.4.4}$$

где C — некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство. Оценим коэффициенты ряда

$$\ln f(we^{\eta})-\ln f(w)-K(r)\eta=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}D^j\ln f(w)\eta^j+\eta\,[D\ln f(w)-K(r)]. \tag{4.4.4}$$

Как показано в теореме 1.4, ряд (4.4.4) сходится в круге

$$|\eta|<(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^{-\frac{1}{2}},$$

если $|w|$ не принадлежит некоторому множеству интервалов $E=E(\alpha)$ ограниченной логарифмической меры. При $|\eta|\leqslant\sqrt{K\ln^{1+\alpha}K}$ имеем:

$$L=\mathrm{Re}\Big\{\ln f(we^{\eta})-\ln f(w)-K(r)\,\eta\Big\}\leqslant\ln M(re^{\tau})-\ln M(r)-K(r)\tau+\beta\ln K\leqslant$$
$$\leqslant[K(re^{\tau})-K(r)]\,\tau+\beta\ln K\leqslant 1+\beta\ln K<\beta'\ln K,$$

где $\beta':\beta'>\beta$ — некоторая постоянная. Из (4.4.4) при

$$|\eta|=(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^{-1}$$

мы затем получаем

$$\frac{1}{j!}|D^j\ln f(w)|\leqslant 2\beta'(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^j\ln K;\qquad j=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Точно таким же образом с помощью теорем 3.4 и 4.4 доказываются следующие теоремы.

Теорема 6.4. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция, причем*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln_{p+1}M(r)}{\ln r}=\rho<\infty,\qquad p\geqslant 1.$$

Тогда найдется такая последовательность интервалов E со свойством

$$\int\limits_{E_r} \frac{dt}{t} > \left(1 - \frac{\big(1+0\,(1)\big)\rho}{\rho'}\right)\ln r,$$

где $E_r = E \cap (0,\ r)$, *что для этих* r

$$|D^j \ln f(w)| \leqslant 2\beta j!\,(4ec' \sqrt{K \ln K \ldots \ln_{p-1} K} \cdot K^{\beta})^j \ln K \tag{5.4.4}$$

и

$$|D^j \ln f(\zeta)| \leqslant 2j!\,(3c' \sqrt{K \ln K \ldots \ln_{p-1} K})^j, \tag{6.4.4}$$

где $c' = 4\rho'$ *при* $p \geqslant 2$ *и* $c' = 2\rho'$ *при* $p = 1$, $\rho' : \rho' > \rho$ — *произвольное число,* w — *точки, в которых*

$$|f(w)| > K^{-\beta}(r)\,M(r); \qquad |w| = r; \qquad \beta < \frac{1}{2},$$

ζ — *точки, в которой* $|f(\zeta)| = M(r)$.

Теорема 7.4. *Пусть* $f(z)$ — *целая трансцендентная функция и* $\{\tilde r_j\}$, $\tilde r_j \uparrow \infty$ — *последовательность точек, на которой*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln \ln M(\tilde r_j)}{\ln \tilde r_j} = \rho < \infty.$$

Тогда найдется такая последовательность точек $\{r_j\}$; $r_j \uparrow \infty$, *что, если*

$$|f(w_j)| > K^{-\beta}(r_j)\,M(r_j); \qquad |w_j| = r_j; \qquad \beta < \frac{1}{2},$$

то

$$|D^j \ln f(w_i)| < 2\beta' j!\,(6\rho' \sqrt{K})^j \ln K, \qquad \beta' > \beta \tag{7.4.4}$$

и

$$|D^j \ln f(\zeta_i)| < 2j!\,(6\rho' \sqrt{K})^j, \tag{8.4.4}$$

где $\rho' : \rho' > \rho$ — *произвольное число.*

5.4. В этом пункте мы ставим себе целью оценить в тождестве

$$f(we^{\eta}) = f(w)\, e^{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} D^j \ln f(w)\eta^j} \big(1 + \omega_n(\eta)\big) \tag{1.5.4}$$

функцию $\omega_n(\eta)$ при условии, что

$$|f(w)| > K^{-\beta}(r)\,M(r); \qquad |w| = r; \qquad \beta < \frac{1}{2}. \tag{2.5.4}$$

Для этой цели мы обращаемся к неравенствам (2.4.4) и (3.4.4) и ряду (4.4.4). Имеем при $|\eta| \leqslant q\,(K^{\frac{1}{2}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{-1}$, $q < 1$

$$|\ln(1+\omega_n)| = \left|\ln f(we^{\eta}) - \ln f(w) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} D^j \ln f(w)\eta^j\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} D_j \ln f(w)\eta^j\right| \leqslant C \ln K \sum_{j=n+1}^{\infty} (K^{\frac{1}{2}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^j |\eta|^j =$$

$$= C(K^{\frac{1}{2}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{n+1} |\eta|^{n+1} \ln K \sum_{j=0}^{\infty} (K^{\frac{1}{2}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K |\eta|)^j <$$

$$< C \frac{1}{1-q} (K^{\frac{1}{2}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K |\eta|)^{n+1} \ln K. \tag{3.5.4}$$

Аналогично мы находим при $\omega=\zeta$, что

$$|\ln(1+\omega_n)|<\frac{C}{1-q}(K\ln^{1+\alpha}K)^{\frac{n+1}{2}}|\eta|^{n+1}. \qquad (4.5.4)$$

Если в случае (1.5.4) положить

$$|\eta|<(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^{-1}\ln^{-\frac{+1+\gamma}{n+1}}K,$$

где $\gamma>0$ — произвольная постоянная, а в случае (2.5.4)

$$|\eta|<(K\ln^{1+\alpha'}K)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad \alpha'>\alpha,$$

то отсюда и из (1.5.4) $|\ln(1+\omega_n)|=o(1)$ и

$$|\omega_n(\eta)|<(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha'}{2}}K)^{n+1}\ln K|\eta|^{n+1}, \qquad \alpha'>\alpha,$$

а из (2.5.4)

$$|\omega_n(\eta)|<(K\ln^{1+\alpha'}K)^{\frac{n+1}{2}}|\eta|^{n+1}, \qquad \alpha'>\alpha.$$

Итак нами доказана

теорема 8.4. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция и пусть, далее, на множестве точек $\{w\}$; $|w|=r$*

$$|f(w)|>K^{-\beta}(r)M(r); \qquad \beta<\frac{1}{2}.$$

Тогда в тождестве

$$f(we^{\eta})=f(w)e^{\sum_{j=1}^{n}D^j\ln f(w)\eta^j}\left(1+\omega_n(\eta)\right), \qquad (3.5.4)$$

вне некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры $E=E(\alpha)$

$$|\omega_n(\eta)|<(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^{n+1}\ln K|\eta|^{n+1} \qquad (6.5.4)$$

при

$$|\eta|<(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^{-1}\ln^{-\frac{1}{n+1}}K. \qquad (7.5.4)$$

Если $w=\zeta$, где ζ — точка, в которой $|f(\zeta)|=M(r)$; $|\zeta|=r$, то

$$|\omega_n(\eta)|<(K\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^{\frac{n+1}{2}}|\eta|^{n+1} \qquad (8.5.4)$$

при

$$|\eta|<(K\ln^{1+\alpha}K)^{-\frac{1}{2}}$$

(см. [11]).

В более частных предположениях теоремы 6.4 на множестве E, определенном в этой теореме, в тождестве (3.5.4) оценка функции $\omega_n(\eta)$ производится следующим образом. Допустим сначала, что удовлетворено условие (1.4.4). Тогда в точках множества E верно следующее:

$$\left|\ln\left(1+\omega_n(\eta)\right)\right|<\sum_{j=n+1}^{\infty}2\beta\ln K(K^{2\beta+1}\ln K\ldots\ln_{p-1}K)^{\frac{j}{2}}(4ec)^j|\eta|^j=$$

$$=2\beta\ln K(K^{2\beta+1}\ln K\ldots\ln_{p-1}K)^{\frac{n+1}{2}}(4ec)^{n+1}|\eta|^{n+1}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}[(K^{2\beta+1}\ln K\ldots\ln_{p-1}K)^{\frac{1}{2}}4ec|\eta|]^j$$

и при

$$|\eta| < \frac{q}{4ec}\left[(K^{2\beta+1}\ln K \ldots \ln_{p-1} K)\ln^{\frac{1}{n+1}} K\right]^{-1}$$

мы получаем:

$$\left|\ln\left(1+\omega_n(\eta)\right)\right| < \frac{2\beta(4ec)^{n+1}}{1-q\ln^{-\frac{1}{n+1}} K}\left[(K^{2\beta+1}\ln K \ldots \ln_{p-1} K)^{\frac{1}{2}}|\eta|\right]^{n+1}\ln K.$$

Последнее выражение меньше $\frac{1}{4}$, когда $q < \frac{1}{16\beta^{\frac{1}{n+1}}ec}$. Далее, если

$$\left|\ln\left(1+\omega_n(\eta)\right)\right| < A < \frac{1}{4},$$

то, как легко подсчитать, $|\omega_n(\eta)| < 4A$, и следовательно,

$$|\omega_n(\eta)| < 16\beta(4ec)^{n+1}\left[(K^{2\beta+1}\ln K \ldots \ln_{p-1} K)^{\frac{1}{2}}|\eta|\right]^{n+1}$$

при

$$|\eta| < \frac{1}{64e^2c^2\sqrt[n+1]{\beta}}\,\frac{1}{(K^{2\beta+1}\ln K \ldots \ln_{p-1} K)^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{n+1}} K},$$

где $c = 4\rho'$ при $p \geqslant 2$ и $c = 2\rho'$ при $p = 1$.

Аналогичную оценку можно вывести и в том случае, когда $w = \zeta$. Итак справедлива

теорема 9.4. *В условиях теоремы* 6.4 *найдется такая последовательность интервалов E со свойством*

$$\int_{E_r}\frac{dt}{t} > \left(1 - \frac{\left(1+O(1)\right)\rho}{\rho'}\right)\ln r,$$

где $E_r = E \cap (0, r)$, что в тождестве (1.5.4) *при условии* (2.5.4)

$$|\omega_n(\eta)| < \left[(K^{2\beta'+1}\ln K \ldots \ln_{p-1} K)^{\frac{1}{2}}|\eta|\right]^{n+1}$$

при

$$|\eta| < \frac{1}{(K^{2\beta'+1}\ln K \ldots \ln_{p-1} K)^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{n+1}} K}; \qquad \beta' > \beta.$$

Если $w = \zeta\left(|f(\zeta)| = M(r);\ |\zeta| = r\right)$, то

$$|\omega_n(\eta)| < 8(1+12c)\left\{3c\sqrt{K\ln K \ldots \ln_{p-1} K}\,|\eta|\right\}^{n+1}$$

при

$$|\eta| < \frac{4}{1+12c}\cdot\frac{1}{3c\sqrt{K\ln K \ldots \ln_{p-1} K}},$$

где $c = 4\rho'$ при $p \geqslant 2$ и $c = 2\rho'$ при $p = 1$, где $\rho' : \rho' > \rho$ — произвольное число, $E = E(\rho')$)

Точно также справедлива

теорема 10.4. *В условиях теоремы* 7.4 *найдется такая последовательность точек $\{r_j\}$, $r_j \uparrow \infty$, что при выполнении в точках w_j; $|w_j| = r_j$ условия* (2.5.4) *в тождестве* (1.5.4)

$$|\omega_n(\eta)| < \left(K^{\beta'+\frac{1}{2}}|\eta|\right)^{n+1}\ln K; \qquad K = K(r_j)$$

при

$$|\eta| < K^{-\beta' - \frac{1}{2}} \ln^{-\frac{1}{n+1}} K,$$

где $\beta' : \beta' > \beta$ *— произвольное число,* $r_j > r_0(\beta')$.

Если $w_j = \zeta_j \left(|f(\zeta_j)| = M(r_j)\right)$, *то*

$$|\omega_n(\eta)| < 8(1+24\rho')\{6\rho' \sqrt{K}\,|\eta|\}^{n+1}$$

при

$$|\eta| < \frac{4}{1+24\rho'} \cdot \frac{1}{6\rho'\sqrt{K}}; \qquad K = K(r_j),$$

где $\rho' : \rho' > \rho$ *— произвольное число,* $r_j > r_0(\rho')$.

6.4. Заканчивая этот параграф, мы хотим еще вкратце остановиться на оценках функций $D^j \ln f(w)$ в зависимости от плотности нулей функции $f(z)$. Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция и $\{a_j\}$ последовательность ее нулей, причем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{1+\alpha} K(|a_j|)} < \infty, \qquad |a_j| \neq 0, \tag{1.6.4}$$

где $\alpha > 0$ — произвольное число. Если исключить из оси r последовательность интервалов E':

$$\left\{\left(|a_j|\, e^{-\ln^{-(1+\alpha)} K(|a_j|)}, \quad |a_j|\, e^{\ln^{-(1+\alpha)} K(|a_j|)}\right)\right\}$$

ограниченной логарифмической меры, то в силу (1.6.4) в интервале

$$\left(re^{-\ln^{-(1+\alpha)} K(r)}, \quad re^{\ln^{-(1+\alpha)} K(r)}\right); \qquad r \notin E' \cup E''$$

не будет нулей функции $f(z)$ (см. п. 4.2. § 2), где при этом приходится, быть может, дополнительно исключить некоторое множество интервалов E'' конечной логарифмической меры. Если $r \notin E$, то ряд (4.4.4) сходится при

$$|\eta| < \frac{1}{\ln^{1+\alpha} K(r)}, \tag{2.6.4}$$

а тогда при (2.3.4) по лемме 4.4.1

$$\ln|f(we^{\eta})| - \ln|f(w)| - K(r)\tau \leqslant K^{\beta}[K(re^{\tau}) - K(r)]\tau < qK^{\beta+1}|\tau|, \qquad q > 1.$$

Следовательно

$$\frac{1}{j!}|D^j \ln f(w)| < 2qK^{\beta+1}|\tau|^{j-1} = 2qK^{\beta+1}(\ln^{1+\alpha} K)^{j-1}.$$

При $w = \zeta \left(|f(\zeta)| = M(r)\right)$

$$\frac{1}{j!}|D^j \ln f(\zeta)| < 2qK(\ln^{1+\alpha} K)^{j-1}.$$

В частности, эти неравенства верны для функций, вообще не обращающихся в нуль.

Можно получить и другие оценки при иных плотностей распределения. Например, можно показать, что, если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{K^{\lambda}(|a_j|)} < \infty; \qquad \lambda < \frac{1}{2},$$

то

$$\frac{1}{j!}|D^j \ln f(w)| < CK^{\beta+1+\lambda(j-2)} \ln^{1+\alpha} K \tag{3.6.4}$$

и

$$\frac{1}{j!}\,|\,D^j \ln f(\zeta)\,| < CK^{1+\lambda(j-2)} \ln^{1+\alpha} K \qquad (4.6.4)$$

(неравенство (3.6.4) будет иметь место в точках, в которых $|f(w)| > K^{-\beta}(r)\,M(r)$; в обоих рассматриваемых случаях из полуоси $r>0$ следует, возможно, исключить множество интервалов конечной логарифмической меры). Отсюда, также вытекают оценки для функций $\omega_n(\eta)$ в тождестве 1.4.5.

Замечание. В оценках теорем 3.4 и 4.4 функций $\omega(\eta)$ улучшения возможны только за счет уменьшения постоянных множителей. Это можно, например, проиллюстрировать на примерах функций $\exp_p z^n$.

§ 5. Соотношения для производных целой трансцендентной функции при больших значениях ее модуля и модулей ее производных

1.5. Целая трансцендентная функция принадлежит, очевидно, классу B_0 и удовлетворяет дополнительным условиям 4 и 5, наложенных на функции этого класса в п. 1.3. Поэтому справедливы для целой трансцендентной функции $f(z)$ соотношения (6.3.3). В обсуждаемом сейчас случае эти соотношения мы получим в более общих предположениях. К изложению соответствующих результатов мы теперь и переходим. Отметим, что эти соотношения получены в методе Вимана – Валирона при тех же предположениях, что и у нас. Наши рассуждения имеют порой то преимущество, что они могут быть обобщены на функции, определенные в областях, отличной от конечной плоскости.

Покажем теперь, что соотношения (6.3.3), имеют место на множестве точек $\{w\}$, в которых справедливо неравенство

$$|f(w)| > K^{-\beta}(r)\,M(r); \qquad \beta < \frac{1}{2}.$$

Предельные соотношения (6.3.3), которые мы сейчас выведем, будет верны на всей полуоси $r>0$, за исключением, быть может, некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры. В теореме 2.4 нами было доказано предельное равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{K(r)}\,\frac{wf'(w)}{f(w)} = 1. \qquad (1.1.5)$$

Соотношения

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{K^m(r)}\,\frac{w^m f^{(m)}(w)}{f(w)} = 1 \qquad m=2,\ 3,\ 4,\ \ldots \qquad (2.1.5)$$

доказываются буквально также, так в § 2, на основании оценки (2.4.4), которая лучше соответствующей оценки (6.2.3). Так как оценки (2.4.4) верны на всей полуоси $r>0$ за исключением множества интервалов конечной логарифмической меры, то и соотношения (2.1.5) будут верны на том же множестве, что и неравенства (2.4.4).

Заметим, что в частности, формулы (2.1.5) имеют место в точках максимума функции $|f(z)|$, т. е. в точках ζ, где $|f(\zeta)| = M(r)$; $|\zeta| = r$.

2.5. Докажем теперь, что соотношения (2.1.5) имеют место вне некоторого множества интервалов E конечной логарифмической меры, в точках $\{w\}$; $|w|=r$, в которых

$$|f'(w)|>\frac{K^{1-\beta}(r)}{r}M(r);\qquad \beta<\frac{1}{2}. \tag{1.2.5}$$

Для доказательства рассмотрим ряд

$$\frac{f(we^{\eta})}{f(w)}e^{-K(r)\eta}=1+\sum_{j=1}^{\infty}A_j\eta^j. \tag{2.2.5}$$

Имеем $\left(|f(\zeta)|=M(r)\right)$:

$$\frac{K^{1-\beta}(r)M(R)}{|f(w)|}<\left|\frac{wf'(w)}{f(w)}\right|\quad\text{и}\quad\frac{1}{|f(w)|}<\frac{\left|\frac{wf'(w)}{f(w)}\right|}{K^{1-\beta}(r)M(r)}.$$

Тогда, положив $\eta=\tau+i\sigma$, получим:

$$\left|\frac{f(we^{\eta})}{f(w)}e^{-K(r)\eta}\right|<\frac{1}{K^{1-\beta}(r)}\left|\frac{wf'(w)}{f(w)}\right|\frac{M(re^{\tau})}{M(r)}e^{-K(r)\tau}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{K^{1-\beta}(r)}\left|\frac{wf'(w)}{f(w)}\right|e^{[K(re^{\tau})-K(r)]\tau}<\frac{e}{K^{1-\beta}(r)}\left|\frac{wf'(w)}{f(w)}\right| \tag{3.2.5}$$

при

$$|\tau|\leqslant\frac{1}{\sqrt{K\ln^{1-\alpha}K}}$$

(последнее неравенство имеет место вне соответствующего множества интервалов конечной логарифмической меры, вне которого разность $K(re^{\tau})-K(r)$ оценивается по лемме 1.5.1). Далее, по теореме Коши при $|\tau|=(K\ln^{1+\alpha}K)^{-\frac{1}{2}}$

$$|A_j|<\frac{e}{K^{1-\beta}(r)}\left|\frac{wf'(w)}{f(w)}\right|(K\ln^{1+\alpha}K)^{\frac{j}{2}},\qquad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{4.2.5}$$

Нетрудно подсчитать, что $A_1=\frac{wf'(w)}{f(w)}-K(r)$ и в соответствии с (4.1.5)

$$\left|\frac{wf'(w)}{f(w)}-K(r)\right|<eK^{\beta-\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K\left|\frac{wf'(w)}{f(w)}\right|.$$

Отсюда

$$\left|\frac{K(r)}{\frac{wf'(w)}{f(w)}}-1\right|<e\frac{\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K}{K^{\frac{1}{2}-\beta}}$$

и, так как $\beta<\frac{1}{2}$, то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{wf'(w)}{f(w)}\cdot\frac{1}{K(r)}=1. \tag{5.2.5}$$

На основании (5.2.5) оценка (4.2.5) сейчас принимает следующий вид:

$$|A_j|<\left(1+O(1)\right)eK^{\beta}(r)(K\ln^{1+\alpha}K)^{\frac{j}{2}},\qquad j=2,\ 3,\ 4,\ \ldots. \tag{6.2.5}$$

Полученная оценка с точностью до множителя $\left(1+O(1)\right)e$ совпадает с оценкой (4.1.4). Но с помощью этой оценки была получена теорема 1.4, а затем и оценка (2.4.4). Те же рассуждения, что и в предыдущем пункте, приводят нас сейчас к соотношениям (2.1.5). В частности эти соотношения будут верны также при $w=\zeta^*$, где $|f'(\zeta^*)|=M(r,f')$, $|\zeta^*|=r$. В самом деле, как нами было доказано, в точке максимума ζ, где $|f(\zeta)|=M(r)=M(r, f)$, $K(r)=\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}$. Следовательно

$$K(r)\leqslant \frac{rM(r, f')}{M(r, f)}=\frac{r|f'(\zeta^*)|}{M(r, f)}$$

и

$$|f'(\zeta^*)|\geqslant \frac{K(r)}{r}M(r, f).$$

Последнее означает, что в точке ζ^* верно неравенство (1.2.5) с $\beta=0$. Таким образом, по сказанному выше,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta^* f'(\zeta^*)}{f(\zeta^*)}\cdot\frac{1}{K(r)}=1$$

и

$$\frac{rM(r, f')}{K(r)}\leqslant\left(1+o(1)\right)M(r, f). \tag{6.2.5}$$

С другой стороны

$$K(r)=\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\leqslant\frac{rM(r, f')}{M(r, f)}$$

и

$$\frac{rM(r, f')}{K(r)}\geqslant M(r). \tag{7.2.5}$$

Из (6.2.5) и (7.2.5) вытекает следующее неравенство, верное вне указанного выше множества интервалов $E=E^f$:

$$M(r, f')=\left(1+o(1)\right)\frac{K(r)}{r}M(r, f). \tag{8.2.5}$$

3.5. Допустим, что нам известно следующее: если для произвольной целой трансцендентной функции $f(z)$ $\{w\}$ – такое множество точек, что

$$|f^{(j)}(w)|>K^{j-\beta}(r)\,M(r, f);\qquad |w|=r;\qquad \beta<\frac{1}{2}, \tag{1.3.5}$$

где $j:j\leqslant m-1$ – любое целое неотрицательное число, то на этом множестве вне некоторого множества интервалов

$$E_{m-1}=E_f\cup E_{f'}\cup E_{f''}\cup\ldots\cup E_{f^{(m-1)}}$$

ограниченной логарифмической меры $\left(E_{f^{(j)}}\right.$ – множество интервалов, исключаемое при оценке разности $K(re^{\tau}, f^{(j)})-K(r, f^{(j)})$ по лемме $\left.1.5.1\right)$, верны соотношения (2.1.5) и, кроме того, вне E_{m-1}

$$M(r, f^{(j)})=\left(1+o(1)\right)\left(\frac{K}{r}\right)^j M(r, f);\quad K=K(r);\quad j=1, 2, \ldots, m-1 \tag{2.3.5}$$

(как показано в п. 2.5, наши предположения действительно удовлетворены при $m=2$). Мы сейчас покажем, что если $\{w\}$ – множество точек, в которых

$$|f^{(m)}(w)|>\frac{K^{m-\beta}(r)}{r^m}M(r, f);\qquad \beta<\frac{1}{2};\qquad |w|=r, \tag{3.3.5}$$

то на этом множестве вне соответствующего множества интервалов E_{m-1} имеют место соотношения (2.1.5). Кроме того вне E_{m-1}

$$M(r, f^{(m)})=\left(1+o(1)\right)\left(\frac{K}{r}\right)^m M(r, f). \tag{4.3.5}$$

Для доказательства заметим, что по предположению индукции

$$M(r, f^{(m)})=\left(1+o(1)\right)\frac{K^{1-\beta}}{r}M(r, f^{(m-1)}).$$

Если $\tilde{\zeta}$ — точка, в которой $|f^{(m-1)}(\tilde{\zeta})|=M(r, f^{(m-1)})$, то по условию на множестве $\{\tilde{\zeta}\}$ вне E_{m-1} справедливы соотношения (2.1.5), а тогда

$$\tilde{K}(r)=\frac{\tilde{\zeta} f^{(m)}(\tilde{\zeta})}{f^{(m-1)}(\tilde{\zeta})}=\frac{\dfrac{\tilde{\zeta}^m f^{(m)}(\tilde{\zeta})}{f(\tilde{\zeta})}}{\dfrac{\tilde{\zeta}^{m-1} f^{(m-1)}(\tilde{\zeta})}{f(\tilde{\zeta})}}=\left(1+o(1)\right)K(r). \tag{5.3.5}$$

Неравенство (3.3.5) тогда принимает следующий вид:

$$|f^{(m)}(\tilde{w})|>\left(1+o(1)\right)\frac{\tilde{K}^{1-\beta}(r)}{r}M(r, f^{(m-1)}) \tag{6.3.5}$$

и, следовательно, имеют место соотношения вне E_{m-1}:

$$\frac{\tilde{w}^p f^{(m+p)}(\tilde{w})}{f^{(m-1)}(\tilde{w})}=\left(1+o(1)\right)K^{1+p}(r); \qquad p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Тогда $(|\tilde{w}|\notin E_{m-1})$

$$|f^{(m-1)}(\tilde{w})|=\left(1+o(1)\right)\frac{r}{K}|f^{(m)}(w)|>\left(1+o(1)\right)K^{-\beta}M(r, f^{(m-1)})=$$

$$=\left(1+o(1)\right)\frac{K^{m-1-\beta}}{r^{m-1}}M(r, f).$$

Мы убедились, что предположения индукции удовлетворены на множестве $\{\tilde{w}\}$, а поэтому верны соотношения (2.1.5) на нем. Формулы (4.3.5) доказываются буквально так же, как выводятся соотношения (8.1.5). В самом деле, в точке ζ, в которой $|f(\zeta)|=M(r)$, справедливо неравенство (3.3.5), так как

$$\frac{\zeta^m f^{(m)}(\zeta)}{f(\zeta)}=\left(1+o(1)\right)K^m(r)$$

и

$$M(r, f^{(m)})\geqslant\left(1+o(1)\right)\left(\frac{K}{r}\right)^m M(r, f). \tag{7.3.5}$$

С другой стороны в точке ζ^*, в которой $|f^{(m)}(\zeta^*)|=M(r, f^{(m)})$,

$$\frac{\zeta^{*m} f^{(m)}(\zeta^*)}{f(\zeta^*)}=\left(1+o(1)\right)K^m(r)$$

и

$$M(r, f^{(m)})\leqslant\left(1+o(1)\right)\left(\frac{K}{r}\right)^m M(r, f). \tag{8.3.5}$$

Неравенства (7.3.5) и (8.3.5) доказывают наше утверждение.

Сформулируем полученный вывод в виде теоремы.

Теорема 1.5. *Пусть $\{w\}$ — множество точек, на котором модуль целой трансцендентной функции или модули ее производных удовлетворяют одному из неравенств*

$$|f^{(j)}(w)|>\frac{K^{j-\beta}(r)}{r^j}M(r, f); \quad \beta<\frac{1}{2}; \quad |w|=r, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{9.3.5}$$

Тогда вне некоторого множества интервалов E_{m-1} ограниченной логарифмической меры справедливы соотношения

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{K^p(r)}\cdot\frac{w^p f^{(p)}(w)}{f(w)}=1; \qquad p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Теорема 2.5. *Вне множества E_{m-1}, указанного в теореме 1.5, справедливы равенства*

$$M(r, f^{(j)})=\left(1+o(1)\right)\left(\frac{K}{r}\right)^j M(r, f); \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Примечание. *В силу теоремы 2.5 условие (9.3.5) при любом постоянном j эквивалентно условию*

$$|f(w)|>K^{-\beta}(r)M(r).$$

4.5. В этом пункте мы выясняем вопрос о связи функции $K(r)$ с коэффициентами тейлоровского разложения рассматриваемой целой трансцендентной функции $f(z)$:

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\dots . \qquad (1.4.5)$$

Максимальным членом этого ряда называют функцию

$$\mu(r)=\max_i |a_i z^i|; \qquad |z|=r, \qquad (2.4.5)$$

центральным индексом $\nu(r)$ — наибольший из коэффициентов, для которых достигается равенство (2.4.5). Таким образом

$$|a_{\nu(r)} r^{\nu(r)}|=\mu(r). \qquad (3.4.5)$$

Нетрудно видеть, что $\mu(r)$ и $\nu(r)$ функции неубывающие. Кроме того

$$\frac{r\mu'(r)}{\mu(r)} \equiv \nu(r) \qquad (4.4.5)$$

и

$$\ln\mu(r_0)-\ln\mu(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{\nu(t)}{t}\,dt \qquad (6.4.5)$$

[см., например, [2]).

Для коэффициентов степенного разложения (1.4.5) сейчас имеем:

$$|a_j| \leqslant \frac{\mu(r)}{r^j}; \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Очевидно

$$\mu(r) \leqslant M(r,\ f)$$

и, если $\tau>0$,

$$M(r,\ f) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\,r^j \leqslant \mu(re^{\tau})\sum_{j=0}^{\infty}e^{-j\tau}=\mu(re^{\tau})\cdot\frac{1}{1-e^{-\tau}}=$$

$$=|a_{\nu(re^{\tau})}r^{\nu(re^{\tau})}e^{\nu(re^{\tau})\tau}|\frac{1}{1-e^{-\tau}} \leqslant \mu(r)\frac{e^{\nu(re^{\tau})\tau}}{1-e^{-\tau}}. \qquad (7.4.5)$$

Далее, при $\tau\to 0$ $1-e^{-\tau}=\big(1+o(1)\big)\tau$. По лемме 1.2.1 в применении к функции $\nu(r)$ мы находим вне некоторого интервала ограниченной логарифмической меры E, что

$$\nu(re^{\tau})=\big(1+o(1)\big)\nu(r) \qquad (8.4.5)$$

при $\tau=\dfrac{1}{\nu(r)}$.

Из (7.4.5) и (8.4.5) мы сейчас выводим, что

$$\mu(r) \leqslant M(r,\ f) < C\mu(r)\,\nu(r)^{*}, \qquad (9.4.5)$$

где $C>0$ — некоторая постоянная.

По (4.4.5) функция $\ln\mu(r)$ выпуклая функция от $\ln r$ и

$$\nu(r)\tau \leqslant \ln\mu(re^{\tau})-\ln\mu(r) \leqslant \nu(re^{\tau})\tau. \qquad (10.4.5)$$

По (9.4.5)

$$-|\ln C|-\ln\nu(r)+\ln\mu(re^{\tau})-\ln\mu(r) \leqslant M(re^{\tau},\ f)-M(r,\ f) \leqslant$$

$$\leqslant |\ln C|+\ln\mu(re^{\tau})-\ln\mu(r)+\ln\nu(re^{\tau})$$

или, в соответствии с (10.4.5) и (5.2.2),

$$-|\ln C|-\ln\nu(r)+\nu(r)\tau \leqslant K(re^{\tau})\tau \qquad (11.4.5)$$

и

$$K(r)\tau \leqslant \nu(re^{\tau})\tau+\ln\nu(re^{\tau})+|\ln C|. \qquad (12.4.5)$$

---

* В методе Вимана — Валирона доказано более точное неравенство (см., например, [2]).

Далее, вне некоторого множества интервалов E_0 конечной логарифмической меры при $0<\tau\leqslant\left(\nu(r)\ln^{1+\alpha}\nu(r)\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\nu(re^{\tau})=\left(1+o(1)\right)\nu(r) \qquad (13.4.5)$$

и при $0\leqslant\tau\leqslant\left(K(r)\ln^{1+\alpha}K(r)\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$K(re^{\tau})=\left(1+o(1)\right)K(r). \qquad (14.4.5)$$

Тогда вне E_0, как это следует из (11.4.5) и (12.4.5), если в (12.4.5), а замен и в (11.4.5) положить $\tau=\left(\nu(r)\ln^{1+\alpha}\nu(r)\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\nu(r)\leqslant\left(1+o(1)\right)\dot{K}(r)\leqslant\left(1+o(1)\right)\nu(r),$$

или

$$K(r)=\left(1+o(1)\right)\nu(r).$$

Таким образом, как правило, в приведенных раньше теоремах можно заменить функцию $K(r)$ на $\nu(r)$. Все функции, в степенных разложениях, которых начала около координат, модули коэффициентов (с одинаковыми индексами) равны, порождают функции $K(r)$, различающиеся только множителем $\left(1+0(1)\right)$. Поэтому для всех таких функций $f(z)$ в качестве функции сравнения $K(r)$ можно выбрать какую либо одну, например, построенную для ряда с положительными коэффициентами-модулями коэффициентов данных разложений.

§ 6. Обобщения

1.6. Результаты предыдущего параграфа допускают различные обобщения которые мы здесь и изложим. Легко видеть, что в теоремах 1.5 и 2.5 целую функцию можно заменить функцией, регулярной и однозначной в области $|z|>R_0$; $z\neq\infty$, требуя при этом, чтобы $\lim\limits_{r\to\infty}K(r)=\infty$. Действительно, это вытекает из того, что оценки (4.1.4) основаны на теореме Коши для коэффициентов ряда (2.1.4), который сходится в круге $|we^{\eta}|<r-R_0$ $r>R_0$. При больших значениях $r:r>2R_0$ ряд (2.1.4) сходится при $|we^{\eta}|<\frac{r}{2}$. При таких r функция $f(we^{\eta})$ не обращается в нуль в круге $|\eta|<(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^{-1}$. Нетрудно видеть, что все дальнейшие выкладки основаны именно на этом заключении. Этими рассуждениями и обосновывается наше обобщение.

2.6. Пусть, функция $f(z)$ – регулярна в углу

$$\varphi_0<\arg z<\varphi_1, \qquad (1.2.6)$$

$z\neq\infty$. Пусть, далее, $\max|f(z)|$ достигается на дуге окружности $|z|=r$, $\varphi_0<\arg z<\varphi_1$ в точке ζ, так что

$$|f(\zeta)|=\max|f(z)|=M(r), \qquad (2.2.6)$$

причем

$$\varphi_0+\delta\leqslant\arg\zeta\leqslant\varphi_1-\delta,$$

где $\delta>0$ – произвольно малое постоянное число. Если при этом

$$\lim_{r\to\infty} K(r)=\infty, \tag{3.2.6}$$

то справедливы теоремы 1.5 и 2.5 в точках максимума ζ и на любом множестве точек w; $|w|=r$ с $\varphi_0+\delta\leqslant\arg w\leqslant\varphi_0-\delta$, если на этом множестве

$$|f(w)|>K^{-\beta}M(r); \qquad \beta<\frac{1}{2}; \qquad K=K(r). \tag{4.2.6}$$

Для доказательства этих утверждений надо обратиться к ряду (2.1.4) и установить его радиус сходимости, который в нашем случае, как легко видеть, не меньше, чем $\frac{\sin\delta}{2}$. В самом деле, радиус круга с центром на прямой $\arg z=\varphi-\delta$, лежащей в углу (1.2.6), равен $r\sin\delta$. Функция

$$f(we^{\eta})=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(we^{\eta}-w)^j$$

сходится поэтому в области $|w||e^{\eta}-1|<r\sin\delta$. Но неравенство $|e^{\eta}-1|<$ $<\sin\delta$ при $|\eta|<1$ будет тем более удовлетворено, если

$$|\eta|+\frac{|\eta|^2}{2!}+\frac{|\eta|^3}{3!}+\ldots<|\eta|\left(1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\right)=|\eta|(e-1)<\sin\delta,$$

т. е., если $|\eta|\leqslant\frac{\sin\delta}{2}<\frac{\sin\delta}{e-1}$, что мы и утверждали. Отсюда вытекает что ряд (2.1.6) подавно сходится при

$$|\eta|<\frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K}$$

(следует обратить внимание на условие (3.2.6)). Именно это обстоятельство нужно для справедливости выкладок §§ 4 и 5. Этим и доказывается обобщение, сформулированное в начале настоящего пункта.

3.6. Пусть сейчас функция $f(z)$ – голоморфна в углу (1.2.6) и

$$\lim_{r\to\infty} K(r)=\rho<\infty. \tag{1.3.6}$$

Пусть, по прежнему, ζ – точка максимума функции $|f(z)|$ на дуге окружности $|z|=r$; $\varphi_0<\arg z<\varphi_1$, причем

$$\varphi_0+\delta\leqslant\arg\zeta\leqslant\varphi_1-\delta.$$

Ряд (2.1.4), как было показано в предыдущем пункте, сходится при $|\eta|<\frac{\sin\delta}{2}$. Имеем (см. п. 1.4):

$$\left|\frac{f(\zeta e^{\eta})}{f(\zeta)}e^{-K(r)\eta}\right|\leqslant e^{\ln M(re^{\tau})-\ln M(r)-K(r)\tau}\leqslant e^{[K(re^{\tau})-K(r)]\tau}.$$

Но $K(re^{\tau})\to\rho$ при $r\to\infty\left(|\tau|\leqslant|\eta|\leqslant\frac{\sin\delta}{2}\right)$. Поэтому при ограниченных значениях $|\eta|$

$$\left|\frac{f(\zeta e^{\tau})}{f(\zeta)}e^{-K(r)\eta}\right|=1+O(1). \tag{2.3.6}$$

Как и в п. 1.4. нетрудно доказать, что функция $f(\zeta e^{\eta})$ * не обращается в нуль в круге $|\eta|\leqslant\frac{\sin\delta}{4}$. Из ряда (4.4.4) тогда вытекает, что при $|\eta|\leqslant\frac{\sin\delta}{4}$

$$\operatorname{Re}\left\{\ln\frac{f(\zeta e^{\eta})}{f(\zeta)}e^{-K(r)\eta}\right\}\leqslant[K(re^{\tau})-K(r)]=\left(1+O(1)\right)|\tau|$$

* При достаточно больших $|\zeta|$.

и что

$$\left|\frac{1}{j!}D^j\ln f(\zeta)\right|<2\ \ 0(1)\left(\frac{4}{\sin\delta}\right)^{j-1};\qquad j=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} D^j\ln f(\zeta)=0;\qquad j=2,\ 3,\ 4,\ \ldots. \tag{3.3.6}$$

Условие (1.3.6) мы можем переписать следующим образом:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\rho. \tag{4.3.6}$$

Предположим теперь, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta^j f^{(j)}(\zeta)}{f(\zeta)}=\rho(\rho-1)\ldots(\rho-j+1).\qquad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m. \tag{5.3.6}$$

Покажем, что имеет место тождество

$$\frac{\zeta^j f^{(j)}(\zeta)}{f(\zeta)}=F_j\left(D\ln f(\zeta),\ \ D^2\ln f(\zeta),\ \ldots,\ D^j\ln f(\zeta)\right), \tag{6.3.6}$$

где F — полином. Допустим, что соотношение (6.3.6) верно при $j=1,2,\ldots,m$. Воздействуя на тождество (6.3.6) при $j=m$ оператором D получим:

$$\frac{\zeta^{m+1}f^{(m+1)}(\zeta)}{f(\zeta)}+\frac{\zeta^m f^{(m)}(\zeta)}{f(\zeta)}\left(m-\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)=DF_m\left(D\ln f(\zeta),\ \ldots,\ D^m\ln f(\zeta)\right).$$

Но функцию $\dfrac{\zeta^m f^{(m)}(\zeta)}{f(\zeta)}$ на основании предположении индукции можно заменить по формуле (6.3.6). Это и доказывает наше утверждение.

Заметим теперь, что $DF_j\left(D\ln f(\zeta),\ \ldots,\ D^j\ln f(\zeta)\right)$ есть полином, в котором нет слагаемых вида $A(D\ln f)^p$, где A — постоянная. Действительно, если такой член имеется в полиноме F_j, то

$$D(D\ln f)^p=p(D\ln f)^{p-1}D^2\ln f.$$

Поэтому ис (7.3.6) следует по (3.3.6) и (5.3.6)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta^{m+1}f^{(m+1)}(\zeta)}{f(\zeta)}=(\rho-m)\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta^m f^{(m)}(\zeta)}{f(\zeta)}=\rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+1)(\rho-m). \tag{8.3.6}$$

Нами доказано следующее предложение:

Пусть $f(z)$ — регулярная в углу

$$\varphi_0<\arg z<\varphi_1,$$

$z\neq\infty$ функция, максимум модуля которой на дуге окружности $|z|=r$, $\varphi_0<\arg z<\varphi_1$ достигается в точке ζ с

$$\varphi_0+\delta\leqslant\arg\zeta\leqslant\varphi_1-\delta,$$

где $\delta>0$ — произвольно малое постоянное число. Пусть, далее,

$$\lim_{r\to\infty}K(r)=\rho<\infty.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta^p f^{(p)}(\zeta)}{f(\zeta)}=\rho(\rho-1)\ldots(\rho-p+1);\qquad ,p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{9.3.6}$$

Просто доказывается также справедливость соотношений (9.3.6) на множестве точек $\{w\}$; $|w|=r$, при условии

$$\varphi_0+\delta\leqslant\arg w\leqslant\varphi_1-\delta$$

и

$$|f(w)|>B|f(\zeta)|=BM(r),$$

где $B>0$ — произвольнля постоянная.

4.6. Пусть область D содержит полосу H (может быть криволинейную) ширины h. Предположим, что модуль регулярной функции $f(z)$ в D достигает свой максимум на дугах окружностей $|z|=r$, лежащих в D в точках $\zeta \in H$, удаленных от границы полосы H не менее, чем на произвольно малое постоянное число δ $\left(\delta < \frac{h}{2}\right)$. Если дополнительно

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{r}{K(r)} = \lambda < \infty, \tag{1.4.6}$$

то вне некоторого множества интервалов E полуоси $r>0$ ограниченной логарифмической меры верны предельные равенства:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\zeta^p f^{(p)}(\zeta)}{f(\zeta)} \cdot \frac{1}{K^p(r)} = 1. \tag{2.4.6}$$

Докажем это. Ряд (2.1.4) сходится в круге $|\eta| < \frac{1}{K(r)\ln^{1+\alpha} K(r)}$. Действительно, функция $f(\zeta e^{\eta})$ регулярна в области $|\zeta e^{\eta} - \zeta| < \delta$. Если $|\eta|<1$, то приведенное неравенство будет подавно удовлетворено, если (см. п. 3.6) $|\eta| < \frac{\delta}{2r}$. Из условия (2.4.6) вытекает, что $r < CK(r)$, $C = \text{Const}$, а поэтому ряд (2.1.4) будет сходиться в круге $|\eta| < [K(r)\ln^{1-\alpha} K(r)]^{-1}$. Отсюда, буквально также, как это сделано в § 2, мы докажем наше утверждение в начале этого пункта.

5.6. Обобщение, которое мы сейчас приведем, не основано на специфичности нашего метода. Пусть

$$f(z) = h(z) + g(z)$$

мероморфная функция, где $h(z)$ целая трансцендентная функция, для которой верно предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r, h)}{\ln r} = \lambda, \tag{1.5.6}$$

а $g(z)$ — мероморфная функция порядка ρ; $\rho < \lambda$. Пусть $\{a_j\}$ — последовательность полюсов функции $g(z)$. На оси r исключим последовательность интервалов $E: \{(|a_j| - |a_j|^{-\rho'}, |a_j| + |a_j|^{-\rho'})\}$, $\rho' > \rho$. Эта последовательность E_0 конечной меры. Оценим на полуоси $r>0$, вне множества E_0, максимум модуля функции $g(z)$. Функцию $g(z)$ может представить в следующем виде:

$$g(z) = e^{p(z)} \frac{g_1(z)}{g_2(z)}, \tag{2.5.6}$$

где $p(z)$ — полином степени не выше $[\rho]$, а $g_1(z)$ и $g_2(z)$ целые функции порядка не выше ρ. Для функции $|g_1(z)|$ мы имеем очевидное неравенство $|g_1(z)| < Ce^{r^{\rho'}}$, $\rho' > \rho$. Функцию $|g_2(z)|$ вне последовательности колец E_0 оценивается следующим образом:

$$|g_2(z)| > C' e^{-r^{\rho'}} \tag{3.5.6}$$

(см., например, [5]). Из (2.5.6) и (3.5.6) вытекает вне E_0 неравенство:

$$|g(z)| < \tilde{C} e^{2r^{\rho'}}; \qquad \tilde{C} = \text{Const}; \qquad \rho' > \rho. \tag{4.5.6}$$

Подобным же образом мы находим:

$$|g^{(j)}(z)| < C_j e^{2r^{\rho'}}; \qquad C_j = \text{Const}. \tag{5.5.6}$$

Покажем теперь, что вне некоторого множества интервалов E конечной логарифмической меры в точках максимума ζ функции $|h(z)|$ имеют место соотношения:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta^p f^{(p)}(\zeta)}{f(\zeta)}\cdot\frac{1}{K^p(r)}=1;\qquad K(r)=K(r,\ h),\qquad p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m. \quad (6.5.6)$$

В самом деле

$$\frac{f^{(p)}(\zeta)}{f(\zeta)}=\frac{h^{(p)}(\zeta)+g^{(p)}(\zeta)}{h(\zeta)+g(\zeta)}=\frac{h^{(p)}(\zeta)}{h(\zeta)}\cdot\frac{1+\dfrac{g^{(p)}(\zeta)}{h^{(p)}(\zeta)}}{1+\dfrac{g(\zeta)}{h(\zeta)}}. \quad (7.5.6)$$

Но при $r>r_0$

$$h^{(p)}(\zeta)=\left(1+0(1)\right)\left(\frac{K}{\zeta}\right)^p h(\zeta);\qquad K=K(r,\ h),$$

как это следует из соотношений (6.5.6) для целых функций. Поэтому в силу (1.5.6) и (5.5.6) при $r>r_0$; $\lambda'=\lambda'(r_0)$

$$\left|\frac{g^{(p)}(\zeta)}{h^{(p)}(\zeta)}\right|<\frac{C_p e^{2r^{\rho'}}\cdot r^p}{K^p(r)\,e^{r^{\lambda'}+\lambda'}}<C_p r^p e^{2r^{\rho'}-r^{\lambda'}}=C_p r^p\exp\{-r^{\lambda'}(1-2r^{\rho'-\lambda'})\}.$$

Если r_0 достаточно велико, то можно взять $\rho'<\lambda'<\lambda$ и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{g^{(p)}(\zeta)}{h^{(p)}(\zeta)}=0;\qquad |\zeta|\notin E.$$

Эти соображения вместе с (7.5.6) и (2.1.5) доказывают наше обобщение.

§ 7. Мероморфные решения с дефектными значениями одного класса дифференциальных уравнений

1.7. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция с полюсами в точках последовательности $\{a_j\}$ с кратностями $\{n_j\}$, причем последовательность $\{n_j\}$ — ограничена сверху целым числом $\bar{n}$.

Последовательность $\{a_j\}$ упорядочена в порядке неубывания модулей ее членов. Пусть

$$\frac{A_{jn_j}}{(z-a_j)^{n_j}}+\frac{A_{j\,n_j-1}}{(z-a_j)^{n_j-1}}+\ldots+\frac{A_{j1}}{(z-a_j)}- \quad (1.7.1)$$

главные части функции $f(z)$, соответствующие полюсам a_j, и пусть, далее,

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\ln^+\max\limits_k|A_{jn_j}-k|}{\ln|a_j|}=\beta<\infty. \quad (2.7.1)$$

В этих предположениях справедлива

лемма 1.1.7. Мероморфная функция $f(z)$ конечного порядка ρ с главными частями (1.7.1), удовлетворяющими условию (2.7.1), представима в следующем виде:

$$f(z)=h(z)+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{A_{jn_j}}{(z-a_j)^{n_j}}+\frac{A_{jn_j-1}}{(z-a_j)^{n_j-1}}+\ldots+\frac{A_{j1}}{z-a_j}-p_j(z)\right)=h+g, \quad (3.7.1)$$

где $h(z)$ — целая функция, а $p_j(z)$ — полиномы степени $\lambda=[\rho]+[\beta]+1\cdot([x]$ — целая часть x) (ср. с [9]).

Для доказательства рассмотрим точку $z \neq a_j$; $j=1, 2, 3, \ldots$ и $|z| < |a_m| \leqslant |a_{m+p}|$; $p=1, 2, \ldots$. Если $j \geqslant m$, то $\left|\frac{z}{|a_j|}\right| < 1$ и

$$\frac{1}{(z-a_j)^m} = (-1)^m \left(\frac{1}{a_j}\right)^m \left[1 + \binom{m}{1}\frac{z}{a_j} + \binom{m+1}{2}\left(\frac{z}{a_j}\right)^2 + \binom{m+2}{3}\left(\frac{z}{a_j}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \ldots + \binom{q}{m}\left(\frac{z}{a_j}\right)^{q-n+1} + \ldots\right].$$

Следовательно,

$$g_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{A_{jk}}{(z-a_j)^k} = \sum_{k=1}^{n_j} (-1)^k \left(\frac{1}{a_j}\right)^k \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+k-1}{p}\left(\frac{z}{a_j}\right)^p. \tag{4.7.1}$$

Но по (2.7.1)

$$|A_{jk}| < C|a_j|^\alpha, \qquad k=1, 2, 3, \ldots, n_j; \qquad j=1\ 2, 3, \ldots$$

где $\alpha > \beta'$ и $C = C(\alpha)$. Поэтому, в согласии с (4.7.1), заметив, что $\binom{p+k}{p} < C_1 p^k$, найдем

$$\left|\sum_{k=1}^{n_j} (-1)^k A_{jk}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k \sum_{p=\lambda}^{\infty} \binom{p+k-1}{p}\left(\frac{z}{a_j}\right)^p\right| \leqslant \frac{C}{|a_j|^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{n_j}\sum_{p=\lambda}^{\infty} \binom{p+k-1}{p}\left|\frac{z}{a_j}\right|^p <$$
$$< \frac{CC_1\bar{n}}{|a_j|^{1-\alpha}} \sum_{p=\lambda}^{\infty} p^{n}\left|\frac{z}{a_j}\right|^p < \frac{\tilde{C}|z|^\lambda}{|a_j|^{1+\lambda-\alpha}} \sum_{p=0}^{\infty} p^{\bar{n}}\left|\frac{z}{a_j}\right|^p = \frac{\tilde{C}|z|^\lambda}{|a_j|^{1+\lambda-\alpha}}\, h_j(z), \tag{5.7.1}$$

где $h_j(z) = \sum_{p=0}^{\infty} p^{\bar{n}}\left|\frac{z}{a_j}\right|^p$, причем, если $|a_i| > |a_j|$, то $h_i(z) < h_j(z)$.

Определим сейчас полином $p_j(z)$, равный сумме $\lambda - 1$ первых членов разложения функции $g_j(z)$ в окрестности точки $z=0$. Тогда

$$\left|\sum_{j=q}^{N} [g_j(z) - p_j(z)]\right| < \tilde{C}|z|^\lambda \sum_{j=q}^{N} \frac{1}{|a_j|^{\lambda-\alpha+1}} \leqslant \tilde{C}|z|^\lambda h_q(z) \sum_{j=q}^{\infty} \frac{1}{|a_j|^{\lambda-\alpha+1}}. \tag{6.7.1}$$

Но функция $f(z)$ конечного порядка ρ. Поэтому при $\lambda = [\alpha] + [\rho] + 1$ $(=[\beta] + [\rho] + 1$, если α достаточно близко к $\beta)$, $\lambda - \alpha + 1 = [\alpha] - \alpha + [\rho] + 2 > \rho$ и $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{\alpha-\lambda-1} < \infty$. Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |g_j(z) - p_j(z)|$ во всякой ограниченной области, из которой исключены кружки произвольно малых радиусов с центрами в точках a_j.

Лемма доказана.

2.7. Лемма 1.2.7. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного порядка ρ, удовлетворяющая условиям* п. 1.7, *так что имеет место представление* (3.7.1). *Тогда вне кружков C_j радиусов $\frac{1}{|a_j|^\mu}$ с центрами в точках a_j, где $\mu > 0$ — произвольная постоянная, справедливо неравенство*

$$|g(z)| < Cr^{\nu+\beta+\rho'}, \qquad \rho' > \rho, \qquad |z| \leqslant r. \tag{1.2.7}$$

Здесь $\nu = \max(\bar{n}\mu, \lambda - 2, 1)$, $C > 0$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Через $n(r) = n(r, \infty)$ мы, как обычно, обозначаем число полюсов функции $g(z)$ в круге с центром в начале координат и радиуса r. Так как $f(z)$ — мероморфная функция порядка ρ, то $n(r) < Ar^{\rho'}$, где $\rho' > \rho$ и $A = A(\rho')$. Окружим каждый полюс a_j кружком C_j радиуса $|a_j|^{-\mu}$, где $\mu>0$ — некоторая постоянная, центры кружков C_j в точках a_j. Оценим теперь $g(z)$ вне этих кружков C_j. Пусть $m>0$ такое целое число, что $|a_{m-1}|<2r\leqslant|a_m|$. Имеем:

$$|g(z)|<\sum_{j=1}^{m-1}|g_j(z)-p_j(z)|+\sum_{j=m}^{\infty}|g_j(z)-p_j(z)|=\sigma_1+\sigma_2.$$

Но σ_2 оценивается по (6.7.1). При этом, если $|z|\leqslant r$, то

$$h_{m+p}<\frac{\tilde{C}_0}{\left(1-\left|\frac{2}{a_m}\right|\right)^{\tilde{n}}}<c_0=\mathrm{Const}\quad \text{и}\quad \sigma_2<c|z|^{\lambda};\qquad c=\mathrm{Const}.$$

При $j<m$ находим $(|z-a_j|\geqslant|a_j|^{-\mu})$:

$$\frac{|A_jk|}{|z-a_j|^k}<C|a_j|^{\alpha+\tilde{n}\mu};\qquad \alpha>\beta;\qquad c=\mathrm{Const}.$$

Так как $|a_j|<2r$, то

$$\sum_{j=1}^{m-1}|g_j(z)|<C\tilde{n}\cdot n(2r,\ \infty)|a_j|^{\alpha+\tilde{n}\mu}<C\tilde{n}A\,2^{\rho'+\beta+\tilde{n}\mu}r^{\beta+\rho'+\tilde{n}\mu}. \tag{2.2.7}$$

Далее,

$$\sum_{j=1}^{m-1}|p_j(z)|<\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n_j}|A_{jk}|\left|\frac{1}{a_j}\right|^k\left[1+\binom{k}{1}\left|\frac{z}{a_j}\right|+\binom{k+1}{2}\left|\frac{z}{a_j}\right|^2+\right.$$
$$\left.+\ldots+\binom{k+\lambda-2}{\lambda-1}\left|\frac{z}{a_j}\right|^{\lambda-1}\right]<\tilde{n}\cdot n(2r,\ \infty)\tilde{C}_1|a_j|^{\alpha-1}\times$$
$$\times\left(1+\left|\frac{z}{a_j}\right|+\ldots+\left|\frac{z}{a_j}\right|^{\lambda-1}\right)<c_2|a_j|^{\alpha-1}r^{\lambda+\rho'-1}<Br^{\lambda+\rho'+\beta-2}, \tag{3.2.7}$$

если r достаточно велико; $B>0$ — некоторая новая постоянная. Из (2.2.7) и (3.2.7) следует (1.2.7) при $\tilde{n}\mu>\rho+\beta-2$.

Из леммы 1.2.7 и обобщения п. 5.6 вытекает, что, если в представлении 3.1.7) функции $h(z)$ — целая трансцендентная функция, а $g(z)$ — мероморфная функция, удовлетворяющая условиям леммы 1.2.7, то в точках максимума функции $|h(z)|$ имеют место соотношения (6.5.6), так как оценки вида (1.2.7) будут справедливы и для производных $g^{(j)}(z)$.

Заметим еще, что как показано в [9], неванлинновское среднее значение

$$m(r,\ f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta$$

удовлетворяет в случае функции $g(z)$ из (3.7.1) следующему равенству:

$$m(r,\ g)=O(\ln r).$$

Как известно, порядком мероморфной функции по Неванлинне называется порядок функции

$$T(r,\ f)=m(r,\ f)+N(r,\ f);\qquad N(r,\ f)=\int_0^r\frac{n(t,\ \infty)-n(0,\ \infty)}{t}\,dt.$$

Дефектным значением по Неванлинне будет значение a, для которого

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,\ a,\ f)}{T(r,\ f)}=\delta>0\cdot m(r,\ a,\ f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\vartheta})-a|}\,d\vartheta.$$

Допустим сейчас, что бесконечность есть дефектным значением для мероморфной функции, удовлетворяющей условиям леммы 1.2.7. Так как $m(r, g) = O(\ln r)$, то необходимо функция $h(z)$ — целая трансцендентная функция. Поэтому, в согласии со сказанным выше, в точках ζ, где $|h(\zeta)| = M(r, h)$, справедливы соотношения (6.5.6) (вне некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры). Кроме того, порядки функций $f(z)$ и $h(z)$ совпадают.

3.7. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(z, u, D\ln u, D^2\ln u, \ldots, D^n\ln u) = 0, \tag{1.3.7}$$

где F — полином относительно всех своих переменных. Нетрудно видеть что любое алгебраическое дифференциальное уравнение может быть сведено к уравнению типа (1.3.7). Иными словами: любое уравнение

$$F^*(z, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0, \tag{2.3.7}$$

где F^* — полином относительно всех своих переменных, может быть преобразовано в уравнение вида (1.3.7).

Если в функции F — левой части уравнения (1.3.7) — переменное u (искомая функция) входит явно, то полюсы любого мероморфного решения конечного порядка $u(z)$ уравнения (1.3.7) (в предположении его существования) имеют ограниченную кратность.

Для доказательства допустим, что в окрестности полюса решение $u(z)$ уравнения (1.3.7) имеет представление:

$$u(z) = \frac{A_{jm}}{(z-a_j)^m} + \frac{A_{jm-1}}{(z-a_j)^{m-1}} + \ldots. \tag{3.3.7}$$

Подставив (3.3.7) в (1.3.7), найдем:

$$F\left(z\,\frac{A_{jm}}{(z-a_j)^m} + \ldots,\ \frac{a_j}{z-a_j} + \ldots,\ -\frac{a_j^2}{(z-a_j)^2} + \ldots,\right.$$
$$\left.\ldots,\ (-1)^{n-1}\frac{a_j^n}{(z-a_j)^n} + \ldots\right) = 0. \tag{4.3.7}$$

Так как F — полином, то $\frac{1}{z-a_j}$ входит в (4.3.7) со степенями $\lambda_1 m + \mu_1$, $\lambda_2 m + \mu_2$, $\ldots$, $\lambda_p m + \mu_p$, где λ_j, μ_j — целые числа, причем λ_j — неотрицательные. Для тождественного удовлетворения (4.3.7) необходимо равенство двух членов в указанной последовательности показателей степеней. Решая все возможные уравнения, содержащие m:

$$\lambda_j m + \mu_j = \lambda_i m + \mu_i$$

мы найдем, что наивысшая возможная кратность всякого мероморфного решения уравнения (1.3.7) конечно и не превосходит некоторого постоянного числа, что мы и утверждали.

Сравним коэффициенты у одинаковых степеней $z - a_j$ в выражении (1.3.7). Для определения чисел A_{jk} нетрудно найти систему алгебрайческих уравнений, каждое из которых алгебраически зависит от A_{jk} и a_j.

Если при том первое из них содержит из искомых коэффициентов только A_{jm}, второе только A_{jm} и A_{jm-1} и т. д., то из этой системы можно последовательно определить все коэффициенты A_{jk}. Из первого уравнения системы тогда найдем конечное число решений в окрестности бесконечно удаленной точки вида $A_{jm}=\alpha^m a_j^{p_m}\left(1+0(1)\right)$. Подставив каждое из этих решений во второе, мы опять найдем конечное число решений такого же вида для A_{jm-1}. Продолжая этот процесс, мы после конечного числа шагов найдем все решения системы, каждое из которых будет вида

$$A_{jk}=\alpha_k a_j^{p_k}\left(1+o(1)\right),$$

где p_k — рациональные числа.

В сделанных выше предположениях любое мероморфное решение конечного порядка с дефектным значением в бесконечности уравнения (1.3.7) представимо в виде (3.1.7). Поэтому для определения порядка такого решения могут быть применены соотношения (6.5.6) (Вимана – Валирона).

Замечание. О дефектах, по-видимому, имеет смысл говорить только в случае мероморфных функций конечного порядка (см., например, приложение А. А. Гольдберга в [3], стр. 264), так что ограничение конечности роста естественно.

4.7. Выясним теперь вопрос о том, какие значения $a\neq\infty$ могуть быть дефектными для мероморфных решений обыкновенных алгебраических дифференциальных уравнений.

Нам удобно рассматривать уравнения в виде (2.3.7). Пусть $w=w(z)$ есть решение уравнения

$$F^*(z,\ w,\ w',\ \ldots,\ w^{(n)})=0, \tag{1.4.7}$$

где F — полином относительно всех своих переменных, для которого бесконечность есть дефектное значение. По определению дефекта, равного δ,

$$m(r,\ \infty)>\delta' T(r);\qquad \delta'<\delta \tag{2.4.7}$$

при $r>r_0$. Далее (см. п. 2.7),

$$\ln M(r,\ w)\geqslant m(r,\ \infty)>\delta' T(r), \tag{3.4.7}$$

где $M(r,\ h)=\max\limits_{|z|=r}|h(z)|$.

Если $f(z)$ — мероморфная функция конечного порядка ρ и $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ — последовательности полюсов и нулей функции $f(z)$ соответственно, то

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=p(z)+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{m_j}{z-b_j}-p_j(z)\right\}-\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{n_j}{z-a_j}-q_j(z)\right\}, \tag{4.4.7}$$

где n_j, m_j — кратности соответствующих полюсов и нулей, $p(z)$, $p_j(z)$ и $q_j(z)$ — полиномы степени не выше $[\rho]$ и

$$\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\ln n_j}{\ln|a_j|}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln n(r,\ \infty)}{\ln r}\leqslant\rho, \tag{5$'$.4.7}$$

$$\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\ln m_j}{\ln|b_j|}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln n(r,\ 0)}{\ln r}\leqslant\rho. \tag{5$''$.4.7}$$

Таким образом к функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ применима лемма 1.2.7, по которой

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|<C_1r^{A\rho'};\qquad \rho'>\rho;\qquad C_1=C_1(\rho')=\mathrm{Const} \tag{6.4.7}$$

вне некоторого множества колец $\tilde{E}_1: r_i'\leqslant|z|\leqslant r_i''$; $i=1,2,\ldots$ с $\sum\limits_i(r_i''-r_i')<\infty$ (в лемме 1.2.7 полагаем $\tilde{n}=1$; $\mu=2\rho'$). Аналогично

$$\left|\frac{f^{(j+1)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|<\tilde{C}_j\cdot r^{A\rho'},$$

если z не принадлежит некоторому множеству колец $\tilde{E}_{j+1}$: $r_i'^{(j)} \leqslant |z| \leqslant r_i''^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots$ $\sum\limits_i (r_i''^{(j)} - r_i'^{(j)}) < \infty$. Тогда при $z \notin E_{j+1} = \bigcup\limits_{i=1}^{j+1} \tilde{E}_i$

$$\left| \frac{f^{(j+1)}(z)}{f(z)} \right| < C_{j+1} r^{Aj\varrho'}, \tag{7.4.7}$$

где $C_j = C_1 \tilde{C}_2 \ldots \tilde{C}_j$ — постоянные.

Пусть сейчас $a \neq \infty$ — дефектное значение решения $w(z)$ уравнения (1.4.7). Произведем в (1.4.7) замену $\frac{1}{w-a} = u$ или $w = \frac{1}{u} + a$. Тогда $w' = -\frac{u'}{u^2}$; $w'' = -\frac{u''}{u^2} + 2\frac{u'^2}{u^3}$ и вообще $w^{(j)}$ выражается как сумма произведений вида

$$\prod_i \frac{(u^{(i)})^{j_i}}{u^p}; \qquad \sum_i i j_i = j; \qquad p > \sum_i j_i,$$

что легко доказывается методом полной математической индукции.

Так как $a \neq \infty$ есть дефектное значение функции $w(z)$, то бесконечность будет дефектным значением для функции $u(z)$. Из (3.4.7) видно, что функция $M(r, u)$ растет быстрее любой степени от r. Поэтому вне E_n в точке максимума ζ функции $|u(z)| : |u(\zeta)| = M(r, u)$ в согласии с (7.4.7) при любом постоянном q

$$|z^q w^{(j)}| < A \frac{r^{Aj\varrho' + q}}{M(r, u)} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Итак, если $a \neq \infty$ есть дефектное значение мероморфного решения $w(z)$ уравнения (1.4.7), то в точках максимума ζ, в которых

$$\max_{|z| = r} \frac{1}{|w(z) - a|} = \frac{1}{|w(\zeta) - a|}$$

вне множества E_n справедливо соотношение

$$\lim_{r \to \infty} F(\zeta, a, w, w', \ldots, w^{(w)}) = \lim_{r \to \infty} F(\zeta, a, 0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Мы пришли к следующему предложению:

для того, чтобы значение $a \neq \infty$ являлось дефектным значением для мероморфного решения уравнения (1.4.7), необходимо выполнение тождества

$$F(z, a, 0, 0, \ldots, 0) = 0. \tag{8.7.4}$$

Если (8.7.4) не есть тождество по a, то это означает, что только конечное число значений могут быть дефектными для мероморфных решений рассматриваемых уравнений.

Приведем для примера.

1. Как известно, уравнение Пенлеве [4]

$$w'' = 6w^2 + z \tag{9.4.7}$$

имеет только мероморфные решения, которые все — конечного порядка (см. [1]). В окрестности полюса $z = a$ решение уравнения (9.4.7) имеет следующее разложение

$$w = \frac{1}{(z-a)^2} - \frac{a}{12}(z-a)^2 + \ldots. \tag{10.4.7}$$

Допустим, что бесконечность является дефектным значением для обсуждаемого решения уравнения (9.4.7). Из (10.4.7) вытекает, что все условия леммы 1.7.1 удовлетворены, и имеет место представление (3.1.7), в котором $h(z)$ — целая трансцендентная функция. В п. 3.7 мы показали, что в этих условиях применимы соотношения Вимана—Валирона в точках максимума функции $|h(z)|$. По соотношениям (7.5.6) из уравнения (9.4.7) мы получаем:

$$\frac{K}{w}=6\zeta^2+\frac{\zeta}{w^2}$$

и в пределе при $r\to\infty$ $6\zeta^2\to 0$, что противоречиво. Следовательно, бесконечность не может быть дефектным значением для решения уравнения (9.4.7).

Предположим теперь, что $a\neq\infty$ есть дефектное значение решения $w(z)$ уравнения (9.4.7). Тогда, как было выше показано, должно быть выполнено тождество (8.4.7), которое в нашем случае принимает вид $6a^2+z=0$, что опять таки противоречиво.

Резюмируем: уравнение (9.4.7) не имеет мероморфных решений с дефектными значениями.

2. Пусть функции $p_j(z)e^{q_j(z)}\neq\mathrm{Const}$, $j=1, 2, \ldots, n$, где все функции $p_j(z)$ и $q_j(z)$ — полиномы, образуют линейно независимую систему. Положим

$$q_j(z)=a_0^{(j)}z^m+a_1^{(j)}z^{m-1}+\ldots+a_m^{(j)}, \tag{11.4.7}$$

где допускается $a_0^{(j)}=0$, но $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_0^{(j)}|>0$. Нетрудно подсчитать среднее значение $m(r, w)$ функции

$$w(z)=\sum_{j=1}^{n}p_j(z)e^{q_j(z)}. \tag{12.4.7}$$

В самом деле, пусть $a_0^{(j)}=A_0^{(j)}e^{i\alpha_j}$. Образуем функцию

$$\varphi(\vartheta)=\max_{0\leq\vartheta<2\pi}\Big\{|a_0^{(1)}|\cos(m\varphi+\alpha_1),\quad |a_0^{(2)}|\cos(m\varphi+\alpha_2),\ \ldots,$$
$$\ldots,\ |a_0^{(n)}|\cos(m\varphi+\alpha_n)\Big\}.$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$m(r,\ \infty,\ w)=m(r,\ w)=\frac{\big(1+o(1)\big)r^m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi^+(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{13.4.7}$$

Обозначим еще

$$\tilde{w}(z)=\sum_{j=1}^{n}p_j(z)e^{q_j(z)-q_1(z)}.$$

Мы сейчас покажем, что кроме бесконечности и нуля функция $w(z)$ других дефектных значений иметь не может (см. [3]). При этом, если:

а) $m(r,\ w)=\big(1+o(1)\big)m(r,\ \tilde{w})$, то нуль не является дефектным значением функции $w(z)$, если же

б) $m(r,\ w)<m(r,\ \tilde{w})$, $r>r_0$, то нуль является дефектным значением функции $w(z)$.

Замечание. В функции $\tilde{w}(z)$ вместе вычитаемого $q_j(z)$ можно взять любую другую функцию $q_k(z)$.

Условия а и б легко проверяемы.

Доказательство. Нетрудно видеть (см., например, [13]), что функция $w(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$P_0(z)w^{(n)}+P_1(z)w^{(n-1)}+\ldots+P_n(z)w=0, \tag{14.4.7}$$

где все $P_j(z)$ — полиномы. Если $a \neq \infty$ было бы дефектным значением функции $w(z)$, то по (8.4.7) было бы

$$P_n(z)\,a \equiv 0. \qquad (15.4.7)$$

Последнее возможно лишь когда $a=0$. Кроме нуля и бесконечности других дефектных значений функция $w(z)$ иметь не может.

Допустим сейчас, что $q_n(z) \equiv 0$. Нетрудно построить линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$Q_0(z)\,w^{(n-1)} + Q_1(z)\,w^{(n-2)} + \ldots + Q_{n-1}(z)\,w = Q_n(z), \qquad (16.4.7)$$

которому удовлетворяет функция $w(z)$, причем все $Q_j(z)$ — полиномы, а $Q_n(z) \not\equiv 0$. Допустив, что нуль есть дефектное значение функции $w(z)$ $\left(\text{при } q_n(z) \equiv 0\right)$, по-прежнему получим $Q_n \equiv 0$, что невозможно. Перепишем теперь функцию $w(z)$ следующим образом:

$$w(z) = e^{q_1(z)}\,\tilde{w}(z).$$

Как мы только что показали, нуль не является дефектным значением функции $\tilde{w}(z)$. Поэтому, так как $\tilde{w}(z)$ — целая функция, то $m(r, w) = T(r, w)$ и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{N(r, 0)}{m(r, \tilde{w})} = 1.$$

Если имеет место случай а, то $T(r, w) = \left(1 + O(1)\right) m(r, w)$ и $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r, 0)}{T(r, w)} = 1$, что мы и утверждали в этом случае. Если же $m(r, \tilde{w}) < m(r, w)$, то на основании выражения (13.4.7) для $m(r, w)$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{N(r, 0)}{m(r, w)} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{N(r, 0)}{m(r, \tilde{w})} \cdot \overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{m(r, \tilde{w})}{m(r, w)} < 1.$$

Наше предложение доказано.

Проиллюстрируем доказанное на случае функции

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} p_j(z)\,e^{\lambda_j z}, \qquad \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n.$$

Если $\lambda_1 \cdot \lambda_n > 0$, то нуль является дефектным значением функции $f(z)$; в противном случае $\lambda_1 \cdot \lambda_n \leqslant 0$ — нет.

5.7. В заключение настоящего параграфа мы сделаем несколько замечаний об определении порядка целых трансцендентных решений с помощью соотношений (2.1.5) и (3.4.4).

Предварительно докажем следующее предельное равенство: при любых постоянных p и q

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^q K^p(r, f)}{M(r, f)} = 0, \qquad (1.5.7)$$

где $f(z)$ — целая трансцендентная функция и, по-прежнему,

$$M(r, f) = M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|; \qquad K(r, f) = K(r) = \frac{rM'(r)}{M(r)},$$

причем, переходя к пределу, следует, быть может, исключать множество интервалов ограниченной логарифмической меры. По (5.2.2)

$$K(re^{-\tau})\,\tau \leqslant \ln M(r). \qquad (2.5.7)$$

При $\tau=\ln^{-(1+\alpha)} K(r)$, где $\alpha>0$ — произвольно малое число, применяя лемму 2.2.1 к функции $\ln K(r)$, найдем вне некоторого множества E конечной логарифмической меры, что $K(r)>qK(re^{-\tau})$, где $q>1$ и $E=E(\alpha, q)$. Тогда вне E из (2.5.7) получим

$$\frac{K(r)}{q\ln^{1+\alpha} K(r)}<\ln M(r)$$

и подавно $\sqrt{K(r)}<\ln M(r)$; $r\notin E$. Поэтому при произвольном $\beta: 0<\beta<1$

$$0<\frac{r^q K^q(r)}{M(r)}<\frac{r^q}{M^\beta(r)}\cdot\frac{K^p(r)}{M^{(1-\beta)}\sqrt{K(r)}}\to 0, \qquad r\to\infty \qquad r\notin E,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $w(z)$ — целое трансцендентное решение уравнения

$$F(z,\ w,\ D\ln w,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)=0, \tag{3.5.7}$$

где F — полином относительно всех своих переменных. В точке максимума ζ модуля решения $w(z)$ имеем:

$$F(\zeta,\ w,\ K,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)=0. \tag{4.5.7}$$

Разложив левую часть последнего уравнения по степеням w и разделив затем все уравнение на w в наивысшей степени, в соответствии с (1.5.7), помня, что рассматриваемое уравнение (1.5.7) алгебраическое, найдем вне некоторого множества интервалов E^* конечной логарифмической меры, исключаемого при доказательстве равенства (1.5.7) и теоремы 5.4:

$$P_0(\zeta,\ K,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)=o(1), \tag{5.5.7}$$

где P_0 — полином — коэффициент у w в наивысшей степени в указанном выше разложении полинома F. Для упрощения выражения в левой части равенства (5.5.7) укажем на следующее правило:

$$K^p-D^{2p-1}\ln w(\zeta)=\Big(1+o(1)\Big)K^p \tag{6.5.7}$$

$\Big($это соотношение основано на неравенство (3.4.4) в теореме 5.4$\Big)$.

Предположим выражение P_0 уже преобразованным по этому правилу и выделим в нем все те члены, которые содержат только переменные ζ и K (если, конечно это возможно, что мы предполагаем). В итоге этой операции получим:

$$P(\zeta,\ K)=Q(\zeta,\ K,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)+o(1), \tag{7.5.7}$$

где справа и слева в последнем неравенстве стоят полиномы по всем переменным, считая множители вида $1+0(1)$ коэффициентами. Правую часть равенства (7.5.7) можно оценить сверху. Для этого заметим, что Q есть полином, и его модуль не превосходит суммы модулей его членов. С помощью неравенства* (3.4.4) мы приходим к оценке вида:

$$|P(\zeta,\ K)|<\sum_{j=1}^{p} r^{m_j}K^{j+\beta} \tag{8.5.7}$$

($\beta>0$ — произвольно малое постоянное). Если из последнего неравенства можно делать заключение о поведении функции $K(r)$ при больших r, то из равенства

$$\ln M(r)-\ln M(r_0)=\int_{r_0}^{r}\frac{K(t)}{t}\,dt$$

* Все дальнейшие неравенства верны вне множества E. Мы этого особо оговаривать не будем.

можно уже сравнительно легко делать выводы о росте функции $\ln M(r)$, т. е. о росте решения (см. например, [2], [15]).

Разложим сейчас на множители в окрестности бесконечно удаленной точки $\zeta=\infty$ полином $P(\zeta, K)$. Неравенство (6.5.7) преобразуется в неравенство

$$A_0(\zeta)\prod_{j=1}^{q}\left|K-a_j\zeta^{\lambda_j}\left(1+o(1)\right)\right|<\sum_{j=1}^{p}r^{m_j}K^{j+\beta}. \tag{9.5.7}$$

Пусть $m=\max(m_1, m_2, \ldots, m_p)$. Из (9.5.7) тогда вытекает неравенство

$$\prod_{j=1}^{q}\left|K-a_j\zeta^{\lambda_j}\left(1+0(1)\right)\right|<Ar^{m-\sigma}K^{p+\beta};\qquad A=\mathrm{Const}, \tag{10.5.7}$$

если $A_0(z)$ степени σ по z.

Предположим, что

$$a=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln K(r)}{\ln r}<\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln K(r)}{\ln r}=b \tag{11.5.7}$$

(возможно и $b=\infty$). В работе [15] нами были доказаны следующие две леммы (напомним, что $K(r)$ возрастающая в бесконечность функция).

Лемма 1.5.7. Пусть имеет место соотношение (11.5.7). Какое бы не было число c, удовлетворяющее неравенству $a<c<b$, найдется такая последовательность точек $\{\rho_j\}$; $\rho_j\uparrow\infty$, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln K(\rho_j)}{\ln\rho_j}=c. \tag{12.5.7}$$

Лемма 2.5.7. *Пусть имеет место соотношение* (11.5.7). *Пусть, далее, вне некоторого множества точек E оси r, функция $\frac{\ln K(r)}{\ln r}$ на оставшемся множестве $(r_0, \infty)-E$ в интервале (α, β) не имеет предельных значений при $r\to\infty$. Тогда логарифмическая мера исключенного множества E бесконечно.*

Легко подсчитать, что если $p<q$; $m\leqslant\sigma$ или $p=q$, $m<\sigma$, то неравенство (10.5.7) сводится к неравенству

$$\prod_{j=1}^{q}\left|K-a_j\zeta^{\lambda_j}\left(1+o(1)\right)\right|=0(1).$$

Нахождение порядка решения (и типа) проводится по известным образцам (см., например, [2] и [15]).

Пусть теперь в неравенстве (10.5.7) $p<q$, $m>\sigma$. Найдем α из уравнения

$$\frac{m-\sigma}{p+\beta}+\alpha=\frac{\alpha(p+\beta)}{q},$$

т. е. $\frac{\beta+p}{q}\alpha=\frac{m-\sigma}{p-q+\beta}$. Обозначим $r^{\frac{p+\beta}{q}\alpha}K=H$. Неравенство (8.5.7) преобразуется теперь в

$$\prod_{j=1}^{q}\left|H-a_j\zeta^{\nu_j}\left(1+o(1)\right)\right|<AH^{p+\beta},$$

где $\lambda_j+\frac{p+\beta}{q}\alpha=\nu_j$. Заметим, что

$$\left|H-a_j\zeta^{\nu_j}\left(1+o(1)\right)\right|\geqslant\left|H-|a_j|r^{\nu_j}\left(1+o(1)\right)\right|.$$

Поэтому будем иметь

$$\prod_{j=1}^{q}\left|H-|a_j|\,r^{\nu_j}\left(1+o(1)\right)\right|<AH^{p+\beta}. \qquad (13.5.7)$$

Отметим, что в нашем случае $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, H(r)$ не обязательно равно бесконечности.

7.6. а) $\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\ldots\leqslant\nu_q\leqslant 0$.

Необходимо $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, H(r)=b$, так как в противном случае из $H(r_j)=N_j\uparrow\infty$ вытекает $N_j^q<A'N_j^{p+\beta}$, что при больших j противоречиво. Итак, $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, H(r)=$ $=b<\infty$. Переходя к пределу в (13.5.7) при $r\to\infty$, найдем $b^q<Ab^{p+\beta}$ — неравенство, которое всегда можно удовлетворить. А тогда

$$K(r)<Br^{\frac{m-\sigma}{q-p-\beta}}.$$

Отсюда вытекает:

если $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_q\leqslant\frac{m-\sigma}{q-p}$, то порядок любого трансцендентного целого решения не превосходит числа $\frac{m-\sigma}{q-p}$;

б) $$\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\ldots\leqslant\nu_\mu\leqslant 0<\nu_{\mu-1}\leqslant\ldots\leqslant\nu_q.$$

Предположение $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, H(r)<\infty$ приводит к случаю, рассмотренному в а. Допустим поэтому, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, H(r)=\infty$. Пусть, далее,

$$a=\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln H(r)}{\ln r}<\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln H(r)}{\ln r}=b.$$

По определению $H(r)$

$$\frac{\ln H(r)}{\ln r}=\frac{\ln K(r)}{\ln r}+\frac{m-\sigma}{p-q+\beta}$$

и, так как $\frac{m-\sigma}{p-q+\beta}$ — постоянное, по лемме 1.5.7 найдется такая последовательность $\{r_j\}$, $r_j\uparrow\infty$, что $H(r_j)=r_j^{c+o(1)}$*, где $a<c<b$. Имеем:

$$\prod_{t=1}^{q}\left|r_j^{c+o(1)}-|a_t|\,r_t^{\nu_t}\left(1+o(1)\right)\right|<Ar_j^{c(p+\beta)+o(1)}. \qquad (1.7.6)$$

Если $c>\nu_q$, то при достаточно больших j, как нетрудно убедиться

$$r_j^{cq}<A'r_j^{c(p+\beta)+o(1)},$$

где $A'>0$ — некоторая постоянная. Последнее неравенство противоречиво в силу $q>p$.

Пусть

$$\nu_{\mu+i}<C<\nu_{\mu+i+1}. \qquad (2.7.6)$$

В силу (1.7.6)

$$r_j^{c(\mu+i)+\nu_{\mu+i+1}+\ldots+\nu_q}<Ar_j^{c(p+\beta)+o(1)},$$

что противоречиво, так как по (2.7.6) должно быть $cq<c(\mu+i)-\nu_{\mu+i+1}+$ $+\ldots+\nu_q<c(p+\beta)$.

Таким образом, в предположении $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, H(r)=\infty$, остается одна возможность, что $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{\ln H(r_j)}{\ln r_j}$ равен одному из чисел $\nu_{\mu+1},\ \ldots,\ \nu_q$.

* Так как E — множество ограниченой логарифмической меры (см. сноску на стр. 170), то, как это следует из леммы 2.5.7 можно считать $r_j\notin E$.

В таком случае, как это явствует из леммы 2.7.5, существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln H(r)}{\ln r}=\rho,$$

равный одному из чисел $\nu_{\mu+1}, \nu_{\mu+2}, \ldots, \nu_q$. В самом деле, предельное множество функции $\frac{\ln H(r)}{\ln r}$ при $r\to\infty$ совпадает с конечным множеством $\nu_{\mu+1}, \ldots, \nu_q$, а это возможно, если исключить из полуоси $r>0$ множество точек с бесконечной логарифмической мерой. Наши же все неравенства имеют место на всей полуоси вне некоторого множества точек ограниченной логарифмической меры, вне которого справедлива теорема 5.4. Эти соображения и доказывают наше утверждение.

Резюмируем: Если в неравенстве (10.5.7) $q>p$ и $m>\sigma$, причем

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_\mu\leqslant\frac{m-\sigma}{q-p}<\lambda_{\mu+1}\leqslant\ldots\leqslant\lambda_q,$$

то любое целое трансцендентное решение уравнения (3.5.7) будет порядка, либо равного одному из чисел $\lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2}, \ldots, \lambda_q$, либо не превосходящего числа $\frac{m-\sigma}{q-p}$.

Если $p=q$, $m>\sigma$, то возможны решения бесконечного порядка, в чем можно, например, убедиться на примере неравенства $|K-r^\lambda|<r^\sigma K$; $\sigma>0$.

Замечание. Подобные заключения можно делать и в случае функций классов, рассмотренных в § 1 и § 6.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 20.VI.1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Boutroux P. Sur quelques propriétés des fonctions entières. Acta math., 28, 1904, 97—204.
2. Валирон Ж. Аналитические функции. М., 1957.
3. Виттих Г. В. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., 1960.
4. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., 1950.
5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., 1956.
6. Blumenthal O. Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini. Paris, 1910.
7. Macintyre A. J. Wiman's method and the „flat regions" of integral functions. Quart. J. math., 9, 1938, 81—88.
8. Macintyre A. J. On the Bloch's theorem. Math. Zeitschrift, 44, 1939, 536—540.
9. Нафталевич А. Г. Об асимптотических периодах мероморфных функций. Vilniaus VU V. Kapsuko v. mokslo darbai XXV. Matematika. Fizika, VIII, 1938, 31—47.
10. Nevanlinna R. Remarques sur les fonctions monotones. Bul. des Sciences Math., 55, 1931, 140—144.
11. Островский И. В. О применении одной закономерности, установленной Виманом и Валироном к исследованию характеристических законов вероятностных законов, ДАН СССР, 143, 3, 1962, 532—535.
12. Полиа Г. и Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, I. М., 1956.
13. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1953.

14. Стрелиц Ш. И. О максимальных модулях аналитических функций. УМН. X, 4 (66), 1955, 153—160.

15. Стрелиц Ш. И. О росте неоднозначных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Мат. сб. 53 (95): 2, 1961, 159—194.

16. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.

17. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.

ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ ELGIMASIS ESANT DIDELĖMS JOS MODULIO REIKŠMĖMS

Š. STRELICAS

(Reziumė)

Šiame darbe Vimano—Valirono metodas sveikųjų transcendentinių funkcijų teorijoje ([2], [3]) yra dėstomas nauju pagrindu. Daugelį šios teorijos rezultatų, kurie buvo gauti įvairiais būdais ([7], [8], [11]), mes įrodome pasiremiant viena ir ta pačia idėja. Mūsų siūlomas metodas pasireiškia tuo, kad jis sėkmingai gali būti taikomas ir kai kurioms nesveikų funkcijų klasėms (pvz., analizinių funkcijų kampe). Štai du būdingi gautų mūsų darbe rezultatų pavyzdžiai.

1. Tegu funkcija $f(z)$ yra analizinė kampe $\varphi_0<\arg z<\varphi_1$. Prileiskime toliau, kad $\max|f(z)|$ ant kiekvieno apskritimo $|z|=r$ lanko $l(r):|z|=r$, $\varphi_0<\arg z<\varphi_1$ yra gaunamas taške ζ, $\varphi_0+\delta\leqslant\arg\zeta\leqslant\varphi_1-\delta$, kur $\delta>0$ yra laisvai pasirinktas pakankamai mažas skaičius. Pažymėkime:

$$\max_{l(r)}|f(z)|=M(r);\qquad K(r)=\lim_{h\to+0}\frac{\ln M(r+h)-\ln M(r)}{\ln\left(1+\frac{h}{r}\right)}.$$

Tuomet:

a) jeigu

$$\lim_{r\to\infty}K(r)=\infty,$$

tai

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta^j f^{(j)}(\zeta)}{f(\zeta)}\cdot\frac{1}{K^j(r)}=1;\qquad j=1,\,2,\,3,\,\ldots.$$

Pereinant prie ribos tenka praleisti pusašės $r>0$ intervalų aibę, kurios logaritminis matas yra aprėžtas;

b) jeigu

$$\lim_{r\to\infty}K(r)=\rho<\infty,$$

tai

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\zeta^j f^{(j)}(\zeta)}{f(\zeta)}=\rho(\rho-1)\ldots(\rho-j+1),\qquad j=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

(baigtinė arba begalinė riba $\lim\limits_{r\to\infty}K(r)$ visuomet egzistuoja).

2. Būtina sąlyga tam, kad diferencialinės lygties

$$F(z,\,w,\,w',\,\ldots,\,w^{(n)})=0,$$

kur F yra polinomas visų savo kintamųjų atžvilgiu, baigtinės eilės meromorfinis sprendinys turėtų defektinę reikšmę $a\neq\infty$, yra tai, kad skaičius a būtų lygties

$$F(z,\,a,\,0,\,\ldots,\,0)=0$$

šaknis, kokia bebūtų reikšmė z.

Darbe yra gauta ir kitų įvairaus pobūdžio rezultatų. Kitame straipsnyje mes pritaikome išdėstytą šiame darbe metodą daugelio kintamųjų funkcijoms.

DAS VERHALTEN EINER ANALYTHISCHEH FUNKTION BEI GROSSERES WERTE IHM ABSOLUTEN BETRAGES

S. STRELIZ

(Zusamenfassung)

In der vorliegenden Arbeit bauen wir das Viman – Valiron'sche Verfahren in der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen ([2], [3]) von einem neuen Standpunkt aus. Viele Ergebnisse dieser Theorie ([7], [8], [11]), die vorher auf verschiedenen Wegen herausgefunden wurden, beweisen wir vollständig einheitlich. Unsere Methode ist noch damit ausgezeichnet, dass sie erfolgreich auf Klassen nicht ganzer Funktionen anwendbar ist (zum Beispiel analythische Funktionen in einem Winkelraume). Hier legen wir zwei charakteristische für unsere Arbeit Ergebnisse dar.

1. Es sei $f(z)$ eine analythische im Winkelraume $\varphi_0 < \arg z < \varphi_1$ Funktion. Es seien weiter die Punkte ζ, wo die Funktion $|f(z)|$ auf dem Bogen $l(r): |z|=r$, $\varphi_0 < \arg z < \varphi_1$ ihr Maximalbetrag erhielt, der Beschafenheit, dass $\varphi_0 + \delta \leqslant \arg \zeta \leqslant \varphi_1 - \delta$; hier ist $\delta > 0$ eine beliebige genügend kleine Zahl. Wir bezeichnen:

$$\max_{l(r)} |f(z)| = M(r); \qquad K(r) = \lim_{h \to +0} \frac{\ln M(r+h) - \ln M(r)}{\ln\left(1 + \frac{h}{r}\right)}.$$

Es bestehen die folgenden Ergebnisse.

a. Wenn $\lim K(r) = \infty$, dann ist

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\zeta^j f^{(j)}(\zeta)}{f(\zeta)} \cdot \frac{1}{K^j(r)} = 1, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

wo der Grenzenübergang auf der Halbaxe $r > 0$, möglicher Weise, ausserhalb einer Intervalenmenge begrenzten logarythmischen Masses, durchzuführen ist.

b. Wenn $\lim\limits_{r \to \infty} K(r) = \rho < \infty$, dann ist

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\zeta^j f^{(j)}(\zeta)}{f(\zeta)} = \rho(\rho - 1) \ldots (\rho - j + 1), \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

(eine endliche oder unendliche Grenze $\lim\limits_{r \to \infty} K(r)$ gibt es immer).

2. Damit eine meromorphe Lösung endlicher Ordnung der Differentialgleichung

$$F(z, w, w', \ldots, w^{(n)}) = 0,$$

wo F eine Polynome auf Bezug aller seiner Veränderlichen ist, einen defekten Wert $a \neq \infty$ haben soll, ist es notwendig. dass a die Gleichung

$$F(z, a, 0, \ldots, 0) = 0$$

für jedes z erfülle.

In der vorliegenden Arbeit ist eine ganze Reihe von Ergebnissen verschiedener anderer Natur erhalten. In einer anderen Arbeit wird unsere Methode auf Funktionen mehrerer Veränderlichen angewendet.