III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Д. ПЕТРУШКЕВИЧУТЕ

В работах [1], [2] А. М. Васильевым исследован класс инвариантных связностей в однородном пространстве G/g с группой движений G и стационарной подгруппой g и изучались способы определения вполне геодезических многообразий.

В настоящей работе задано конкретное однородное пространство K_{12}, образующим элементом которого является пространственная кривая третьего порядка k^3. В качестве группы преобразований в K_{12} мы рассмотрим группу проективных преобразований G.

Стационарной подгруппой g_k кривой k^3 является подгруппа группы G оставляющая инвариантной связку поверхностей второго порядка, на которой целиком лежит кривая k^3. Если кривую k^3 задать уравнениями

$$x=\frac{1}{9}t^3, \qquad y=t^2, \qquad z=t,$$

то связка поверхностей запишется в виде

$$\lambda(y-z^2)+\mu(9x-yz)+(9xz-y^2)=0.$$

К кривой k^3 присоединим проективный репер $(A_1 A_2 A_3 A_4)$, где точки A_1, A_4 — лежат на кривой k^3, точки A_2, A_3 лежат соответственно на касательных в точках A_1, A_4; точка A_3 лежит в соприкасающейся плоскости k^3 в точке A_1, а точка A_2 — в соприкасающейся плоскости в точке A_4. Инфинитезимальные перемещения вершин репера определяются уравнениями $dA_i=\omega_i^j A_j$, причем формы ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k\omega_k^j], \qquad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

При указанном выборе репера, стационарная подгруппа g_k определяется уравнениями:

$$\begin{array}{llll}
\omega_1^1-3\omega_2^2=0, & 6\omega_2^1-\ \omega_3^2=0, & \omega_1^4=0, & \omega_4^1=0,\\
\omega_1^1+\ \omega_4^4=0, & 2\omega_1^2-9\omega_2^3=0, & \omega_1^3=0, & \omega_3^1=0,\\
\omega_4^3-3\omega_2^1=0, & \omega_1^2-3\omega_3^4=0, & \omega_2^4=0, & \omega_4^2=0.
\end{array}$$

Совокупность касательных к кривой k^3 принадлежит линейному комплексу. В нашем случае комплекс будет иметь вид:

$$3(x^1y^4-x^4y^1)-(x^2y^3-x^3y^2)=0. \qquad (1)$$

Подгруппа G_{10} группы G, оставляющая инвариантным комплекс (1), задается уравнениями

$$\omega_4^3 - 3\omega_2^1 = 0, \qquad \omega_1^3 + 3\omega_2^4 = 0, \qquad \omega_1^1 + \omega_4^4 = 0,$$
$$\omega_4^2 + 3\omega_3^1 = 0. \qquad \omega_1^2 - 3\omega_3^4 = 0.$$

Видно, что группа G_{10} содержит стационарную подгруппу g_k.

Далее мы будем рассматривать однородное пространство $G_{10}/g_k = K_7$ – совокупность пространственных кривых k^3 с присоединенным к ним инвариантным линейным комплексом (1). Группой преобразований будет группа G_{10}.

Стационарная подгруппа g в пространстве K_7 имеет вид

$$\begin{aligned} &\omega_1^1 - 3\omega_2^2 = 0, \qquad 6\omega_2^1 - \omega_3^2 = 0, \qquad \omega_1^4 = 0, \\ &2\omega_1^2 - 9\omega_2^3 = 0, \qquad \omega_1^3 = 0, \qquad \omega_3^1 = 0, \qquad \omega_4^1 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Оснащение H [1] подгруппы g определяется уравнениями

$$3\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \qquad \omega_1^2 + 3\omega_2^3 = 0, \qquad 9\omega_2^1 + \omega_3^2 = 0. \tag{3}$$

Следовательно, в пространстве K_7 со стационарной подгруппой (2) и оснащением (3) возникает каноническая связность Г [1].

Геодезическими этой связности являются траектории однопараметрических подгрупп группы G_{10}, вдоль которых выполняется уравнения (3) – это однопараметрические семейства кривых 3-го порядка k^3.

Цель работы – описать все вполне геодезические подмногообразия пространства K_7. Так как из общей теории известно, что вполне геодезические подмногообразия задается всякой подгруппой группы G_{10} нормальной [2] к стационарной подгруппе g в ее оснащении H, то наша задача заключается в нахождении всех классов эквивалентных подгрупп группы G_{10} и выделении среди них нормальных.

В данном случае имеем 20 нормальных подгрупп, группы G_{10}: одну шестипараметрическую, две пятипараметрические, шесть четырехпараметрических, семь трехпараметрических, четыре двухпараметрические подгруппы.

Приходим к следующим 8 типам вполне геодезических подмногообразий канонической связности Г (индексы внизу указывают размерность многообразия):

A_4 – совокупность кривых k^3, имеющих общую точку A и общую касательную l в т. A; их соприкасающиеся конические сечения имеют в т. A касание первого порядка.

B_3 – совокупность кривых k^3, имеющих общую точку A и общую касательную l в т. A; их соприкасающиеся конические сечения имеют в т. A касание второго порядка.

C_3 – совокупность квивых k^3, каждая из которых пересекает прямую l в двух точках; касательные к ним, проведенные в точках пересечения, пересекаются соответственно в двух точках A_1 и A_2.

D_3 – совокупность кривых k^3, которые пересекают две прямые l_1 и l_2 таким образом, что проведенная в точке пересечения кривой k^3 с прямой l_1 касательная к k^3 пересекает прямую l_2 и наоборот, т. е. в точке пересечения кривой k^3 с прямой l_2 проведенная касательная пересекает l_1.

E_3 — совокупность кривых k^3, пересекающих прямую l_1 в точке A; их общая касательная l в т. A пересекает все соприкасающиеся плоскости кривых k^3, проведенные в точках пересечения кривых с плоскостью π, проходящей через l и l_1, в одной точке; касательные к ним, проведенные в точках пересечения кривых k^3 с плоскостью π и лежащие в соответствующих соприкасающихся плоскостях, пересекают прямую l_1.

F_2 — совокупность кривых k^3, имеющих общую точку A и общую касательную l в точке A, пересекающих инвариантную прямую l_1, проходящую через т. A таким образом, что в точках пересечения проведенные касательные к кривым k^3 пересекаются в одной точке A_1.

G_2 — совокупность кривых k^3, пересекающих две прямые l_1 и l_2; прямую l_1 они пересекают в точке A, а их общая касательная l в точке A, пересекает прямую l_2; в точках пересечения кривых k^3 с прямой l_2 проведенные касательные пересекают прямую l_1.

H_2 — семейство кривых k^3, соприкасающиеся конические сечения которых в точке A имеют касание третьего порядка.

Теперь возвратимся к пространству K_{12}. В этом пространстве стационарная подгруппа g_k не является максимально „оснащенной" подгруппой группы G.

Подгруппа $G_{10} \supset g_k$ оснащается подпространством H_1

$$\begin{aligned}
&\omega_1^1 - \omega_4^4 + 3(\omega_3^3 - \omega_2^2) = 0, && 3\omega_3^1 - \omega_4^2 = 0,\\
&3(\omega_1^1 - \omega_4^4) + \omega_2^2 - \omega_3^3 = 0, && 2\omega_2^4 - \omega_1^3 = 0,\\
&\omega_1^2 + 6\,\omega_2^3 + 3\,\omega_3^4 = 0, && \omega_1^4 = 0,\\
&3\,\omega_2^1 + \frac{2}{3}\,\omega_3^2 + \omega_4^3 = 0, && \omega_4^1 = 0,\\
&3\omega_2^1 + 6\,\omega_3^2 + \omega_4^3 = 0,\\
&\omega_1^2 + \frac{2}{3}\,\omega_2^3 + 3\omega_3^4 = 0.
\end{aligned}$$

Так как $G_{10} \supset g_k$ и $H_1 \subset H$, то из [2] следует, что в пространстве K_{12} возникает семейство инвариантных связностей без кручения $\Gamma(\xi)$. Связность $\Gamma(0)$ совпадает с канонической связностью пространства K_{12}. Связность $\Gamma(1)$ характеризуется тем, что все её геодезические имеют естественными проекциями в пространство G/G_{10} геодезические канонической связности этого пространства соответствующей оснащению H_1.

Проективная группа G содержит 32 подгруппы. Всех их мы не будем рассматривать, а выберем определенный их класс, т. е. те подгруппы группы G, которые являются стационарными подгруппами симметрических пространств (индексы внизу определяют размерность группы):

1) подгруппа g_9 оставляющая инвариантной точку и плоскость, не проходящую через неё;

2) подгруппа g_{10} оставляющая инвариантным линейным комплекс (неспециальный);

3) подгруппа g_7 оставляющая инвариантными две скрещивающиеся прямые;

4) подгруппа g_6 оставляющая инвариантной квадрику Q.

Выберем среди них нормальные к G_{10} в оснащении H_1 и определим им соответствующие вполне геодезические семейства кривых k^3 связности $\Gamma(1)$. Индексы внизу будут определять размерность семейства.

1. Подгруппа g_9 не будет нормальной к G_{10} в оснащении H_1.

2. Существует четырехпараметрическое семейство комплексов, которые находятся в инволютивном соответствии с комплексом (1). Подгруппа, сохраняющая каждый такой комплекс, нормальна к G_{10} в оснащении H_1.

В данном случае получаем семейство типа:

Z_{11} – все кривые k^3, присоединенные комплексы которых пересекают постоянный комплекс, который находятся с ними в инволютивном соответствии, по линейной конгруэнции.

3. При рассмотрении подгруппы g_7 различаем два случая:

а) скрещивающиеся прямые принадлежат комплексу (1),

б) скрещивающиеся прямые сопряжены относительно комплекса (1).

В случае a получаем следующее вполне геодезическое семейство k^3:

M_{10} – кривые k^3, присоединенные комплексы которых находятся в инволютивном соответствии с комплексами принадлежащими к одному пучку, осями специальных комплексов которого служат наши инвариантные прямые.

В случае б получаем следующие вполне геодезические семейства:

X_8 – все кривые k^3, присоединенные комплексы которых принадлежат к одному пучку P и сопряженные прямые служат осями p_1 и p_2 двух специальных комплексов этого пучка.

X_5 – все кривые k^3, имеющие общую точку A и общую касательную l в т. A, принадлежащую всем комплексам пучка P, присоединенные комплексы которых принадлежат пучку P.

Y_4 – совокупность кривых k^3, получившаяся из многообразия B_3, когда комплексы, присоединенные к k^3, принадлежат пучку P.

Z_4 – совокупность кривых k^3, присоединенные комплексы которых принадлежат пучку P. Каждая кривая пересекает ось p_1 пучка P в двух точках; касательные к ним, проведенные в точках пересечения, пересекаются соответственно в двух точках A_1 и A_2, которые лежат на оси p_2.

W_4 – совокупность кривых k^3, присоединенные комплексы которых принадлежат пучку P. Кривые k^3 пересекают две прямые l_1 и l_2, принадлежащие всем комплексам пучка P, таким образом, что проведенная в точке пересечения кривой k^3 с прямой l_1 касательная к k^3 пересекает l_2 и наоборот, т.е. в точке пересечения кривой k^3 с прямой l_2 проведенная касательная пересекает l_1.

U_3 – совокупность кривых k^3, присоединенные комплексы которых принадлежат пучку P, кривые k^3 пересекают прямую l_1, принадлежащую всем комплексам пучка P в общей точке A, их общая касательная l в т. A, принадлежащая всем комплексам пучка P, пересекает все соприкасающиеся плоскости кривых k^3, проведенные в точках пересечения кривых k^3 с плоскостью π, проходящей через ось p_1 и точку оси p_2 пучка P, в одной точке, лежащей на оси p_2 пучка; касательные к ним, проведенные в точках пересечения кривых k^3 с плоскостью π и не лежащие соответствующих соприкасающихся плоскостях, пересекают прямую l_1.

Z_3 – совокупность кривых k_3, присоединенные комплексы которых принадлежат пучку P. Кривые k^3, имеющие общую точку A и касательную l в точке A, пересекают ось p_1 пучка P, проходящую через точку A таким образом, что в точках пересечения проведенные касательные к кривым k^3 пересекаются в одной точке A_1, лежащей на оси p_2 пучка P.

W_3 – совокупность кривых k_3, присоединенные комплексы которых принадлежат пучку P. Кривые k^3 пересекают две прямые l_1 и l_2, принадлежащие всем комлексам пучка P; прямую l_1 они пересекают в точке A, а их общая касательная l в т. A пересекает прямую l_2; в точках пересечения кривых k^3 с прямой l_2 проведенные касательные пересекают прямую l_1.

M_3 – многообразие, получившееся из многообразия H_2, когда присоединенные комплексы кривых k^3 принадлежат пучку P.

4. Существует четырехпараметрическое семейство квадрик, одно семейство образующих которых принадлежит комплексу (1). Группа, сохраняющая каждую из них, нормальна к G_{10} в оснащении H_1. Приходим к следующим вполне геодезическим семействам k^3 связанности $\Gamma(1)$:

O_9 – совокупность кривых k^3, присоединенные комплексы которых пересекают квадрику Q по одному семейству образующих α.

O_6 – совокупность кривых k^3, присоединенные комплексы которых пересекают квадрику Q по одному семейству образующих α; все кривые k^3 касаются одной из этих образующих l.

N_6 – совокупность кривых k^3, присоединенные комплексы которых пересекают квадрику Q по одному семейству образующих α; все кривые k^3 касаются прямой l, принадлежащей другому семейству образующих β.

P_5 – совокупность кривых k^3, присоединенные комплексы которых пересекают квадрику Q по одному семейству образующих α. Кривые k^3 пересекают второе семейство образующих β так, что касательные к ним, проведенные в точках пересечения, принадлежат к семейству α.

M_5 – совокупность кривых k^3, присоединенные комплексы которых пересекают квадрику Q по одному семейству образующих α; кривые k^3 пересекают две прямые l_1 и l_2, принадлежащие семейству α, таким образом, что касательная к кривой k^3 в точке пересечения кривой с l_1 пересекает l_2 и наоборот – касательная к k^3 в точке пересечения k^3 с l_2 пересекает l_1.

R_5 – совокупность кривых k^3, получающаяся из C_3, когда присоединенные комплексы кривых k^3 пересекают квадрику Q по одному семейству образующих α.

L_5 – совокупность кривых k_3, получающаяся из E_3, когда присоединенные омплексы кривых k^3 пересекают квадрику Q по одному семейству образующих α.

R_4 – совокупность кривых k^3, получающаяся из F_2, когда присоединенные комплексы кривых k^3 пересекают квадрику Q по одному семейству образующих α.

P_4 — совокупность кривых k^3, получающаяся из G_2, когда присоединенные комплексы кривых k^3 пересекают квадрику Q по одному семейству образующих α.

Оказывается, что группа, сохраняющая прямые A_1A_3, A_2A_4, нормальна не только к G_{10} в оснащении H_1, но и к g_k в оснащении H. Из [2] следует, что она дает вполне геодезическое семейство кривых k^3 относительно всех связностей $\Gamma(\xi)$.

M_6 — совокупность кривых k^3, которые пересекают две инвариантные прямые таким образом, что проведенная в точке пересечения кривой с первой из прямых касательная пересекает вторую прямую и наоборот, касательная, проведенная в точке пересечения кривой со второй прямой, пересекает первую прямую.

Группы, оставляющие квадрики $3x^1x^4+x^4x^3=0$ и $3x^1x^4-x^3x^3=0$ инвариантными, так же определяют вполне геодезические семейства кривых k^3 относительно всех связностей $\Gamma(\xi)$, т. е.

U_7 — совокупность кривых k^3, которые пересекают квадрику в двух точках, касательные к кривым k^3 в этих точках принадлежат к одному семейству образующих, а присоединенные комплексы пересекают квадрику по второму семейству образующих.

V_5 — совокупность кривых k^3, которые пересекают квадрику в двух точках, касательные к кривым k^3 в этих точках принадлежат одному семейству образующих, присоединенные комплексы кривых k^3 пересекают квадрику по тому же семейству образующих.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. П. Финикову и А. М. Васильеву за ценные указания при выполнении этой задачи.

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
19.V.1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Васильев. Об одном классе аффинных связностей в однородных пространствах, Изв. ВУЗ"ов, сер. матем. 1959, № 2 (9), 41—49.
2. А. М. Васильев. C'—связности в однородных пространствах и их вполне геодезические подмногообразия, ДАН СССР, 1961, т. 140, № 2, 281—283.

TREČIOS EILĖS ERDVINIŲ KREIVIŲ PILNAI GEODEZINĖS ŠEIMOS

D. PETRUŠKEVIČIŪTĖ

(Reziumė)

Nagrinėjama homogeninė erdvė K_{12}, kurios sudaromuoju elementu yra trečios eilės erdvinė kreivė k^3 ir transformacijų grupe — projektyvinė grupė G. Darbe aprašytos kreivių k^3 specialios pilnai geodezinės šeimos erdvėje K_{12}. Atskiru atveju, kada transformacijų grupe yra grupė, paliekanti invariantiniu tiesinį kompleksą, surastos visos kreivių k^3 pilnai geodezinės šeimos.

COMPLETELY GEODETIC FAMILIES OF SPACE CURVES ORDER THREE

D. PETRUSCHKEVICHIUTE

(Summary)

We consider the homogeneous space K_{12}, which inverting element is the space curve order three k^3 and group of transformations is the projective group G. In this note special classes of completely geodetic families of k^3 are obtained. In particular case, when the group of transformations is a group, which leaves invariante lineare complex all classes of completely geodetic families of k^3 are discovered.