III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КЛАССОВ ОРЛИЧА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

В. М. ТЕРПИГОРЕВА

Введение

Вопросу об изучении экстремальных задач в классах H_p Харди—Рисса посвящено чрезвычайно большое число работ (см., например, (2)—(7), где указана обширная предшествующая литература). Напомним (см. (1)), что аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ входит в класс H_p, если

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^p d\Theta \leqslant C(f) < \infty, \qquad 0<r<1.$$

Подкласс класса H_p, состоящий из функций $f(z)$, для которых $C(f) \leqslant 1$, обозначим через H_p^1. В упоминавшихся работах (2)—(6) построена полная теория линейных экстремальных задач в классе H_p, $p \geqslant 1$, т. е. задач вида:

$$\sup_{f \in H_p^1} \left| \int_0^{2\pi} e^{i\Theta} \cdot f(e^{i\Theta})\, v(\Theta)\, d\Theta \right|, \tag{1}$$

где $v(\Theta)$—функция, заданная на окружности $|z|=1$, $f(e^{i\Theta})$—граничные значения функции $f(z)$ (существующие в силу известных свойств функций класса H_p). В схему задачи (1) укладывается, например, задача о

$$\sup_{f \in H_p^1} \left| \sum_1^N \gamma_k \cdot f^{(\nu_k)}(a_k) \right|, \tag{2}$$

где a_k, $|a_k|<1$—заданные точки, γ_k—заданные комплексные числа, $\nu_k \geqslant 0$—заданные целые числа. Чтобы получить (2) из (1), надо взять

$$v(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_1^N \frac{\gamma_k \cdot \nu_k!}{(e^{i\Theta} - a_k)^{\nu_k+1}}.$$

В работах (2)—(6) разбирались задачи двойственные к (1), исследовались свойства экстремальных функций в задаче (1) и двойственной к ней и, в частности, был найден вид экстремальной функции $f^*(z)$ в задаче (1) в случае, когда $v(\Theta)$ рациональная функция. (См. формулу (45) в § 2.)

Непосредственным обобщением классов H_p, $p \geqslant 1$ служат классы, определенные следующим образом. Пусть $M(u)$—выпуклая, неубывающая при $0 \leqslant u < \infty$ функция, удовлетворяющая условию $\frac{M(u)}{u} \geqslant A > 0$. Говорят, что аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ входит в класс H_M, если

$$\int_0^{2\pi} M\left[|f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant C(f) < \infty, \qquad 0<r<1. \tag{3}$$

Если в (3) $C(f)\leqslant 1$, то $f(z)\in H^1_M$. Класс H_p, $p\geqslant 1$ получается отсюда при $M(u)=u^p$. Граничные свойства функций классов H_M исследовались в работах (9)–(11). Нашей целью является изучение экстремальной задачи

$$\sup_{f\in H^1_M}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\,v(\Theta)\,d\Theta\right|, \tag{4}$$

обобщающей задачу (1). Упоминавшиеся выше результаты, касающиеся задачи (1), являются специальными случаями теорем § 2 настоящей статьи. В частности, мы находим вид экстремальной функции в задаче (1), когда $v(\Theta)$ – рациональная функция (формула (39) § 2).

Для исследования задачи (4) оказалось удобным трактовать класс H^1_M как единичную сферу в некотором банаховском пространстве $H^*_M\supset H_M$. Это пространство определяется в § 1 и там же исследуются свойства этого пространства, нужные для дальнейшего. В § 2, как уже упоминалось, разбирается задача (4). В § 3 изучаются дальнейшие экстремальные проблемы в классе H^1_M, а именно проблемы типа Каратеодори–Фейера–Неванлинна–Пика. Задачи о радиусах однолистности выпуклости и звездообразности рассматриваются в § 4.

Основные результаты настоящей работы были опубликованы без доказательств в заметке (15).

Я пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность С. Я. Хавинсону за предложение темы и консультации.

§ 1. Функции классов H^*_M и их свойства

Мы будем пользоваться обозначениями и определениями книги (8). В частности, во всем дальнейшем изложении будем обозначать через $M(u)$ и $N(v)$ дополнительные друг к другу N-функции, через $p(t)$ и $q(t)$ – их правые производные, через L^*_M – пространство Орлича на сегменте $[0;\ 2\pi]$, через E_M – замыкание в L^*_M множества ограниченных функций, через $\|f\|_M$ – норму элемента $f\in L^*_M$ по Орличу и $\|f\|_{(M)}$ – норму по Люксембургу.

Дадим определение классов, в которых будут решаться экстремальные задачи. Пусть $f(z)$ аналитична в круге $|z|<1$. Положим для данного r, $0<r<1$:

$$\|f\|^r_{(M)}=\inf k \tag{5}$$

по всем $k>0$, для которых

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}\,|f(re^{i\Theta})|\right]d\Theta\leqslant 1$$

и

$$\|f\|^r_M=\sup_{\int_0^{2\pi} N[|v(\Theta)|]\,d\Theta\leqslant 1}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\right|d\Theta. \tag{6}$$

Из соотношения (9.24) книги (8) следует, что

$$\|f\|^r_{(M)}\leqslant\|f\|^r_M\leqslant 2\,\|f\|^r_{(M)}. \tag{7}$$

Величины $\|f\|^r_{(M)}$ и $\|f\|^r_M$ являются возрастающими функциями от r. Покажем это, например, для $\|f\|^r_{(M)}$. Функция $M\left[\frac{1}{k}|f(re^{i\Theta})|\right]$ — субгармоническая, т. к. $M(u)$ — выпуклая, а $|f(z)|$ — субгармоническая. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(re^{i\Theta})|\right]d\Theta$$

есть возрастающая функция от r. Пусть $r_1 < r_2$, тогда

$$I_1 = \int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(r_1 e^{i\Theta})|\right]d\Theta \leqslant \int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(r_2 e^{i\Theta})|\right]d\Theta = I_2.$$

Для всех тех $k > 0$, для которых выполняется неравенство $I_2 \leqslant 1$, будет выполняться и неравенство $I_1 \leqslant 1$, поэтому

$$\|f\|^{r_1}_{(M)} = \inf_{I_1 \leqslant 1} k \leqslant \inf_{I_2 \leqslant 1} k = \|f\|^{r_2}_{(M)},$$

что и надо было показать.

Мы скажем, что аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ входит в класс H^*_M, если

$$\sup_r \|f\|^r_M < +\infty$$

или, что то же самое

$$\sup_r \|f\|^r_{(M)} < +\infty.$$

Для $f \in H^*_M$ положим

$$\|f\|_{(M)} = \|f(z)\|_{(M)} = \sup_r \|f\|^r_{(M)} = \lim_{r \to 1} \|f\|^r_{(M)}, \tag{8}$$

$$\|f\|_M = \|f(z)\|_M = \sup_r \|f\|^r_M = \lim_{r \to 1} \|f\|^r_M. \tag{9}$$

Имеют место включения:

$$H_M \subset H^*_M \subset H_1. \tag{10}$$

В самом деле, если $f(z) \in H_M$ (см. (3)), то по неравенству Юнга для любой $v(\Theta)$, для которой

$$\int_0^{2\pi} N\left[|v(\Theta)|\right]d\Theta \leqslant 1,$$

получаем

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\Theta})\, v(\Theta)\right| d\Theta \leqslant \int_0^{2\pi} M\left[|f(re^{i\Theta})|\right]d\Theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} N\left[|v(\Theta)|\right]d\Theta \leqslant C(f) + 1,$$

и, следовательно,

$$\|f\|^r_M \leqslant C(f) + 1, \qquad 0 < r < 1.$$

Первое из включений (10) доказано. Чтобы доказать второе, возьмем константу $c > 0$, для которой

$$\int_0^{2\pi} N[c]\, d\Theta = 1.$$

Получаем:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|\, d\Theta = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})\cdot c|\, d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c} \sup_{\int_0^{2\pi} N[|v(\Theta)|]d\Theta \leqslant 1} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\right| d\Theta = \frac{\|f\|_M^r}{c} \leqslant \frac{\|f\|_M}{c}, \qquad 0<r<1,$$

и, значит, $f(z)\in H_1$.

Множество H_M^* с нормой (8) (норма Люксембурга) или (9) (норма Орлича) становится Банаховым пространством. Неравенства (7) показывают, что нормы (8) и (9) — эквивалентны.

Единичную сферу в пространстве H_M^* с нормой (8) обозначим через $H_{(M)}^{*1}$, а с нормой (9) через H_M^{*1}. Известные свойства нормы Люксембурга (см. книгу (8)) показывают, что имеет место совпадение сферы $H_{(M)}^{*1}$ с классом H_M^1, определенным во введении:

$$H_{(M)}^{*1} = H_M^1. \tag{11}$$

Из включения $H_M^* \subset H_1$ вытекает, в частности, что любая функция $f(z)\in H_M^*$ имеет граничные значения почти везде на окружности $|z|=1$. Если, как это часто делается, отождествить функцию $f(z)$ с ее граничными значениями, то справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Имеет место равенство:*

$$H_M^* = H_1 \cap L_M^*$$

и при этом

$$\|f(e^{i\Theta})\|_{(M)} = \|f(z)\|_{(M)} = \|f\|_{(M)}, \tag{12}$$

$$\|f(e^{i\Theta})\|_M = \|f(z)\|_M = \|f\|_M. \tag{13}$$

Здесь $\|f(e^{i\Theta})\|_{(M)}$ и $\|f(e^{i\Theta})\|_M$ — нормы граничных значений функции $f(z)$ по Люксембургу и Орличу соответственно.

Доказательство. Пусть $f(z)\in H_M^*$. Уже показано, что тогда $f(z)\in H_1$. Поэтому $f(re^{i\Theta})\to f(e^{i\Theta})$ почти везде. По лемме Фату для любой функции $v(\Theta)$ с

$$\int_0^{2\pi} N\Big[|v(\Theta)|\Big] d\Theta \leqslant 1$$

имеем:

$$\int_0^{2\pi} \left|f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\right| d\Theta \leqslant \sup_r \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\right| d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant \sup_r \sup_{\int_0^{2\pi} N[|w(\Theta)|]d\Theta \leqslant 1} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\Theta})\cdot w(\Theta)\right| d\Theta = \|f(z)\|_M < +\infty. \tag{14}$$

Т. е. $f(z)\in L_M^*$ и, следовательно, $f(z)\in H_1 \cap L_M^*$. Итак, $H_M^* \subset H_1 \cap L_M^*$.

Пусть теперь $f(z) \in H_1 \cap L_M^*$. Считаем, что $\|f(e^{i\Theta})\|_{(M)} \neq 0$, ибо случай $f(e^{i\Theta}) \equiv 0$ тривиален. Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{\|f(e^{i\Theta})\|_{(M)}}.$$

Т. к. $\|f_1(e^{i\Theta})\|_{(M)} = 1$, то

$$\int_0^{2\pi} M\left[|f(e^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant 1$$

$\left(\text{см. (8), стр. 97}\right)$. Поэтому $f_1(e^{i\Theta}) \in L_M$. Из $f_1(z) \in H_1$ и $f_1(e^{i\Theta}) \in L_M$ следует $\left(\text{см. (9)}\right)$, что $f_1(z) \in H_M \subset H_M^*$. Но тогда, очевидно, и $f(z) \in H_M^*$. Первое из утверждений теоремы доказано полностью.

Покажем теперь, что

$$\|f(e^{i\Theta})\|_{(M)} = \|f(z)\|_{(M)},$$

т. е. норма, определенная ,,внутренним образом", совпадает с нормой Люксембурга для граничных значений функции $f(z)$. Если $k > 0$ таково, что

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(e^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant 1,$$

то $\frac{1}{k} f(e^{i\Theta}) \in L_M$, а т. к. $f(z) \in H_M^* \subset H_1$, то $\frac{1}{k} f(z) \in L_M \cap H_1$, а значит $\frac{1}{k} f(z) \in H_M$ $\left[\text{см. (9)}\right]$. Но тогда опять-таки в силу результатов из (9)

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta = \int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(e^{i\Theta})|\right] d\Theta,$$

т. е. допустим предельный переход под знаком интеграла. Т. к.

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta$$

возрастает, то

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant \int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(e^{i\Theta})|\right] d\Theta, \qquad 0 < r < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\|f(z)\|_{(M)}^r \leqslant \|f(e^{i\Theta})\|_{(M)}, \qquad 0 < r < 1,$$

и, значит,

$$\|f(z)\|_{(M)} \leqslant \|f(e^{i\Theta})\|_{(M)}. \tag{15}$$

Докажем обратное неравенство. Вспоминая определение нормы $\|f(z)\|_{(M)}$, придем к тому, что существует число $k < \|f(z)\|_{(M)} + \varepsilon$, для которого

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant 1, \qquad 0 < r < 1.$$

По лемме Фату отсюда вытекает, что

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(e^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant 1.$$

Это немедленно ведет к неравенству:

$$\|f(e^{i\Theta})\|_{(M)} \leqslant \|f(z)\|_{(M)} + \varepsilon, \tag{16}$$

верному для любого $\varepsilon > 0$. Из (15) и (16) следует равенство (12). Докажем равенство (13). Т. к. $f(z) \in H_1$ и поэтому представляется интегралом Пуассона, то

$$|f(re^{i\Theta})| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\Theta-\varphi)} \cdot |f(e^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Пользуясь тем, что $M(u)$ возрастающая функция и используя неравенство Иенсена, получаем:

$$\int_0^{2\pi} M\left[k\,|f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant \int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\Theta-\varphi)} \cdot |kf(e^{i\varphi})|\, d\varphi\right] d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} M\left[k\,|f(e^{i\varphi})|\right] d\varphi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\Theta-\varphi)}\, d\Theta = \int_0^{2\pi} M\left[k\,|f(e^{i\varphi})|\right] d\varphi.$$

Отсюда

$$\sup_r \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left\{1 + \int_0^{2\pi} M\left[k\,|f(re^{i\Theta})|\right]\right\} d\Theta \leqslant \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left\{1 + \int_0^{2\pi} M\left[k\,|f(e^{i\Theta})|\right] d\Theta\right\}.$$

Но (см. (8), стр. 110)

$$\inf_{k>0} \frac{1}{k}\left\{1 + \int_0^{2\pi} M\left[k\,|f(e^{i\Theta})|\right] d\Theta\right\} = \|f(e^{i\Theta})\|_M,$$

$$\inf_{k>0} \frac{1}{k}\left\{1 + \int_0^{2\pi} M\left[k\,|f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta\right\} = \|f(z)\|_M^r.$$

Поэтому

$$\|f(z)\|_M \leqslant \|f(e^{i\Theta})\|_M.$$

С другой стороны, из (14) следует обратное неравенство, а значит равенство (13) доказано.

С помощью равенства $H_M^* = H_1 \cap L_M^*$ легко устанавливается формула параметрического представления функций класса H_M^* (для класса H_p — это хорошо известный результат В. И. Смирнова): класс H_M^* совпадает с классом функций, представимых в виде

$$f(z) = e^{i\lambda} \cdot b(z) \cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \ln p(\varphi)\, d\varphi} \cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} dq(\varphi)}, \tag{17}$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке, $q(\varphi)$ — невозрастающая сингулярная функция, λ — действительное число, $p(\varphi) = |f(e^{i\varphi})|$ принадлежит классу L_M^* (ср. (1), стр. 107—111).

Действительно, если $f(z) \in H_M^*$, то $f(z) \in H_1$ и имеет место представление (17), причем

$$p(\varphi) = |f(e^{i\varphi})| \in L_M^*.$$

Обратно, если $f(z)$ представима формулой (17), то $f(z)$ входит в класс H_1 (ибо $p(\varphi)\in L_M^*\subset L_1$). Кроме того

$$|f(e^{i\varphi})|=p(\varphi)\in L_M^*,$$

поэтому $f(z)\in H_1\cap L_M^*=H_M^*$.

Обозначим через $(EH)_M$ замыкание по норме, в H_M^* множества ограниченных аналитических функций. Отождествляя функции класса $(EH)_M$ с их граничными значениями, получаем следующую теорему:

Теорема 2. *Имеет место равенство:*

$$(EH)_M=H_1\cap E_M.$$

Доказательство. Пусть $f(z)\in(EH)_M$. Т.к. $(EH)_M\subset H_M^*\subset H_1$, то $f(z)\in H_1$. Кроме того, очевидно, $(EH)_M\subset E_M$, следовательно $f(z)\in E_M\cap H_1$ и $(EH)_M\subset E_M\cap H_1$.

Для доказательства обратного включения покажем сначала, что если $v(\Theta)\in L_N^*$ и

$$\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta=0,$$

для всех $f(e^{i\Theta})\in(EH)_M$, то $v(\Theta)\in H_N^*$. Действительно, т.к.

$$\int_0^{2\pi} e^{i\Theta} f(e^{i\Theta})\, v(\Theta)\,d\Theta=0$$

для любой $f(e^{i\Theta})\in(EH)_M$, то в частности

$$\int_0^{2\pi} e^{in\Theta}\, v(\Theta)\,d\Theta=0, \qquad n=1,\ 2,\ \dots.$$

Тогда $v(\Theta)$ является граничными значениями аналитической в $|z|<1$ функции $v(z)\in H_1$ (см. (1), стр. 100). По условию $v(\Theta)\in L_N^*$, поэтому $v(z)\in H_1\cap L_N^*=H_N^*$, что и требовалось.

Общей формой линейного функционала на E_M является

$$l(f)=\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta, \tag{18}$$

где $v(\Theta)\in L_N^*$, $f(e^{i\Theta})\in E_M$ (см. (8), стр. 150). Рассмотрим множество функционалов, обращающихся в нуль на подпространстве $(EH)_M\subset E_M\cap H_1$. Для таких функционалов, по доказанному выше, $v(\Theta)\in H_N^*$. Для $f(z)\in E_M\cap H_1\subset H_M^*$ и $v(z)\in H_N^*$ имеет место неравенство Гельдера

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})\, v(re^{i\Theta})|\,d\Theta\leqslant \|f\|_M^r\cdot\|v\|_{(N)}^r\leqslant\|f\|_M\cdot\|v\|_{(N)},$$

откуда следует, что $f(z)\cdot v(z)\in H_1$. По теореме Коши, которая имеет место для граничных значений функций класса H_1, получаем, что

$$l(f)=\int_0^{2\pi} e^{i\Theta} f(e^{i\Theta})\cdot v(e^{i\Theta})\,d\Theta=0.$$

В этом случае $f(e^{i\theta})$ принадлежит замыканию подпространства $(EH)_M$ в H_M^*. Но подпространство $(EH)_M$ замкнуто, поэтому $f\in(EH)_M$. Т. к. $f(z)$ произвольный элемент из $E_M \cap H_1$, то $E_M \cap H_1 \subset (EH)_M$. Теорема доказана.

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, устанавливается формула параметрического представления функций класса $(EH)_M$. Класс $(EH)_M$ совпадает с классом функций, представимых в виде

$$f(z)=e^{i\lambda}\cdot b(z)\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln p(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}d\varphi}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}dq(\varphi)}, \tag{19}$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке, $q(\varphi)$ невозрастающая сингулярная функция, λ — действительное число, $p(\varphi)=|f(e^{i\varphi})|$ принадлежит классу E_M.

Замечание. Если N — функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 — условию, то пространства $(EH)_M$ и H_M^* совпадают, т. к. в этом случае пространства E_M и L_M^* совпадают.

Если N — функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 — условию, то $(EH)_M$ является правильной частью H_M^*, ибо в этом случае E_M является правильной частью L_M^* (см. (8), стр. 98).

Будем обозначать через $\chi(E)$ характеристическую функцию множества $E\subset[0;\ 2\pi]$. Мы скажем, что аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ имеет в этом круге равностепенно абсолютно непрерывную норму, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\eta>0$, что как только $\operatorname{mes}E<\eta$, так сейчас же

$$\|\chi(E)\cdot f(re^{i\theta})\|_{(M)}<\varepsilon,$$

при всех r, $0<r<1$.

Теорема 3. *Функция $f(z)$ имеет равностепенно абсолютно непрерывную норму тогда и только тогда, когда $f(z)\in(EH)_M$.*

Доказательство. Пусть $f(z)\in(EH)_M$. Из определения $(EH)_M$ следует, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется ограниченная аналитическая функция $\varphi(z)$: $|\varphi(z)|<a$ в $|z|<1$, такая, что

$$\|f-\varphi\|_{(M)}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда и

$$\|f(re^{i\theta})-\varphi(re^{i\theta})\|_{(M)}<\frac{\varepsilon}{2}$$

для любого r, $0<r<1$. Функция

$$\frac{1}{M^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)}$$

монотонно возрастает, поэтому уравнение

$$\frac{1}{M^{-1}\left(\frac{1}{\eta}\right)}=\frac{\varepsilon}{2a}$$

имеет единственное решение $\eta>0$. Пусть $\operatorname{mes}E<\eta$. Вспоминая, что норма характеристической функции

$$\|\chi(E)\|_{(M)}=\frac{1}{M^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes}E}\right)}$$

$\Big($см. (8), стр. $97\Big)$, получаем:

$$\left\|\chi(E)\cdot f(re^{i\Theta})\right\|_{(M)}\leqslant\left\|\chi(E)\cdot\left[f(re^{i\Theta})-\varphi(re^{i\Theta})\right]\right\|_{(M)}+$$

$$+\left\|\chi(E)\cdot\varphi(re^{i\Theta})\right\|_{(M)}\leqslant\left\|f(re^{i\Theta})-\varphi(re^{i\Theta})\right\|_{(M)}+$$

$$+a\cdot\|\chi(E)\|_{(M)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{a}{M^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes}E}\right)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{a}{M^{-1}\left(\frac{1}{\eta}\right)}=\varepsilon,$$

и теорема в одну сторону доказана.

Пусть теперь дано, что $f(z)$ имеет равностепенно абсолютно непрерывную норму. Тогда, прежде всего, очевидно, что $f(z)\in H_M^*$. Покажем теперь, что функция $f(e^{i\Theta})$ имеет абсолютно непрерывную норму, т. е.

$$\left\|\chi(E)\cdot f(e^{i\Theta})\right\|_{(M)}<\varepsilon,$$

как только $\operatorname{mes}E<\eta$. Если задано $\varepsilon>0$, то по условию найдется такое $\eta>0$, что

$$\left\|\chi(E)\cdot f(re^{i\Theta})\right\|_{(M)}<\varepsilon$$

при всех r, $0<r<1$, как только $\operatorname{mes}E<\eta$. По определению нормы отсюда следует, что

$$\int\limits_E M\left[\frac{|f(re^{i\Theta})|}{\varepsilon}\right]d\Theta\leqslant 1,\qquad 0<r<1.$$

Лемма Фату дает, что

$$\int\limits_E M\left[\frac{|f(e^{i\Theta})|}{\varepsilon}\right]d\Theta\leqslant 1$$

и, значит,

$$\left\|\chi(E)\cdot f(e^{i\Theta})\right\|_{(M)}<\varepsilon.$$

Итак, $f(e^{i\Theta})$, имея абсолютно непрерывную норму, принадлежит E_M $\Big($см. (8), стр. $105\Big)$. Следовательно,

$$f\in H_M^*\cap E_M\subset H_1\cap E_M=(EH)_M.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 4. *Единичные сферы $H_{(M)}^{*1}$ и H_M^{*1} компактны в себе в смысле сходимости внутри $|z|<1$.*

Доказательство. Докажем теорему для $H_{(M)}^{*1}$, т. к. для H_M^{*1} доказательство аналогично. Рассмотрим последовательность $\{f_n(z)\}\in H_M^{*1}$. Функции $f_n(z)$ представимы интегралом Пуассона. Из неравенства Гельдера следует при любом n:

$$|f_n(re^{i\Theta})|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\Theta-\varphi)}\cdot f_n(e^{i\varphi})\,d\varphi\right|\leqslant\|f_n\|_{(M)}\cdot\|P(r;\ \Theta-\varphi)\|_N\leqslant$$

$$\leqslant\|P(r;\ \Theta-\varphi)\|_N,$$

где $P(r;\ \Theta-\varphi)$ — ядро Пуассона. Следовательно, последовательность $\{f_n(re^{i\Theta})\}$ равномерно ограничена в любом круге $|z|\leqslant r<1$, и по теореме Монтеля она будет компактна в $|z|<1$. Это означает, что из любой последовательности $\{f_n(z)\}\in H_{(M)}^{*1}$ можно выбрать подпоследовательность

$\{f_{n_m}(z)\}$, равномерно сходящуюся внутри круга к аналитической функции $f(z)$. Тогда

$$M\left[\frac{1}{k}|f_{n_m}(re^{i\Theta})|\right]\to M\left[\frac{1}{k}|f(re^{i\Theta})|\right],$$

и по теореме Фату

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f(re^{i\Theta})|\right]d\Theta \leqslant \sup_{n_m}\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{k}|f_{n_m}(re^{i\Theta})|\right]d\Theta \leqslant 1.$$

Отсюда легко находим, что

$$\|f\|^r_{(M)} \leqslant \sup_{n_m}\|f_{n_m}\|^r_{(M)} \leqslant 1.$$

Это верно для любого r, $0<r<1$, поэтому

$$\|f\|_{(M)} = \sup_r \|f\|^r_{(M)} \leqslant 1,$$

т. е. $f(z)\in H^{*1}_{(M)}$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Для того, чтобы последовательность*

$$\{f_n(e^{i\Theta})\}\subset H^*_M,$$

E_N*—слабо сходилась, необходимо и достаточно, чтобы нормы* $\|f_n\|_{(M)}$ (*или* $\|f_n\|_M$) *были равномерно ограничены и последовательность* $\{f_n(z)\}$ *равномерно сходилась внутри круга* $|z|<1$. *При этом, если* $f_n(z)\to f(z)$ *внутри круга и* $\varphi(e^{i\Theta})$*—функция, к которой* $\{f_n(e^{i\Theta})\}$ E_N*—слабо сходится, то*

$$f(e^{i\Theta}) = \varphi(e^{i\Theta})$$

почти везде. (Относительно E_N—слабой сходимости, см. (8), стр. 153.)

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n(e^{i\Theta})\}$ E_N—слабо сходится. Тогда $\|f_n\|_{(M)}$ равномерно ограничены и существует такая единственная функция $\varphi(e^{i\Theta})\in L^*_M$, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta = \int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot\varphi(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta,$$

где $v(\Theta)$ любая функция из E_N. В частности, это равенство имеет место для

$$v(\Theta) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{e^{i\Theta}-z},$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}\cdot\varphi(e^{i\Theta})}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta = f(z). \tag{20}$$

Так как $f_n(z)\in H^*_M\subset H_1$, то эти функции представимы интегралом Коши, т. е.

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta.$$

Поэтому равенство (20) дает:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z).$$

В силу предыдущей теоремы последовательность $\{f_n(z)\}\in H^*_M$ компактна в себе относительно сходимости внутри. По теореме Витали заключаем отсюда, что последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ внутри $|z|<1$.

Для того, чтобы показать равенство граничных значений $f(e^{i\Theta})$ и функции $\varphi(e^{i\Theta})$ почти везде на $|z|=1$, достаточно показать, что интеграл типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}\cdot\varphi(e^{i\Theta})}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta$$

есть интеграл Коши. Т.к.

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta=0$$

при $|z|>1$ и при любом n, то

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}\cdot\varphi(e^{i\Theta})}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta=0,\qquad |z|>1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}\cdot\varphi(e^{i\Theta})}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta,\ |z|<1,$$

есть интеграл Коши, и одна часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть. Пусть теперь для любого n

$$\|f_n\|_{(M)}\leqslant C$$

и последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится внутри $|z|<1$. Из равномерной ограниченности норм $\|f_n\|_{(M)}$ следует равномерная ограниченность

$$\int_0^{2\pi}|f_n(e^{i\Theta})|\,d\Theta.$$

Действительно,

$$\int_0^{2\pi}|f_n(e^{i\Theta})|\,d\Theta\leqslant\|f_n\|_{(M)}\cdot\|1\|_{(N)}\leqslant C\cdot\|1\|_N. \tag{21}$$

Т. к. $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится внутри $|z|<1$ и интегралы (21) равномерно ограничены, то в силу теоремы С. Я. Хавинсона (см. (6), стр. 452) для любой непрерывной функции $\omega(\Theta)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})\cdot\omega(\Theta)\,d\Theta=\int_0^{2\pi}e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot\omega(\Theta)\,d\Theta.$$

В пространстве E_N множество непрерывных функций всюду плотно. Поэтому для любой $v(\Theta)\in E_N$ и любого $\varepsilon>0$ можно найти такую непрерывную функцию $\omega(\Theta)$, что будет выполняться неравенство $\|\omega-v\|_N<\varepsilon$ (см. (8), стр. 99). Для этой функции $\omega(\Theta)$ по заданному $\varepsilon>0$ найдем такое N, что при $n>N$ будем иметь:

$$\left|\int_0^{2\pi}e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})\cdot\omega(\Theta)\,d\Theta-\int_0^{2\pi}e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot\omega(\Theta)\,d\Theta\right|<\varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta-\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta\right|\leqslant\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta-\right.$$
$$\left.-\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot \omega(\Theta)\,d\Theta\right|+\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot \omega(\Theta)\,d\Theta-\right.$$
$$\left.-\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})\,\omega(\Theta)\,d\Theta\right|+\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})\cdot \omega(\Theta)\,d\Theta-\right.$$
$$\left.-\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta\right|\leqslant\|f\|_{(M)}\cdot\|\omega-v\|_{(N)}+\varepsilon+\|f_n\|_{(M)}\cdot\|\omega-v\|_N.$$

Итак, для любой $v(\Theta)\in E_N$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f_n(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta=\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta,$$

т. е. последовательность $\{f_n(e^{i\Theta})\}$ E_N — слабо сходится. Теорема полностью доказана.

§ 2. Линейные экстремальные задачи для функций классов H_M^*

Перейдем теперь к основному вопросу: исследованию экстремальных задач в наших классах.

Теорема 6. *Для любой* $v(\Theta)\in L_N^*$ имеем:

$$\sup_{f\in H_M^1}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}f(e^{i\Theta})\,v(\Theta)\,d\Theta\right|=\sup_{\substack{f\in(EH)_M\\ \|f\|_{(M)}\leqslant 1}}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta\right|=$$
$$=\inf_{\varphi\in H_N^*}\|v-\varphi\|_N, \tag{22}$$

причем существует экстремальная функция $\varphi^*(\Theta)\in H_N^*$.

Доказательство. Будем считать, что $v(\Theta)\overline{\in}H_N^*$, т. к. иначе теорема очевидна. Доказательство теоремы основано на так называемых леммах двойственности функционального анализа, вытекающих из теоремы Хана — Банаха и уже применявшихся к исследованию экстремальных задач в других классах аналитических функций. (См. (6), (4), (7).) Лемма двойственности, которую мы применяем для доказательства соотношений (22), состоит в следующем. Пусть A — нормированное пространство, $B\subset A$ — подпространство и l произвольный линейный функционал над A. Тогда:

$$\sup_{\substack{f\in B\\ \|f\|\leqslant 1}}|l(f)|=\|l\|_B=\inf\|l-m\|, \tag{23}$$

где нижняя грань взята по всем таким функционалам m, которые обращаются в нуль на B. При этом всегда существует функционал m^*, для которого нижняя грань достигается.

Приступая к обоснованию соотношений (22), выведем сперва второе из них. Будем трактовать

$$l(f)=\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\cdot d\Theta$$

как линейный функционал над пространством $A=E_M$. Тогда

$$\sup_{\substack{f\in(EH)_M\\ \|f\|_{(M)}\leqslant 1}}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta\right|$$

есть норма этого функционала над подпространством $B=(EH)_M$. В силу (23) надо найти линейные функционалы $m(f)$, обращающиеся в нуль на этом подпространстве. Любой линейный функционал $m(f)$ над E_M имеет вид:

$$m(f)=\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot \varphi(\Theta)\,d\Theta,$$

где $\varphi(\Theta)\in L_N^*$. При доказательстве теоремы 2 отмечалось, что если

$$m(f)=0,\ f\in(EH)_M,$$

то $\varphi(\Theta)\in H_N^*$; и обратно, если $\varphi(\Theta)\in H_N^*$, то $m(f)=0$ при $f\in(EH)_M$. Кроме того, норма любого функционала

$$L(f)=\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot w(\Theta)\,d\Theta$$

над пространством E_M равна $\|w(\Theta)\|_N$ (см. (8), стр. 157). Поэтому из соотношений (23) вытекает доказываемое равенство:

$$\sup_{\substack{f\in(EH)_M\\ \|f\|_{(M)}\leqslant 1}}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\, v(\Theta)\,d\Theta\right|=\inf_{\varphi\in H_N^*}\|v-\varphi\|_N.$$

Далее, для любой $f\in H^{*1}_{(M)}=H^1_M$ и $\varphi\in H_N^*$ имеем:

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta\right|=\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\Big[v(\Theta)-\varphi(\Theta)\Big]d\Theta\right|,$$

так как

$$\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta=0.$$

Отсюда

$$\sup_{f\in H_M^1}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\, v(\Theta)\,d\Theta\right|=\sup_{f\in H_M^1}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\Big[v(\Theta)-\varphi(\Theta)\Big]d\Theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\substack{f\in L_M^*\\ \|f\|_{(M)}\leqslant 1}}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta} f(e^{i\Theta})\Big[v(\Theta)-\varphi(\Theta)\Big]d\Theta\right|=\|v-\varphi\|_N.$$

Это верно для любой функции $\varphi\in H_M^*$, поэтому

$$\sup_{f\in H_M^1}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(e^{i\Theta})\,d\Theta\right|\leqslant\inf_{\varphi\in H_N^*}\|v-\varphi\|_N.$$

С другой стороны, используя уже доказанное,

$$\sup_{f\in H_M^1}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta\right| \geqslant \sup_{\substack{f\in(EH)_M\\ \|f\|_{(M)}\leqslant 1}} \left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta} f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta\right| =$$

$$= \inf_{\varphi\in H_M^*}\|v-\varphi\|_N.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in H_M^1}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta\right| = \inf_{\varphi\in H_N^*}\|v-\varphi\|_N.$$

Соотношения (22) полностью доказаны, причем, как следует из леммы двойственности, всегда существует экстремальный элемент $\varphi^*\in H_N^*$ такой, что

$$\inf_{\varphi\in H_N^*}\|v-\varphi\|_N = \|v-\varphi^*\|_N.$$

Теорема 6а. *Для любой* $v(\Theta)\in L_N^*$ *имеем:*

$$\sup_{f\in H_M^{*1}}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\,v(\Theta)\,d\Theta\right| = \sup_{\substack{f\in(EH)_M\\ \|f\|_M\leqslant 1}}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(\Theta)\,d\Theta\right| =$$

$$= \inf_{\varphi\in H_N^*}\|v-\varphi\|_{(N)}, \tag{24}$$

причем существует экстремальная функция $\varphi^*(\Theta)\in H_N^*$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6.

Для доказательства следующих двух теорем потребуется лемма.

Лемма. *Если* $q(s)$ *непрерывная функция и*

$$f\in L_M^*,\quad \psi\in L_N^*,$$

то для того, чтобы в неравенстве Гельдера

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot\psi(e^{i\Theta})\,d\Theta\right| \leqslant \|f\|_{(M)}\cdot\|\psi\|_N \tag{25}$$

имело место равенство, необходимо выполнение условий:

$$f(e^{i\Theta})\cdot\psi(e^{i\Theta})\cdot e^{i\Theta} = e^{i\alpha}\cdot q\left[k^*\,|\,\psi(e^{i\Theta})\,|\right]\cdot|\,\psi(e^{i\Theta})\,|\cdot\|f\|_{(M)} \tag{26}$$

или, что то же,

$$f(e^{i\Theta})\cdot\psi(e^{i\Theta})\cdot e^{i\Theta} = e^{i\alpha}\cdot\frac{1}{k^*}\,|f(e^{i\Theta})\,|\cdot p\left[\frac{|f(e^{i\Theta})|}{\|f\|_{(M)}}\right] \tag{27}$$

и

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{|f(e^{i\Theta})|}{\|f\|_{(M)}}\right]d\Theta = 1, \tag{28}$$

где k^* *удовлетворяет условию*

$$\|\psi\|_N = \frac{1}{k^*}\left\{1+\int_0^{2\pi} N\left[k^*\,|\,\psi(e^{i\Theta})\,|\right]d\Theta\right\}$$

(существование такого k^* при непрерывной $q(s)$ следует из (8), стр. 106); α — *действительное число.*

Обратно: выполнение соотношения (26) (*или* (27)) *с некоторым* k^* *и вещественным* α *и соотношения* (28) *достаточно, чтобы в* (25) *было равенство.*

Доказательство: Необходимость. Имеем:

$$\left|\int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta})\cdot\psi(e^{i\Theta})\cdot e^{i\Theta}\,d\Theta\right| \leqslant \frac{\|f\|_{(M)}}{k^*}\int_0^{2\pi}\left|f(e^{i\Theta})\,\psi(e^{i\Theta})\cdot\frac{k^*}{\|f\|_{(M)}}\right|d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_{(M)}}{k^*}\left\{\int_0^{2\pi} M\left[\frac{|f(e^{i\Theta})|}{\|f\|_{(M)}}\right]d\Theta + \int_0^{2\pi} N\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]d\Theta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{(M)}\cdot\frac{1}{k^*}\left\{1+\int_0^{2\pi} N\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]d\Theta\right\} = \|f\|_{(M)}\cdot\|\psi\|_N.$$

Но т. к.

$$\left|\int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta})\,\psi(e^{i\Theta})\cdot e^{i\Theta}\,d\Theta\right| = \|f\|_{(M)}\cdot\|\psi\|_N,$$

то всюду имеет место равенство. Из

$$\left|\int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta})\cdot\psi(e^{i\Theta})\cdot e^{i\Theta}\,d\Theta\right| = \int_0^{2\pi}\left|f(e^{i\Theta})\cdot\psi(e^{i\Theta})\right|d\Theta$$

следует, что

$$\arg\left\{f^*(e^{i\Theta})\cdot\psi(e^{i\Theta})\cdot e^{i\Theta}\right\}\equiv\alpha\equiv\mathrm{const} \tag{29}$$

почти везде. Из

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(e^{i\Theta})}{\|f\|_{(M)}}\cdot\psi(e^{i\Theta})\cdot k^*\right|d\Theta = \int_0^{2\pi} M\left[\frac{|f(e^{i\Theta})|}{\|f\|_{(M)}}\right]d\Theta + \int_0^{2\pi} N\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]d\Theta$$

видим, что имеет место равенство в неравенстве Юнга, а в этом случае

$$|f(e^{i\Theta})| = q\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]$$

или в другой форме

$$k^*|\psi(e^{i\Theta})| = p\left[|f(e^{i\Theta})|\right] \tag{30}$$

(см. (8), стр. 96). Из (29) и (30) следует (26) и (27). Из

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{|f(e^{i\Theta})|}{\|f\|_{(M)}}\right]d\Theta + \int_0^{2\pi} N\left[k^*\cdot|\psi(e^{i\Theta})|\right]d\Theta = 1+\int_0^{2\pi} N\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]d\Theta$$

следует, что имеет место (28). Необходимость доказана.

Достаточность. Из (26) или (27) вытекает, что имеет место равенство в неравенстве Юнга:

$$\frac{|f(e^{i\Theta})|}{\|f\|_{(M)}}\cdot|\psi(e^{i\Theta})| = \frac{1}{k^*}\cdot q\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]\cdot k^*\cdot|\psi(e^{i\Theta})| =$$

$$= \frac{1}{k^*}\left\{M\left[q\left(k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right)\right] + N\left[k^*\cdot|\psi(e^{i\Theta})|\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{k^*}\left\{M\left[\frac{|f(e^{i\Theta})|}{\|f\|_{(M)}}\right] + N\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]\right\}$$

и выполняется соотношение (29). Поэтому, если используем еще (28), то найдем:

$$\left|\int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta})\cdot\psi(e^{i\Theta})\cdot e^{i\Theta}\,d\Theta\right| = \int_0^{2\pi}\left|f(e^{i\Theta})\cdot\psi(e^{i\Theta})\right|d\Theta =$$

$$=\|f\|_{(M)}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(e^{i\Theta})}{\|f\|_{(M)}}\cdot\psi(e^{i\Theta})\right|d\Theta=\frac{\|f\|_{(M)}}{k^*}\left\{\int_0^{2\pi} M\left[\frac{|f(e^{i\Theta})|}{\|f\|_{(M)}}\right]d\Theta+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi} N\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]d\Theta\right\}=\frac{\|f\|_{(M)}}{k^*}\left\{1+\int_0^{2\pi} N\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]d\Theta\right\}=$$

$$=\|f\|_{(M)}\cdot\|\psi\|_N. \tag{31}$$

Так как при любом $k^*>0$

$$\frac{1}{k^*}\left\{1+\int_0^{2\pi} N\left[k^*|\psi(e^{i\Theta})|\right]d\Theta\right\}\geqslant\|\psi(e^{i\Theta})\|_N,$$

то соотношение (31) свидетельствует о наличии равенства в (25). Лемма полностью доказана.

Теорема 7. *Если $v(e^{i\Theta})\in E_N$, то существует экстремальная функция $f^*\in H^{*1}_{(M)}$ в равенстве (22). Если $q(s)$ непрерывная функция, то экстремальные функции $f^*(e^{i\Theta})$ и $\varphi^*(e^{i\Theta})$ связаны соотношениями:*

$$f^*(e^{i\Theta})\left[v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right]e^{i\Theta}=$$

$$=e^{i\alpha}\cdot q\left[k^*|v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})|\right]\cdot\left|v^*(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right| \tag{32}$$

или, что то же,

$$f^*(e^{i\Theta})\left[v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right]\cdot e^{i\Theta}=e^{i\alpha}\cdot\frac{1}{k^*}\cdot|f^*(e^{i\Theta})|\cdot p\left[|f(e^{i\Theta})|\right], \tag{33}$$

причем $\|f^*\|_{(M)}=1$ и, более того,

$$\int_0^{2\pi} M\left[|f^*(e^{i\Theta})|\right]d\Theta=1. \tag{34}$$

Здесь α — действительное число, а k^* удовлетворяет условию

$$\|v-\varphi^*\|_N=\frac{1}{k^*}\left\{1+\int_0^{2\pi} N\left[k^*|v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})|\right]d\Theta\right\}.$$

Обратно, если для двух функций

$$\varphi^*(e^{i\Theta})\in H_N^* \quad \text{и} \quad f^*(e^{i\Theta})\in H_M^*$$

выполняются соотношения (32) или (33) и (34) с некоторым $k^*>0$ и вещественным α, то функции $f^*(e^{i\Theta})$ и $\varphi^*(e^{i\Theta})$ — экстремальные в равенстве (22).

Экстремальная функция $\varphi^*(z)$ всегда единственна, а экстремальная функция $f^*(z)$ единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$.

Доказательство. Вначале докажем существование экстремальной функции $f^*(z)$. Пусть

$$\lambda=\sup_{f\in H_M^1}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}f(e^{i\Theta})\cdot v(e^{i\Theta})\,d\Theta\right|.$$

Тогда существует такая последовательность $\{f_n(z)\}\in H^1_M$, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta} f_n(e^{i\Theta})\cdot v(e^{i\Theta})\,d\Theta\right|=\lambda.$$

Выберем из последовательности $\{f_n(z)\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся внутри круга $|z|<1$ к функции $f^*(z)\in H^1_M$. Это возможно ввиду теоремы 4. Тогда теорема 5 дает:

$$\lim_{n_k\to\infty}\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f_{n_k}(e^{i\Theta})\cdot v(e^{i\Theta})\,d\Theta=\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f^*(e^{i\Theta})\cdot v(e^{i\Theta})\,d\Theta,$$

т.е. существует экстремальная функция $f^*(e^{i\Theta})$ в равенстве (22).

Для доказательства того, что экстремальные функции $f^*(e^{i\Theta})$ и $\varphi^*(e^{i\Theta})$ связаны соотношениями (32) и (33), замечаем, прежде всего, что $\|f^*\|_{(M)}=1$. Т. к.

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f^*(e^{i\Theta})\left[v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right]d\Theta\right|=\|v-\varphi^*\|_N=\|v-\varphi^*\|_N\cdot\|f^*\|_{(M)},$$

то имеет место равенство в неравенстве Гельдера. Поэтому из леммы следует, что для функций $f^*(e^{i\Theta})$ и $\varphi^*(e^{i\Theta})$ выполняются соотношения (32), (33) и (34).

Обратно, если для функций

$$f^*(e^{i\Theta})\in H^*_M \quad \text{и} \quad \varphi^*(e^{i\Theta})\in H^*_N$$

выполняются равенства (32) $\Big($или (33)$\Big)$ и (34), то $f^*(e^{i\Theta})$ и $\varphi^*(e^{i\Theta})$ будут экстремальными в равенстве (22). В самом деле, из

$$\int_0^{2\pi} M\left[|f^*(e^{i\Theta})|\right]d\Theta=1$$

имеем, что $\|f^*\|_{(M)}=1$ $\Big($см. (8), стр. 96$\Big)$. По лемме

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f^*(e^{i\Theta})\cdot\left[v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right]d\Theta\right|=\|v-\varphi^*\|_N\cdot\|f^*\|_{(M)}=\|v-\varphi^*\|_N.$$

С другой стороны,

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f^*(e^{i\Theta})\cdot v(e^{i\Theta})\,d\Theta\right|\leqslant\sup_{f\in H^1_M}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v(e^{i\Theta})\,d\Theta\right|=$$

$$=\inf_{\varphi\in H^*_N}\|v-\varphi\|_N\leqslant\|v-\varphi^*\|_N$$

и, следовательно, $f^*(e^{i\Theta})$ дает

$$\sup_{f\in H^1_M}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\,v(e^{i\Theta})\,d\Theta\right|,$$

а $\varphi^*(e^{i\Theta})$ дает

$$\inf_{\varphi\in H^*_N}\|v-\varphi\|_N.$$

Покажем, что экстремальная функция $f^*(z)$ единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$. Предположим, что существуют две экстремальные функции $f_1^*(z)$ и $f_2^*(z)$. Тогда из равенства (32) имеем:

$$f_1^*(e^{i\Theta})\left[v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right]\cdot e^{i\Theta}=e^{i\alpha_1}\cdot q\left[k^*\left|v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right|\right]\cdot$$
$$\cdot\left|v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right|,$$
$$f_2^*(e^{i\Theta})\left[v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right]\cdot e^{i\Theta}=e^{i\alpha_2}\cdot q\left[k^*\left|v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right|\right]\cdot$$
$$\cdot\left|v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right|,$$

причем функция $\varphi^*(e^{i\Theta})$ здесь одна и та же. На множестве $E\left[v(e^{i\Theta})\neq\varphi^*(e^{i\Theta})\right]$ будем иметь

$$f_1^*(e^{i\Theta})=e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}f_2^*(e^{i\Theta}),$$

причем $\operatorname{mes}E>0$, ибо $v(e^{i\Theta})\overline{\in}H_N^*$. По теореме единственности для граничных значений

$$f_1^*(z)=e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot f_2^*(z).$$

Обратно, если $f^*(e^{i\Theta})$ экстремальная, то и любая $e^{i\alpha}\cdot f^*(e^{i\Theta})$ также экстремальная. Следовательно, $f^*(z)$ определяется с точностью до множителя $e^{i\alpha}$.

Покажем, что экстремальная функция $\varphi^*(z)$ единственна. Пусть $\varphi_1^*(z)$ и $\varphi_2^*(z)$ — две экстремальные функции. Тогда почти везде на $|z|=1$ из (32) имеем:

$$f^*(e^{i\Theta})\left[v(e^{i\Theta})-\varphi_1^*(e^{i\Theta})\right]\cdot e^{i\Theta}=q\left[k_1^*\left|v(e^{i\Theta})-\varphi_1^*(e^{i\Theta})\right|\right]\cdot$$
$$\cdot\left|v(e^{i\Theta})-\varphi_1^*(e^{i\Theta})\right|,$$
$$f^*(e^{i\Theta})\left[v(e^{i\Theta})-\varphi_2^*(e^{i\Theta})\right]\cdot e^{i\Theta}=q\left[k_2^*\left|v(e^{i\Theta})-\varphi_2^*(e^{i\Theta})\right|\right]\cdot$$
$$\cdot\left|v(e^{i\Theta})-\varphi_2^*(e^{i\Theta})\right|$$

(считаем, что взята та экстремальная функция $f^*(z)$, для которой

$$\int_0^{2\pi}f^*(e^{i\Theta})\cdot v(e^{i\Theta})\cdot e^{i\Theta}\,d\Theta>0\Big).$$

Вычитая, видим, что $f^*(e^{i\Theta})\left[\varphi_1^*(e^{i\Theta})-\varphi_2^*(e^{i\Theta})\right]\cdot e^{i\Theta}$ имеет почти везде на $|z|=1$ вещественные значения. Функция

$$f^*(z)\cdot\left[\varphi_1^*(z)-\varphi_2^*(z)\right]\cdot z\in H_1.$$

Представляя эту функцию интегралом Пуассона, замечаем, что

$$I\left\{f^*(z)\cdot\left[\varphi_1^*(z)-\varphi_2^*(z)\right]\cdot z\right\}\equiv 0.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(z)=f^*(z)\left[\varphi_1^*(z)-\varphi^*(z)\right]\cdot z\equiv\text{const}.$$

При $z=0$ будет $\Phi(0)=0$, следовательно,

$$f^*(z)\left[\varphi_1^*(z)-\varphi_2^*(z)\right]\cdot z\equiv 0.$$

Т. к. $f^*(z)\not\equiv 0$, то $\varphi_1^*(z)-\varphi_2^*(z)\equiv 0$, т. е. $\varphi_1^*(z)\equiv\varphi_2^*(z)$. Теорема полностью доказана.

Теорема 7а. *Если $v(e^{i\Theta}) \in E_N$, то существует экстремальная функция $f^* \in H_M^{*1}$ в равенстве (24). Если $p(u)$ непрерывная функция, то экстремальные функции $f^*(e^{i\Theta})$ и $\varphi^*(e^{i\Theta})$ связаны соотношениями:*

$$f^*(e^{i\Theta})\left[v(e^{i\Theta}) - \varphi^*(e^{i\Theta})\right]e^{i\Theta} = e^{i\alpha}\cdot q\left[\frac{|v(e^{i\Theta}) - \varphi^*(e^{i\Theta})|}{\|v-\varphi^*\|_{(N)}}\right]\cdot \frac{1}{k^*}\cdot\left|v(e^{i\Theta}) - \varphi^*(e^{i\Theta})\right| \tag{35}$$

или, в другой форме,

$$f^*(e^{i\Theta})\left[v(e^{i\Theta}) - \varphi^*(e^{i\Theta})\right]e^{i\Theta} = e^{i\alpha}\cdot p\left[k^*\,|f^*(e^{i\Theta})|\right]\cdot |f^*(e^{i\Theta})|\cdot\|v-\varphi^*\|_{(N)}, \tag{36}$$

причем $\|f^*\|_M = 1$ и

$$\int_0^{2\pi} N\left\{p\left[k^*|f^*(e^{i\Theta})|\right]\right\}d\Theta = 1. \tag{37}$$

Здесь α — действительное число, а k^* удовлетворяет условию

$$k^* = 1 + \int_0^{2\pi} M\left[k^*\,|f^*(e^{i\Theta})|\right]d\Theta.$$

Обратно, если для двух функций

$$f^*(e^{i\Theta}) \in H_M^* \quad и \quad \varphi^*(e^{i\Theta}) \in H_N^*$$

выполняются соотношения (35) $\big($или (36)$\big)$, (37) и $\|f^*\|_M = 1$, то $f^*(e^{i\Theta})$ и $\varphi^*(e^{i\Theta})$ экстремальные функции в равенстве (24).

Экстремальная функция $\varphi^*(z)$ всегда единственна, а экстремальная функция $f^*(z)$ единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$.

Теорема 7а доказывается аналогично теореме 7.

Нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема 8. *Если в условиях теоремы 7 $v(e^{i\Theta})$ рациональная функция и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ все ее полюсы внутри $|z| < 1$, то*

$$\Phi(z) = zf^*(z)\cdot\left[v(z) - \varphi^*(z)\right] = A\cdot z\cdot\frac{\prod\limits_1^{n-1}(z-\alpha_i)(1-\bar\alpha_i z)}{\prod\limits_1^{n}(z-\beta_i)(1-\bar\beta_i z)}, \tag{38}$$

$$f^*(z) = e^{i\lambda}\cdot\prod{}' \frac{z-\alpha_l}{1-\bar\alpha_l z}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\{S^{-1}\left[B\frac{\prod_1^{n-1}|e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{\prod_1^{n}|e^{i\Theta}-\beta_j|^2}\right]\right\}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d\Theta}, \tag{39}$$

$$v(z) - \varphi^*(z) = e^{-i\lambda}\cdot A\cdot\prod{}'' \frac{z-\alpha_l}{1-\bar\alpha_l z}\cdot\prod_1^{n-1}(1-\bar\alpha_i z)^2\prod_1^{n}\left[(z-\beta_i)(1-\bar\beta_i z)\right]^{-1}\cdot e^{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\{S^{-1}\left[B\frac{\prod_1^{n-1}|e^{i\Theta}-\alpha_l|^2}{\prod_1^{n}|e^{i\Theta}-\beta_j|^2}\right]\right\}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d\Theta}, \tag{40}$$

где α_i $(|\alpha_i|<1)$, $i=1, \ldots, n-1$ *— некоторые точки;* Π' *распространяется на те* α_i, *которые служат нулями* $f^*(z)$, *а* Π'' *на те* α_i, *которые служат нулями* $v(z)-\varphi^*(z)$; $S^{-1}(\omega)$ *функция, обратная к функции* $S(\omega)=\omega\cdot p(\omega)$ $(\omega\geqslant 0)$; *число* $B>0$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^{2\pi} M\left\{S^{-1}\left[B\frac{\prod\limits_1^{n-1}|e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{\prod\limits_1^{n}|e^{i\Theta}-\beta_i|^2}\right]\right\}d\Theta=1, \qquad (41)$$

$A=e^{i\alpha}\cdot B\cdot\frac{1}{k^*}$; α *и* λ *— действительные числа.*

Для доказательства теоремы потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Если функция* $F(z)$ *аналитична в замкнутом круге* $|z|\leqslant 1$, *то она имеет параметрическое представление В. И. Смирнова вида:*

$$F(z)=e^{i\lambda}\cdot\prod_1^n\frac{z-\alpha_i}{1-\alpha_i z}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\ln|F(e^{i\Theta})|\,d\Theta}. \qquad (42)$$

Почти очевидное доказательство формулы (42) состоит в следующем. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ нули $f(z)$ внутри $|z|<1$, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ее нули на окружности $|z|=1$. Обозначим

$$f_1(z)=\frac{F(z)}{\prod\limits_1^n\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}} \quad \text{и} \quad f_2(z)=\frac{f_1(z)}{\prod\limits_1^m(z-\gamma_i)},$$

$f_2(z)$ будет аналитической и не обращающейся в нуль в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ функцией. Отсюда, $\ln f_2(z)$ есть функция аналитическая в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и, тем более, $\ln f_2(z)\in H_1$. Но

$$\ln f_1(z)=\ln f_2(z)+\sum_1^m\ln(z-\gamma_i)$$

и так как

$$\int_0^{2\pi}|\ln(re^{i\Theta})-\gamma_i)|\,d\Theta\leqslant C$$

для любого r, $0\leqslant r<1$, то $\ln f_1(z)\in H_1$. Это дает возможность представить $\ln|f_1(z)|$ интегралом Пуассона, а тогда $\ln f_1(z)$ представляется интегралом Шварца:

$$\ln f_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\cdot\ln|F(e^{i\Theta})|\,d\Theta+i\lambda,$$

λ — вещественное. Отсюда,

$$f_1(z)=e^{i\lambda}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\cdot\ln|F(e^{i\Theta})|\,d\Theta},$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ входят в класс H_1 и произведение $f(z)\cdot\varphi(z)$ оказывается аналитической в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ функцией, то $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют параметрическое представление В. И. Смирнова вида:*

$$f(z)=e^{i\lambda_1}\cdot\prod{}'\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\Theta})|\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d\Theta},$$

$$\varphi(z)=e^{i\lambda_2}\cdot\prod{}''\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|\varphi(e^{i\Theta})|\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d\Theta},$$

где все точки α_i лежат внутри круга $|z|<1$, а произведения Π' и Π'' конечные.

Доказательство. Эта лемма является вариантом леммы § 1 главы 3 работы (6). Функция $F(z)=f(z)\cdot\varphi(z)$ имеет конечное число нулей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ внутри круга $|z|<1$, а тогда и $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют конечное число нулей внутри $|z|<1$. Из параметрического представления В. И. Смирнова для функций класса H_1 имеем:

$$f(z)=e^{i\lambda_1}\cdot\prod{}'\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\cdot\ln|f(e^{i\Theta})|\,d\Theta}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d\psi_1(\Theta)},$$

$$\varphi(z)=e^{i\lambda_2}\cdot\prod{}''\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\ln|\varphi(e^{i\Theta})|\,d\Theta}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d\psi_1(\Theta)},$$

где $\psi_1(\Theta)$ и $\psi_2(\Theta)$ невозрастающие сингулярные функции; Π' распространяется на те точки α_i, которые служат нулями $f(z)$, а Π'' на те α_i, которые служат нулями $\varphi(z)$. Отсюда:

$$F(z)=f(z)\cdot\varphi(z)=e^{i(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\prod_1^n\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot$$

$$\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\cdot\ln|f(e^{i\Theta})\cdot\varphi(e^{i\Theta})|\,d\Theta}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d[\psi_1(\Theta)+\psi_2(\Theta)]}. \qquad (43)$$

По лемме 1 функция $F(z)$ имеет вид (42). Сравнивая (42) и (43), найдем:

$$1\equiv e^{i(\lambda_1+\lambda_2-\lambda)}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d[\psi_1(\Theta)+\psi_2(\Theta)]}.$$

Положим $z=0$. Тогда

$$1=e^{i(\lambda_1+\lambda_2-\lambda)}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d[\psi_1(\Theta)+\psi_2(\Theta)]},$$

откуда

$$\int\limits_0^{2\pi}d\Big[\psi_1(\Theta)+\psi_2(\Theta)\Big]\equiv 0.$$

Так как $\psi_1(\Theta)$ и $\psi_2(\Theta)$ не возрастают, то

$$\psi_1(\Theta)+\psi_2(\Theta)\equiv\text{const},$$

а значит $\psi_1(\Theta)\equiv\text{const}$ и $\psi_2(\Theta)\equiv\text{const}$. Следовательно, имеет место указанное в формулировке леммы представление функций $f(z)$ и $\varphi(z)$.

Доказательство теоремы 8. Функция $v(e^{i\Theta}) \in E_N$ и значит экстремальные функции $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$ действительно существуют. Берем для конкретности ту экстремальную функцию $f^*(z)$, для которой

$$\int_0^{2\pi} f^*(e^{i\Theta}) \cdot v(e^{i\Theta}) \cdot e^{i\Theta}\, d\Theta > 0,$$

т. е. в соотношениях (32), (33) $\alpha = 0$. Функция

$$\Phi(z) = z \cdot f^*(z) \cdot \left[v(z) - \varphi^*(z) \right]$$

будет аналитической в $|z| < 1$, за исключением точек $\beta_1, \ldots, \beta_n$, где она может иметь полюсы. Очевидно, что в кольце, примыкающем к окружности $|z| = 1$ и не содержащем точек $\beta_1, \ldots, \beta_n$, функция $\Phi(z)$ входит в класс H_1. Так как

$$e^{i\Theta} \cdot f^*(e^{i\Theta}) \cdot \left[v(e^{i\Theta}) - \varphi^*(e^{i\Theta}) \right] = q\left[k^* \left| v(e^{i\Theta}) - \varphi^*(e^{i\Theta}) \right| \right] \cdot$$
$$\cdot \left| v(e^{i\Theta}) - \varphi^*(e^{i\Theta}) \right|,$$

то граничные значения функции $\Phi(z)$ на $|z| = 1$ вещественны. Пользуясь принципом симметрии Римана—Шварца (доказательство которого без изменения проходит для функций класса H_1), видим, что функцию $\Phi(z)$ можно аналитически продолжить через $|z| = 1$. Продолжение, как обычно, дается формулой

$$\Phi(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar z} \right)}, \qquad |z| > 1.$$

Отсюда видно, что функция $\Phi(z)$ будет аналитической во всей расширенной плоскости комплексного переменного, за исключением точек $\beta_1, \ldots, \beta_n$ и $\frac{1}{\bar\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\bar\beta_n}$, где она имеет полюсы. Поэтому $\Phi(z)$ является рациональной функцией. Так как $\Phi(0) = 0$, то в силу симметрии и $\Phi(\infty) = 0$. Это означает, что степень числителя рациональной функции $\Phi(z)$ должна быть меньше степени знаменателя. Следовательно, $\Phi(z)$ имеет вид (38), причем $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \frac{1}{\bar\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\bar\alpha_{n-1}}$ являются нулями $\Phi(z)$.

Функция

$$F(z) = z\left[v(z) - \varphi^*(z) \right] \cdot \prod_1^n \left[(z - \beta_i)(1 - \bar\beta_i z) \right]$$

входит в класс $H_N^* \subset H_1$, а произведение

$$F(z) \cdot f^*(z) = A \cdot z \cdot \prod_1^{n-1} \left[(z - \alpha_i)(1 - \bar\alpha_i z) \right]$$

есть функция аналитическая в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. По лемме 2 функция $f^*(z) \in H_M^* \subset H_1$ имеет параметрическое представление В. И. Смирнова вида:

$$f^*(z) = \prod{}' \frac{z - \alpha_i}{1 - \bar\alpha_i z} \cdot e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f^*(e^{i\Theta})| \frac{e^{i\Theta} + z}{e^{i\Theta} - z} d\Theta}, \tag{44}$$

где Π' — произведение, распространенное на те из точек α_i, которые служат нулями $f^*(z)$. Для экстремальных функций $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$ имеет место равенство (33), где в силу нашего выбора $f^*(z)\,\alpha=0$. С другой стороны,

$$k^*\cdot f^*(z)\cdot\left[v(z)-\varphi^*(z)\right]\cdot z=B\cdot z\,\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}(z-\alpha_i)(1-\bar{\alpha}_i z)}{\prod\limits_{1}^{n}(z-\beta_i)(1-\bar{\beta}_i z)}.$$

Поэтому

$$|f^*(e^{i\Theta})|\cdot p\left[|f^*(e^{i\Theta})|\right]=k^*\cdot f^*(e^{i\Theta})\cdot\left[v(e^{i\Theta})-\varphi^*(e^{i\Theta})\right]\cdot e^{i\Theta}=$$

$$=B\cdot e^{i\Theta}\cdot\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}(e^{i\Theta}-\alpha_i)(1-\bar{\alpha}_i\cdot e^{i\Theta})}{\prod\limits_{1}^{n}(e^{i\Theta}-\beta_i)(1-\bar{\beta}_i\cdot e^{i\Theta})}=B\,\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}|e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{\prod\limits_{1}^{n}|e^{i\Theta}-\beta_i|^2}.$$

Рассмотрим для $\omega>0$ функцию $S(\omega)=\omega\cdot p(\omega)$ $\big(p(\omega)$ — как и всюду в этой статье, правая производная N—функции $M(\omega)\big)$. Очевидно, что функция $S(\omega)$ монотонно возрастающая, поэтому существует однозначная обратная функция $S^{-1}(\omega)$. Тогда

$$S\left[|f^*|\right]=|f^*(e^{i\Theta})|\cdot p\left[|f^*(e^{i\Theta})|\right]=B\cdot\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}|e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{\prod\limits_{1}^{n}|e^{i\Theta}-\beta_i|^2}.$$

Отсюда

$$|f^*|=S^{-1}\left[B\,\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}|e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{\prod\limits_{1}^{n}|e^{i\Theta}-\beta_i|^2}\right].$$

Подставляя это выражение в (44), приходим к формуле (39) с $\lambda=0$, причем в силу (34) имеет место равенство (41). Очевидно, что если отказаться от взятой нами нормировки $f^*(z)$, то получим (39) в полном объеме. Из (38) и (39) следует (40), и теорема доказана.

Из равенств (39) и (40) немедленно получается известный ранее вид экстремальных функций для классов H_p $(p\geqslant 1)$ и для класса ограниченных функций. $\big($См. литературу, указанную в начале статьи, и, прежде всего, статьи (3) и (4).$\big)$ В самом деле, для $H_p(p\geqslant 1)$ имеем $S(\omega)=\omega^p$, а $S^{-1}(\omega)=$ $=\omega^{\frac{1}{p}}$ и

$$S^{-1}\left[B\cdot\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}|e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{\prod\limits_{1}^{n}|e^{i\Theta}-\beta_i|^2}\right]=B^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{\prod\limits_{1}^{n-1}|e^{i\Theta}-\alpha_i|^{2/p}}{\prod\limits_{1}^{n}|e^{i\Theta}-\beta_i|^{2/p}}.$$

По формуле Шварца

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1-\bar{\alpha}_i e^{i\Theta}|\cdot\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta=\ln(1-\bar{\alpha}_i z)+i\beta_0.$$

Тогда формула (39) принимает вид:

$$f^*(z)=C\cdot e^{i\lambda}\cdot\prod{}'\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot e^{\frac{2}{p}\left[\sum\limits_1^{n-1}\ln(1-\bar{\alpha}_i z)-\sum\limits_1^{n}\ln(1-\beta_i)\right]}=$$

$$=C\cdot e^{i\lambda}\cdot\prod{}'\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot\prod_1^{n-1}(1-\bar{\alpha}_i z)^{2/p}\cdot\prod_1^{n}(1-\bar{\beta}_i z)^{-2/p}, \tag{45}$$

где $C>0$ таково, что

$$\int_0^{2\pi}|f^*(e^{i\Theta})|^p\,d\Theta=1.$$

Формула (40) будет иметь вид:

$$v(z)-\varphi^*(z)=Be^{-i\lambda}\cdot\prod{}''\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot\prod_1^{n-1}(1-\bar{\alpha}_i z)^2\cdot$$

$$\cdot\prod_1^{n}\left[(z-\beta_i)(1-\bar{\beta}_i z)\right]^{-1}\cdot\prod_1^{n-1}(1-\bar{\alpha}_i z)^{-2/p}\cdot\prod_1^{n}(1-\beta_i\cdot z)^{2/p}=$$

$$=B\cdot e^{-i\lambda}\cdot\prod{}''\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot\prod_1^{n-1}(1-\bar{\alpha}_i z)^{2/q}\cdot\prod_1^{n}\frac{1-\bar{\beta}_i z}{z-\beta_i}\cdot\prod_1^{n}(1-\bar{\beta}_i z)^{-2/q}.$$

В частности, при $p=\infty$ (класс ограниченных функций) находим:

$$f^*(z)=\prod{}'\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z},$$

$$v(z)-\varphi^*(z)=B\cdot\prod{}''\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot\prod_1^{n-1}(1-\bar{\alpha}_i z)^2\prod_1^{n}\left[(z-\beta_i)(1-\bar{\beta}_i z)\right]^{-1}.$$

Аналогичные результаты можно было получить и в ситуации теоремы 7а с рациональной $v(z)$.

§ 3. Проблема Каратеодори – Фейера – Неванлинна – Пика для H_M^*

Применяя методы, развитые в работах (12), (13) можно исследовать с помощью теоремы 8 вид экстремальных функций в задачах типа Каратеодори – Фейера – Неванлинна – Пика для наших классов функций.

Теорема 9. *Пусть заданы линейные функционалы $l_1(f), \ldots, l_m(f)$ вида*

$$l_i(f)=\int_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot v_i(e^{i\Theta})\,d\Theta,$$

где $v_i(e^{i\Theta})\in E_N$, $i=1, \ldots, m$, причем никакая линейная комбинация функций $v_i(e^{i\Theta})$ не совпадает ни с одной из функций класса H_N^*, и произвольные комплексные числа $c_1, \ldots, c_m$. Среди функций класса H_M^*, для которых

$l_i(f)=c_i$, $i=1, \ldots, m$ наименьшую норму $\|f\|_{(M)}$ имеет единственная функция $f^*(z)$ такая, что функция

$$f^{**}(z)=\frac{f^*(z)}{\|f^*\|_{(M)}}$$

будет экстремальной для некоторого функционала $l(f)$, являющегося линейной комбинацией функционалов $l_1(f), \ldots, l_m(f)$. Если $v_1(z), \ldots, v_m(z)$ являются рациональными, то функция $f^*(z)$ имеет вид:

$$f^*(z)=e^{i\lambda}\|f^*\|_{(M)}\cdot\prod{}' \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left\{S^{-1}\left[B\frac{\prod\limits_1^{n-1}|e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{\prod\limits_1^{n}|e^{i\Theta}-\beta_i|^2}\right]\right\}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d\Theta}, \quad (46)$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_n$, все полюсы функций $v_1(z), \ldots, v_m(z)$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — некоторые точки в круге $|z|<1$; Π' — распространяется на некоторые из α_i; $S^{-1}(\omega)$ — та же, что в теореме 8, $B>0$, удовлетворяет условию (41), λ — действительное число.

Доказательство. Функционалы $l_1(f), \ldots, l_m(f)$ линейно независимы над пространством H_M^*. Действительно, если это не так, то найдутся такие γ_k, не все равные нулю, что

$$\sum_1^m l_k(f)\cdot\gamma_k \doteq 0 \quad \text{над} \quad H_M^*.$$

Но тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i\Theta}\cdot f(e^{i\Theta})\cdot\sum_1^m \gamma_k\cdot v_k(e^{i\Theta})\,d\Theta=0$$

для всех $f\in H_M^*$, в частности и для $f\in(EH)_M$. Отсюда следует, что

$$\sum_1^m \gamma_k\cdot v_k(e^{i\Theta})\in H_N^*$$

(см. доказательство теоремы 2), а это противоречит условию. Из теоремы 7 следует, что любой функционал $l(f)$, являющийся линейной комбинацией функционалов $l_1(f), \ldots, l_m(f)$, имеет единственный с точностью до множителя $e^{i\alpha}$ экстремальный элемент. Тогда из теорем 3 и 7 работы [13] вытекает существование единственной функции $f^*(z)\in H_M^*$, удовлетворяющей условиям $l_i(f^*)=c_i$ и обладающей наименьшей нормой $\|f^*\|_{(M)}$. Согласно упомянутым теоремам работы [13] функция

$$f^{**}(z)=\frac{f^*(z)}{\|f^*\|_{(M)}}$$

должна быть экстремальной для задачи (4) с функцией $v(e^{i\Theta})$, являющейся некоторой линейной комбинацией функций $v_1(e^{i\Theta}), \ldots, v_m(e^{i\Theta})$, т. е.

$$v(e^{i\Theta})=\sum_1^m \gamma_k\cdot v_k(e^{i\Theta}).$$

Если функции $v_k(e^{i\Theta})$, $k=1, \ldots, m$ — рациональные, то $v(e^{i\Theta})$ также рациональная, и мы можем применить нашу теорему 8. Из формулы (39) для экстремальной функции $f^{**}(z)$ в задаче (4) следует и формула (46). Теорема доказана.

Теорема 10. *Для любой* $f(z)\in H_M^*$ *найдется такая последовательность* $\{\varphi_n(z)\}\in H_M^*$, *что* $\{\varphi_n(z)\}$ *равномерно сходится внутри* $|z|<1$ *к* $f(z)$, *причем*

$$\|\varphi_n\|_{(M)}=\|f\|_{(M)} \tag{47}$$

и функции $f_n(z)$ *имеют вид* (46).

Доказательство. Пусть

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz_n+\ldots.$$

Среди всех функций $F(z)$, начинающихся в своем разложении с

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n,$$

наименьшую норму $\|F\|_{(M)}$ имеет некоторая функция $f_n^*(z)$ вида (46). Очевидно, что при любом n имеем $\|f_n^*\|_{(M)}\leqslant\|f\|_{(M)}$, т. е. нормы последовательности $\{f_n^*(z)\}$ равномерно ограничены. В этом случае последовательность $\{f_n^*(z)\}$ равномерно ограничена внутри $|z|<1$. Кроме того, коэффициенты Тейлора функций $f_n^*(z)$ стремятся к коэффициентам Тейлора функции $f(z)$. Поэтому последовательность $\{f_n^*(z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ внутри $|z|<1$. Очевидно, что последовательность $\{\|f_n^*\|_{(M)}\}$ возрастающая, поэтому существует

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^*\|_{(M)}\leqslant\|f\|_{(M)}.$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^*\|_{(M)}=\|f\|_{(M)}.$$

Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^*\|_{(M)}<\|f\|_{(M)},$$

тогда существует такое $\varepsilon>0$, что $\|f_n^*\|_{(M)}<\|f\|_{(M)}-\varepsilon$ при всех n. Возьмем произвольное $r<1$. Тогда

$$\|f_n^*\|_{(M)}^r<\|f\|_{(M)}-\varepsilon. \tag{48}$$

В круге $|z|<r$ $f_n(z)\to f(z)$ равномерно, а т. к. нормы непрерывны относительно равномерной сходимости, то

$$\|f_n^*\|_{(M)}^r\to\|f\|_{(M)}^r,\qquad n\to\infty.$$

Переходя в (48) к пределу, получаем $\|f\|_{(M)}^r<\|f\|_{(M)}-\varepsilon$ для всех r, $0\leqslant\leqslant r<1$. Поэтому

$$\|f\|_{(M)}=\sup_r\|f\|_{(M)}^r\leqslant\|f\|_{(M)}-\varepsilon,$$

т. е. имеем противоречие. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^*\|_{(M)}=\|f\|_{(M)}.$$

Положим

$$\varphi_n(z)=\frac{f_n^*(z)\cdot\|f\|_{(M)}}{\|f_n^*\|_{(M)}}.$$

Тогда $\|\varphi_n\|_{(M)}=\|f\|_{(M)}$ и $\varphi_n(z)\to f(z)$ равномерно внутри $|z|<1$, что и доказывает теорему.

§ 4. Задачи о радиусах однолистности, звездообразности и выпуклости в H_M^*

Обозначим через $H_{(M)}^{*1}(a)$ множество, состоящее из всех функций $f(z)\in H_{(M)}^{*1}$, у которых $f(0)=0$, $f'(0)=a\neq 0$. Если $|a|\leqslant M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)$, то $H_{(M)}^{*1}(a)$ непусто. В самом деле, непустота $H_{(M)}^{*1}(a)$ будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$|a|\leqslant \sup_{f\in H_{(M)}^{*1},\, f(0)=0} |f'(0)|.$$

Чтобы найти последнюю верхнюю грань, положим $f(z)=z\cdot F(z)$. Тогда $F(z)\in H_{(M)}^{*1}$ и $f'(0)=F(0)$. Поэтому

$$\sup_{f\in H_{(M)}^{*1},\, f(0)=0} |f'(0)|=\sup_{F\in H_{(M)}^{*1}} |F(0)|=\sup_{F\in H_{(M)}^{*1}} \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\Theta})\,d\Theta\right|$$

и экстремальная функция $F^*(z)$ имеет вид (39), причем для нашего случая $n=1$ и $F^*(z)$ не имеет нулей. Тогда

$$F^*(0)=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln[S^{-1}(B)]\,d\Theta}=S^{-1}(B).$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} M[S^{-1}(B)]\,d\Theta=1,$$

то

$$M[S^{-1}(B)]=\frac{1}{2\pi}\quad\text{и}\quad S^{-1}(B)=M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right).$$

Итак, неравенство

$$|a|\leqslant M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

обеспечивает непустоту класса $H_{(M)}^{*1}(a)$. При

$$|a|=M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

класс $H_{(M)}^{*1}(a)$ будет состоять из единственной функции $f(z)=az$, т. к. экстремальная функция в задаче о

$$\sup_F |F(0)|,\quad F\in H_{(M)}^{*1}$$

единственна. Будем далее рассматривать случай, когда

$$|a|<M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right).$$

Так как для $f'(0)=a\neq 0$, то для каждой функции из $H_{(M)}^{*1}(a)$ существует круг $|z|<R\leqslant 1$, в котором она однолистна. Из компактности класса $H_{(M)}^{*1}(a)$ следует, что существует такой круг $|z|<r\leqslant 1$, $r>0$, в котором однолистны одновременно все функции класса. Число r называется радиусом однолистности какого-нибудь класса функций, аналитических в $|z|<1$, если все функции этого класса однолистны в круге $|z|<r$, а для любого $R>r$ найдутся функции из этого класса, не являющиеся однолистными в круге $|z|<R$. Покажем, что для класса $H_{(M)}^{*1}(a)$ радиус однолистности

$r<1$, т. е. существуют функции $f(z)\in H^{*1}_{(M)}(a)$, которые не являются однолистными в целом круге $|z|<1$. Рассмотрим функцию

$$f(z)=M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\cdot z\cdot\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}=-M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\alpha z+\ldots.$$

Эта функция принадлежит классу $H^{*1}_{(M)}$, ибо $\|f\|_{(M)}=1$, т. к.

$$\int\limits_0^{2\pi}M(|f|)\,d\Theta=\int\limits_0^{2\pi}M\left[M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right]d\Theta=1$$

(см. (8), стр. 97). С другой стороны, т. к.

$$|a|<M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right),$$

то можно подобрать $\alpha\,(|\alpha|<1)$ так, что

$$a=\alpha\cdot M^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\quad\text{и}\quad f(z)\in H^{*1}_{(M)}(a).$$

Функция $f(z)$ неоднолистна в круге $|z|<1$, ибо $f(0)=f(\alpha)=0$. Итак, в нашем случае $0<r<1$.

Функцию $f^*(z)\in H^{*1}_{(M)}(a)$ назовем экстремальной в задаче о радиусе однолистности этого класса, если она не является однолистной ни в каком круге $|z|<R$, где $R>r$. Покажем, что экстремальная функция $f^*(z)\in H^{*1}_{(M)}(a)$ в задаче о радиусе однолистности существует. Для любого $\varepsilon>0$ найдется функция $f_\varepsilon(z)$ из нашего класса, которая теряет однолистность в $|z|<r+\varepsilon$ (причем для каждого ε a priori может быть своя функция). Предположим, что экстремальной функции не существует, т. е. нет такой функции $f(z)$, которая теряет однолистность в любом круге радиуса $r+\varepsilon$, независимо от ε. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\}\to 0$ при $n\to\infty$. Для каждого ε_n находим функцию $f_{\varepsilon_n}(z)$, теряющую однолистность в круге $|z|<r+\varepsilon_n$. Так как $H^{*1}_{(M)}(a)$ компактно в себе в смысле сходимости внутри, то можно считать, что $\{f_{\varepsilon_n}(z)\}\to f(z)$ равномерно внутри $|z|<1$ и $f(z)\in H^{*1}_{(M)}(a)$. По предположению экстремальной функции не существует, поэтому $f(z)$ однолистна в некотором круге $|z|<r+\eta$, $\eta<0$. Фиксируем точку z в круге $|z|<r+\frac{\eta}{2}$. Тогда логарифмический вычет

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r+\eta}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}\,d\zeta\equiv 1.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r+\eta}\frac{f'_{\varepsilon_n}(\zeta)}{f_{\varepsilon_n}(\zeta)-f(z)}\,d\zeta\to\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r+\eta}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}\,d\zeta\equiv 1.$$

Поэтому, начиная с некоторого $n>N$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r+\eta}\frac{f'_{\varepsilon_n}(\zeta)}{f_{\varepsilon_n}(\zeta)-f(z)}\,d\zeta=1,$$

т. е. все $f_{\varepsilon_n}(z)$ для $n>N$ будут однолистны в круге $|z|<r+\frac{\eta}{2}$, что противоречит предположению $\varepsilon_n\to 0$. Следовательно, существует экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче о радиусе однолистности класса $H^{*1}_{(M)}(a)$.

Теорема 11. *Экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче о радиусе однолистности класса $H^{*1}_{(M)}(a)$ имеет вид:*

$$f^*(z)=e^{i\lambda}\cdot\prod{}'\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left\{S^{-1}\left[B\frac{\prod\limits_1^3|e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{|e^{i\Theta}-\beta_1|^2|e^{i\Theta}-\beta_2|^2}\right]\right\}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}d\Theta}, \tag{49}$$

где β_i; $i=1,\ 2$; $\alpha_i=1,\ 2,\ 3$ — *некоторые точки в круге* $|z|<1$, *а* λ, B, Π', $S^{-1}(\omega)$ *те же, что в теореме* 8.

Доказательство. Теорема доказывается методами, развитыми в работе [14]. Пусть $f^*(z)$ — экстремальная функция. Это означает, что либо в круге $|z|\leqslant r$ имеются две точки b_1 и b_2 (одна из них обязательно лежит на окружности $|z|=r$) такие, что $f^*(b_1)=f^*(b_2)$, либо на окружности $|z|=r$ имеется такая точка b_0, что $f^{*\prime}(b_0)=0$. Рассмотрим первый случай. Пусть

$$l_1(f)=f(0);\quad l_2(f)=f'(0);\quad l_3(f)=f(b_2)-f(b_1) -$$

линейные функционалы над H^*_M. Когда $f(z)$ пробегает класс $H^{*1}_{(M)}$, то точка

$$\Big(z_1=l_1(f);\quad z_2=l_2(f);\quad z_3=l_3(f)\Big)$$

описывает замкнутое выпуклое тело A_3 в трехмерном комплексном пространстве. При этом каждой граничной точке тела A_3 соответствует единственная функция $f(z)\in H^{*1}_{(M)}$, являющаяся экстремальной для задачи:

$$\sup_{f\in H^{*1}_{(M)}}\Big|\gamma_1 l_1(f)+\gamma_2 l_2(f)+\gamma_3 l_3(f)\Big|=$$

$$=\sup_{f\in H^{*1}_{(M)}}\Big|\gamma_1 f(0)+\gamma_2 f'(0)+\gamma_3\big[f(b_2)-f(b_1)\big]\Big|,$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — некоторые числа, определяемые рассматриваемой граничной точкой тела A_3. (См. (13).) Эта функция, как следует из формулы (39), имеет вид (49). Теорема будет доказана, если мы покажем, что точка $(0;\ a;\ 0)$ лежит на границе тела A_3. Точка $(0;\ a;\ 0)\in A_3$, ибо $f^*(z)\in H^{*1}_{(M)}$. Пересечем тело A_3 плоскостями $z_1=f(0)=0$; $z_2=f'(0)=0$. В сечении, которое мы мыслим лежащим в плоскости z_3, получается выпуклая фигура C, причем точка O принадлежит сечению C, ибо точка $(0;\ a;\ 0)$ принадлежит плоскостям $z_1=0$; $z_2=0$ и телу A_3. Покажем, что точка O лежит на границе C. Предположим, что O внутренняя точка C. Функции $f(z)$ класса $H^{*1}_{(M)}$ равномерно ограничены, а следовательно, и равностепенно непрерывны внутри круга $|z|<1$. Отсюда, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что, как только $|b_1'-b_1|<\delta$ и $|b_2'-b_2|<\delta$, то

$$\Big|f(b_1')-f(b_1)\Big|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{и}\quad\Big|f(b_2')-f(b_2)\Big|<\frac{\varepsilon}{2}$$

для любой $f(z)\in H^{*1}_{(M)}$. Выбираем точки b_1' и b_2' внутри круга $|z|<r$. Если положить

$$l_3'(f)=f(b_1')-f(b_2'),$$

то

$$\Big|l_3(f)-l_3'(f)\Big|\leqslant\Big|f(b_1')-f(b_1)\Big|+\Big|f(b_2')-f(b_2)\Big|<\varepsilon, \tag{50}$$

при всех $f\in H^{*1}_{(M)}$. Пусть C' множество значений функционала $l_3'(f)$, получаемое, когда $f(z)$ пробегает класс $H^{*1}_{(M)}(a)$. C', очевидно, — выпуклая фигура.

Из неравенства (50) следует, что в ε окрестности любой точки фигуры C найдется точка фигуры C'. Покажем, что $O \in C'$, если ε — достаточно мало. Если это не так, то можно провести прямую l такую, что точка O и фигура C' лежат по разные стороны от нее. Так как точка O внутренняя для C, то достаточно малая окрестность этой точки не содержит точек фигуры C', что противоречит неравенству (50) с достаточно малым ε. Следовательно, $O \in C'$, т. е. существует такая функция $f(z) \in H^{*1}_{(M)}(a)$, что

$$l_3'(f) = f(b_1') - f(b_2') = 0.$$

Но точки b_1' и b_2' лежат внутри $|z| < r$, а r — радиус однолистности класса $H^{*1}_{(M)}(a)$. Получили противоречие. Следовательно, точка O лежит на границе фигуры C, а значит точка $(0;\ a;\ 0)$ лежит на границе тела A_3, и ей соответствует единственная функция $f(z)$ вида (49). С другой стороны, экстремальной функции $f^*(z)$ тоже соответствует точка $(0;\ a;\ 0)$ и, следовательно, $f^*(z)$ имеет вид (49). Для этого случая теорема доказана. Второй случай доказывается так же, только с заменой функционала $l_3(f)$ на функционал

$$L_3(f) = f'(b_0).$$

Аналогично понятию радиуса однолистностн класса $H^{*1}_{(M)}(a)$ и экстремальной функции в задаче о радиусе однолистности вводятся понятия о радиусах звездообразности и выпуклости класса $H^{*1}_{(M)}(a)$ и об экстремальных функциях в задачах о радиусах звездообразности и выпуклости.

Если R_S — радиус звездообразности класса $H^{*1}_{(M)}(a)$, а R_C — радиус выпуклости этого класса, то, очевидно,

$$0 < R_C < R_S \leqslant r.$$

Аналогично предыдущему доказывается существование экстремальной функции в задачах о радиусе звездообразности и о радиусе выпуклости.

Теорема 12. *Экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче о радиусе звездообразности класса $H^{*1}_{(M)}(a)$ имеет вид:*

$$f^*(z) = e^{i\lambda} \cdot \prod{}' \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} \cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left\{S^{-1}\left[B\frac{\prod\limits_1^3 |e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{|e^{i\Theta}-\beta|^4}\right]\right\}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta}, \qquad (51)$$

где β, α_i, $i = 1, 2, 3$ — некоторые точки в круге $|z| < 1$, а λ, B, Π', $S^{-1}(\omega)$ те же, что и в теореме 8.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 11. Так как здесь приходится рассматривать экстремальную задачу о

$$\sup_{f \in H^{*1}_{(M)}} \left|\gamma_1 f(0) + \gamma_2 f'(0) + \gamma_3 f(\beta) + \gamma_4 f'(\beta)\right|,$$

то в формуле (39) n будет равно 4.

Теорема 13. *Экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче о радиусе выпуклости класса $H^{*1}_{(M)}(a)$ имеет вид:*

$$f^*(z) = e^{i\lambda} \cdot \prod{}' \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} \cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left\{S^{-1}\left[B\frac{\prod\limits_1^4 |e^{i\Theta}-\alpha_i|^2}{|e^{i\Theta}-\beta|^6}\right]\right\}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta} \qquad (52)$$

где β, α_i, $i=1, 2, 3, 4$ — *некоторые точки в круге* $|z|<1$, *а* λ, B, Π', $S^{-1}(\omega)$ *те же, что и в теореме* 8.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 11. Так как здесь приходится рассматривать экстремальную задачу о

$$\sup_{f \in H^{*1}_{(M)}} \left| \gamma_1 f(0) + \gamma_2 f'(0) + \gamma_3 f'(\beta) + \gamma_4 f''(\beta) \right|,$$

то в формуле (39) $n=5$.

Из равенств (49), (51) и (52) получается вид экстремальных функций в задачах о радиусах однолистности, звездообразности и выпуклости соответственно для класса $H^1_p(a)$ $(p \geqslant 1)$. А именно, экстремальная функция в задаче о радиусе однолистности класса $H^1_p(a)$ имеет вид:

$$f^*(z) = C \cdot e^{i\lambda} \cdot \prod{}' \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} \cdot \prod_1^3 (1-\bar{\alpha}_i z)^{2/p} \cdot \prod_1^2 (1-\bar{\beta}_i z)^{-2/p}. \tag{53}$$

Экстремальная функция в задаче о радиусе звездообразности класса $H^1_p(a)$ имеет вид:

$$f^*(z) = C \cdot e^{i\lambda} \cdot \prod{}' \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} \cdot \prod_1^3 (1-\bar{\alpha}_i z)^{2/p} \cdot (1-\bar{\beta} z)^{-4/p}. \tag{54}$$

Экстремальная функция в задаче о радиусе выпуклости класса $H^1_p(a)$ имеет вид:

$$f^*(z) = C \cdot e^{i\lambda} \cdot \prod{}' \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} \cdot \prod_1^4 (1-\bar{\alpha}_i z)^{2/p} (1-\bar{\beta} z)^{-6/p} \tag{55}$$

(см. метод получения формулы (45)).

Формулы (53) — (55), насколько нам известно, ранее не отмечались.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию 24.X.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-ое, Гостехиздат, 1950.
2. Я. Л. Геронимус, О некоторых экстремальных свойствах аналитических функций, Изв. АН СССР, серия матем. 12, № 3 (1948), 324—336.
3. A. J. Macintyre, W. W. Rogosinski, Extremum problems in the theory of analytic functions, Acta Math. 82 (1950), 275—325.
4. W. W. Rogosinski, H. Schapiro, On certain extremum problems for anylytic functions, Acta Math. 90, № 3—4 (1953), 287—318.
5. С. Я. Хавинсон, О некоторых экстремальных задачах теории аналитических функций, Учен. зап. МГУ, вып. 148, Математика IV (1951), 133—143.
6. С. Я. Хавинсон, Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечно-связных областях. Матем. сб. 36 (78), № 3 (1955), 445—478.
7. Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон, Качественные свойства решений экстремальных задач некоторых типов. сб. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960.

8. М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, „Выпуклые функции и пространства Орлича", Физматгиз, 1958.

9. Г. П. Сафронова. О некоторых граничных свойствах аналитических функций, Вестник ЛГУ, серия матем., мех., астрономии, № 13, вып. 2, 1959, стр. 52—58.

10. Г. П. Сафронова, Применение метрик Орлича к некоторым граничным задачам теории аналитических функций. Доклады АН СССР, серия матем., 105, № 2, 1955.

11. Е. Д. Соломенцев, О некоторых классах субгармонических функций. Изв. АН СССР, серия матем., 1938, 571—582.

12. М. Г. Крейн, L—проблема моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве, Статья IV в книге Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна „О некоторых вопросах теории моментов", ГОНТИДНТВУ, Харьков, 1938.

13. С. Я. Хавинсон, О проблеме Каратеодори — Фейера для аналитических функций в конечно связных областях, Уч. зап. Владимирского пед. ин-та им. Лебедева—Полянского, вып. 2, 1956, 43.

14. С. Я. Хавинсон, О радиусах однолистности, звездообразности и выпуклости одного класса аналитических функций в многосвязных областях, Изв. ВУЗ-ов, серия матем., изд. Гос. Университета В. И. Ленина — Ульянова, Казань, № 3 (4), 1958, 233.

15. В. М. Терпигорева, Об экстремальных задачах для классов Орлича аналитических функций в единичном круге, Доклады АН СССР, серия матем., 142, № 1, 1962.

EKSTREMALINIAI UŽDAVINIAI ANALIZINIŲ VIENETINIAME SKRITULYJE FUNKCIJŲ ORLIČO KLASĖSE

V. M. TERPIGOREVA

(Reziumė)

Tegul $M(u)$, $u \geqslant 0$ yra iškila funkcija, kuri auga ne lėčiau už u. Nagrinėjama H_M^1 klasė analizinių skritulyje $|z|<1$ funkcijų $f(z)$, patenkinančių nelygybę

$$\int_0^{2\pi} M\left[|f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant 1, \qquad 0<r<1.$$

Klasę H_M^1 laikome vienetine sfera tam tikroje Banacho erdvėje H_M^*. Ta erdvė įvedama ir tiriama § 1.

Didžioji darbo dalis yra susijusi su tiesinio ekstremalinio uždavinio

$$\sup_{f \in H_M^1} \left| \int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta})\, v(e^{i\Theta})\, d\Theta \right|, \tag{*}$$

kur $v(e^{i\Theta})$—duota funkcija, tyrimu. Formuluojamas taip pat uždavinys dualus (*) ir tiriamos šių uždavinių ekstremalinių funkcijų savybės.

Pagrindinis darbo rezultatas yra 8 teorema. Joje nusakomas uždavinio (*) ekstremalinės funkcijos pavidalas tuo atveju, kai $v(e^{i\Theta})$ yra racionali $e^{i\Theta}$ funkcija. Teoremos gautos, tiriant uždavinį (*), apibendrina gerai žinomus daugelio autorių rezultatus, liečiančius ekstremalinius uždavinius klasėse H_p.

§ 3 nagrinėjamos Karateodori—Fejero—Nevanlinos—Piko tipo problemos erdvėje H_M^*, o § 4 uždaviniai, liečią vienalapiškumo, iškilumo ir žvaigždėtumo spindulius, yra sprendžiami $H_{(M)}^{*1}(a)$ klasėje. Klasę $H_{(M)}^{*1}(a)$ sudaro H_M^1 funkcijos $f(z)$, normuotos sąlygomis $f(0)=0$, $f'(0)=a \neq 0$. Rastas šių uždavinių ekstremalių funkcijų pavidalas.

ON EXTREMUM PROBLEMS FOR ORLICZ SPACES OF FUNCTIONS ANALYTIC IN THE UNIT CIRCLE

V. M. TERPIGOREVA

(Summary)

Let $M(u)$, $u \geqslant 0$, be a convex function growing not more slowly than u. We deal in the following with the class H_M^1 of all functions $f(z)$ regular in $|z|<1$, for which

$$\int_0^{2\pi} M\left[|f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant 1, \qquad 0<r<1.$$

The class H_M^1 is considered to be a single sphere in a space of Banach H_M^* which is introduced and studied in § 1.

The main contents of the work (§ 2) is connected with the studying of a linear extremum problem

$$\sup_{f \in H_M^1} \left| \int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta})\, v(e^{i\Theta})\, d\Theta \right| \tag{*}$$

where $v(e^{i\Theta})$ is a given function. A problem dual to (*) is introduced and the properties of the extremal functions in these problems are investigated. The main result of the article is theorem 8, establishing the kind of the extremal function in problem (*) when $v(e^{i\Theta})$ is a rational function of $e^{i\Theta}$.

The theorems obtained by studying of problem (*) are the generalization of the well-known results of many authors on extremum problems in classes H_p.

In § 3 some extremum problems of fhe type of Caratheodory—Fejer—Nevanlinna—Picks problems are corfsidered in space H_M^* and in § 4—the problems of the radius schlicht, convex and starry for the class $H_{(M)}^{*1}(a)$, consisting of those functions H_M^1 for which $f(0)=0$, $f'(0)=a \neq 0$. The kind of the extremum fúnctions is found in these problems.