III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

К МНОГОМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

В. В. САЗОНОВ

1. Пусть R^m — m-мерное евклидово пространство. (x, y), $|x|$, $x=(x_1, \ldots, x_m)\in R^m$, $y=(y_1, \ldots, y_m)\in R^m$ будут обозначать, как обычно, соответственно скалярное произведение и норму: $(x, y)=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i$, $|x|=(x, x)^{1/2}$. Рассматриваемые случайные векторы, векторы и линейные преобразования мы будем считать m-мерными. Распределение случайного вектора ξ обозначаем $\mathbf{P}_\xi$; характеристическая функция распределения $\mathbf{P}_\xi$ обозначается f_ξ.

Пусть $\{\xi_k=(\xi_{1k}, \ldots, \xi_{mk})\}$, $k=1, 2, \ldots$ — последовательность независимых равномерно ограниченных (скажем, $|\xi_k|\leqslant C$, $k=1, 2, \ldots$) случайных векторов. Положим $\zeta_n=\sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Основной нашей целью будет доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Для существования последовательности линейных преобразований $\{A_n\}$ и последовательности векторов $\{a_n\}$ таких, что случайные векторы*

$$\eta_n=A_n\zeta_n+a_n$$

сходились бы по распределению к некоторому невырожденному нормальному распределению $\mathbf{L}$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}(t, \zeta_n)=\infty \quad \textit{при всех} \quad t\neq 0, \quad t\in R^m\,\text{*}. \tag{1}$$

Замечания. 1) Распределение $\mathbf{L}$ можно считать любым фиксированным невырожденным нормальным распределением. В самом деле, если η_n сходятся к некоторому невырожденному нормальному распределению $\mathbf{L}'$, то при надлежащем выборе линейного преобразования A и вектора a случайные векторы $A\eta_n+a$ сходятся к распределению $\mathbf{L}$.

2) Теорему можно сформулировать иначе. Именно: условие (1) является необходимым и достаточным для существования последовательности невырожденных нормальных распределений $\{\mathbf{L}_n\}$ в R^m такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{E\in C} |P_{\zeta_n}(E)-\mathbf{L}_n(E)|=0, \tag{2}$$

где C — класс всех выпуклых множеств в R^m.

* Первоначально мною было найдено другое, более сложное условие. Это условие было предложено в качестве возможного Ю. В. Прохоровым.

Действительно, пусть последовательность $\{\mathbf{P}_{\eta_n}\}$ слабо сходится к распределению $\mathbf{L}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{E\in C}|\mathbf{P}_{\eta_n}(E)-\mathbf{L}(E)|=0$$

(см. [1], стр. 665) и преобразования A_n при всех достаточно больших n не вырождены (см. ниже лемму 1). Далее, если ξ — случайный вектор с распределением $\mathbf{L}$ и E — произвольное выпуклое множество, то

$$|\mathbf{P}_{\zeta_n}(E)-\mathbf{P}_{A_n^{-1}(\zeta-a_n)}(E)|=|\mathbf{P}_{\eta_n}(A_nE+a_n)-\mathbf{L}(A_nE+a_n)|$$

и множество $A_n^{-1}(\xi-a_n)$ выпукло. Обозначив через $\mathbf{L}_n$ распределение случайного вектора $A_n^{-1}(\xi-a_n)$, получаем (2).

Обратно, пусть (2) выполнено, χ_n — случайный вектор с распределением $\mathbf{L}_n$, $n=1, 2, \ldots$, и $\mathbf{L}$ — какое-либо невырожденное нормальное распределение. Для каждого $n=1, 2, \ldots$ найдутся такое невырожденное линейное преобразование A_n и вектор a_n, что случайный вектор $A_n\chi_n+a_n$ имеет распределение $\mathbf{L}$. Остается заметить, что для любого выпуклого множества E

$$|\mathbf{P}_{A_n\zeta_n+a_n}(E)-L(E)|=\left|\mathbf{P}_{\zeta_n}\left(A_n^{-1}(E-a_n)\right)-L_n\left(A_n^{-1}(E-a_n)\right)\right|$$

и множество $A_n^{-1}(E-a_n)$ выпукло.

2. Этот пункт посвящен следующим двум леммам.

Лемма 1. *Если последовательность распределений $\{\mathbf{Q}_n\}$ в R^m слабо сходится к невырожденному в R^m распределению $\mathbf{Q}$, то все распределения $\mathbf{Q}_n$, начиная с некоторого n, не вырождены.*

Доказательство этой леммы несложно и использует обычную технику. Мы его опускаем.

Пусть $\{\varkappa_k\}$, $k=1, 2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин такая, что частичные суммы $\sum_{k=1}^{n}\varkappa_k$ для всех больших n не распределены нормально.

Лемма 2. *Если для некоторых последовательностей чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ случайные величины*

$$\chi_n=b_n\sum_{k=1}^{n}\varkappa_k+a_n \tag{3}$$

сходятся по распределению к невырожденному нормальному распределению, то при $n\to\infty$

$$b_n\to 0.$$

Доказательство. Характеристическая функция случайной величины (3) равна

$$f_{\chi_n}(s)=e^{isa_n}\prod_{k=1}^{n}f_{\varkappa_k}(sb_n). \tag{4}$$

Выберем сходящуюся подпоследовательность $\{b_{n_j}\}$ последовательности $\{b_n\}$:

$$b_{n_j}\to\beta.$$

Покажем, что $\beta=0$.

А) Предположим, что $0<\beta<\infty$. Для любого r, переходя в (4) к пределу при $n=n_j\to\infty$, получим

$$f^{(r)}(s)=\prod_{k=1}^{n_r}f_{\varkappa_k}(s\beta)=e^{ims-\frac{1}{2}\sigma^2s^2},$$

где $f^{(r)}(s)$ — некоторая характеристическая функция и $\sigma > 0$, m — действительные числа. Произведение, стоящее в левой части этого равенства, будучи характеристической функцией случайной величины $\beta \sum_{k=1}^{n_r} \varkappa_k$, при больших r не может быть характеристической функцией нормального распределения. Это противоречит теореме Г. Крамера о разложении нормального закона.

Б) Предположим, что $\beta = \infty$. Тогда последовательность случайных величин χ_{n_j}/b_{n_j} сходится по вероятности к нулю и

$$f_{\frac{\chi_{n_j}}{b_{n_j}}}(s) = e^{is\frac{a_{n_j}}{b_{n_j}}} \prod_{k=1}^{n_j} f_{\varkappa_k}(s) \to 1.$$

Отсюда непосредственно следует, что для любого r

$$\left| \prod_{k=1}^{n_r} f_{\varkappa_k}(s) \right| = 1.$$

Это противоречит сходимости величин χ_n к невырожденному распределению.

Лемма доказана.

Замечание. Аналогичный факт имеет место и в многомерном случае. Именно, пусть $\{\varkappa_k = (\varkappa_{1k}, \ldots, \varkappa_{mk})\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность независимых случайных векторов такая, что для всех больших n проекция распределения $\mathbf{P}_{\sum_{k=1}^{n} \varkappa_k}$ ни на какую проходящую через нуль прямую не есть нормальное распределение. Тогда если для последовательности линейных преобразований $\{B_n\}$ матрицами $\| b_{hl}^{(n)} \|_1^m$, $n = 1, 2, \ldots$ и некоторой последовательности векторов $\{a_n = (a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})\}$ случайные векторы

$$\chi_n = B_n \sum_{k=1}^{n} \varkappa_k + a_n$$

сходятся по распределению к невырожденному нормальному распределению, то

$$b_{hl}^{(n)} \to 0,$$

при $n \to \infty$ для всех h, $l = 1, \ldots, m$.

3. Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, мы можем и будем считать, что $\mathbf{M}\xi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Необходимость. В силу замечания 2), п. 1, существует такая последовательность невырожденных нормальных распределений $\{\mathbf{L}_n\}$, для которой выполняется (2). Пусть χ_n, $n = 1, 2, \ldots$ — случайные векторы с распределениями $\mathbf{L}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $t \neq 0$, то, согласно (2), при всех $x \in R^1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \mathbf{P}\left(\frac{(t, \zeta_n) - \mathbf{M}(t, \chi_n)}{\mathbf{D}^{1/2}(t, \chi_n)} < x \right) - \Phi(x) \right| = 0,$$

где Φ — функция распределения нормальной $(0, 1)$ случайной величины. По лемме 2 $\mathbf{D}^{1/2}(t, \chi_n) \to \infty$, следовательно, (1) выполнено, так как в противном случае случайные величины

$$\frac{(t, \zeta_n) - \mathbf{M}(t, \chi_n)}{\mathbf{D}^{1/2}(t, \chi_n)}$$

сходились бы по вероятности к нулю.

Достаточность. Отметим, прежде всего, что если (1) выполнено, то

$$\inf_{|t|=1} \mathbf{D}(t, \zeta_n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5}$$

В самом деле, $\mathbf{D}(t, \zeta_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}(t, \xi_k) \to \infty$ при $n \to \infty$ монотонно при каждом $t \neq 0$ и единичная сфера $\{t : |t| = 1\}$ компактна. Применяя теорему Дини, получаем (5).

Из (5) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{|t|=1 \\ x \in R^1}} \left| \mathbf{P}\left(\frac{(t, \zeta_n)}{\mathbf{D}^{1/2}(t, \zeta_n)} < x \right) - \Phi(x) \right| = 0 \tag{6}$$

(см., например, [2], стр. 128). Если обозначить через $\mathbf{L}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, нормальные распределения, первые и вторые моменты которых совпадают с соответствующими первыми и вторыми моментами распределений $\mathbf{P}_{\zeta_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, то (6) можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{E \in H} \left| \mathbf{P}_{\zeta_n}(E) - \mathbf{L}_n(E) \right| = 0,$$

где H — множество всех полупространств. Отсюда, обозначив через A_n, $n = 1, 2, \ldots$, линейные преобразования, переводящие случайные векторы с распределениями $\mathbf{L}_n$ в случайный вектор с распределением $\mathbf{L}$ ($\mathbf{L}$ — какое-либо невырожденное нормальное распределение), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{E \in H} \left| \mathbf{P}_{A_n \zeta_n}(E) - \mathbf{L}(E) \right| = 0.$$

Теорема доказана.

4. В предыдущих пунктах на преобразования A_n мы не накладывали никаких ограничений. Рассмотрим теперь случай, когда матрицы преобразований A_n 1) диагональны и имеют по диагонали одинаковые элементы (нормирование константами), 2) диагональны (покомпонентное нормирование). Ниже мы используем обозначения пункта 1.

Для существования последовательности линейных преобразований $\{A_n\}$ и последовательности векторов $\{a_n\}$ таких, что случайные векторы $\eta_n = A_n \zeta_n + a_n$ сходились бы по распределению к невырожденному нормальному распределению с матрицей вторых центральных моментов $\|\beta_{hl}\|_1^m$ и матрицей коэффициентов корреляции $\|\rho_{hl}\|_1^m$, необходимо и достаточно, в первом случае, чтобы

$$\mathbf{D}(t', \zeta_n) \to \infty, \quad \frac{\mathbf{D}(t', \zeta_n)}{\mathbf{D}(t'', \zeta_n)} \to \frac{B(t')}{B(t'')} \quad \text{при всех} \quad t', t'' \neq 0, \tag{7}$$

где $B(t) = \sum_{h,l=1}^{m} \beta_{hl} t_h t_l$ и во втором случае, чтобы

$$\mathbf{D}\zeta_{in} \to \infty, \quad \frac{\mathbf{M}(\zeta_{in} - \mathbf{M}\zeta_{in})(\zeta_{jn} - \mathbf{M}\zeta_{jn})}{(\mathbf{D}\zeta_{in}\, \mathbf{D}\zeta_{jn})^{1/2}} \to \rho_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

Докажем первое утверждение. Предположим, что (7) выполнено. Пусть A_n — линейное преобразование с диагональной матрицей $\| a_{hl}^{(n)} \|_1^m$, $a_{11}^{(n)} = \ldots = a_{mm}^{(n)} = B^{1/2}(\tilde{t})/\mathbf{D}^{1/2}(\tilde{t}, \zeta_n)$ для некоторого $\tilde{t} \neq 0$, и $a_n = -a_{11}^{(n)}(\mathbf{M}\zeta_{1n}, \ldots, \mathbf{M}\zeta_{mn})$. Согласно центральной предельной теореме при любом $t \neq 0$ последовательность случайных величин

$$B^{1/2}(t) \frac{(t, \zeta_n) - \mathbf{M}(t, \zeta_n)}{\mathbf{D}^{1/2}(t, \zeta_n)} \tag{8}$$

сходится по распределению к нормальному закону $\left(0, B^{1/2}(t)\right)$. В силу (7) случайные величины

$$(t, \eta_n) = (t, A_n \zeta_n + a_n) = B^{1/2}(\tilde{t}) \frac{(t, \zeta_n) - \mathbf{M}(t, \zeta_n)}{\mathbf{D}^{1/2}(\tilde{t}, \zeta_n)}$$

должны сходиться по распределению к тому же самому закону (см., например, [3], стр. 47). Следовательно,

$$f_{\eta_n}(t) \to e^{-\frac{B(t)}{2}}$$

при всех $t \in R^m$, что и требовалось.

Обратно, пусть последовательность $\{\eta_n = A_n \zeta_n + a_n\}$ сходится по распределению к нормальному закону с матрицей вторых центральных моментов $\| \beta_{hl} \|_1^m$, матрицы $\| a_{hl}^{(n)} \|_1^m$ преобразований A_n диагональны и $a_{11}^{(n)} = \ldots = a_{mm}^{(n)} = a^{(n)}$. При надлежащем выборе вектора a для любого $t \neq 0$ случайные векторы $(t, \eta_n + a)$ будут сходиться по распределению к нормальному $\left(0, B^{1/2}(t)\right)$ распределению. С другой стороны, так как $\mathbf{D}(t, \zeta_n) \to \infty$ при всех $t \neq 0$ (это вытекает из доказанной теоремы и легко также установить непосредственно), то случайные величины (8) сходятся по распределению к нормальному распределению $\left(0, B^{1/2}(t)\right)$. Следовательно (см. [3], стр. 47), при всех $t \neq 0$

$$\frac{a^{(n)} \mathbf{D}^{1/2}(t, \zeta_n)}{\mathbf{B}^{1/2}(t)} \to 1$$

и, стало быть, (7) выполнено.

Второе утверждение нетрудно доказать с помощью известных многомерных центральных предельных теорем. Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

Поступило в редакцию
1.XII.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Ranga Rao, Relations between weak and uniform convergence of measures with applications, Ann. Math. Statistics, 33, Nr. 2, 1962, 659—680.
2. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
3. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, 1949.

DAUGIAMATĖS RIBINĖS TEOREMOS KLAUSIMU

V. SAZONOVAS

(Reziumė)

Tegul $\{\xi_k\}$, $k=1, 2, \ldots$ yra nepriklausomų tolygiai aprėžtų iš R^m vektorių seka. Tegul $\{A_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ yra tiesinių transformacijų seka ir $\{a_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ — vektorių seka. Tada $A_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k + a_n$ pasiskirstymai tam tikriems $\{A_n\}$ ir $\{a_n\}$ konverguoja į neišsigimusį normalinį pasiskirstymą tada ir tik tada, jeigu $\mathbf{D}\left(t, \sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to \infty$, kuomet $n \to \infty$ kiekvienam $t \in R^m$.

ON MULTIDIMENSIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM

V. V. SAZONOV

(Summary)

Let $\{\xi_k\}$, $k=1, 2, \ldots$ be a sequence of independent uniformly bounded random vectors taking theirs values in R^m. Let $\{A_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ denote a sequence of linear transformations and $\{a_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ be a sequence of vectors. Then the distributions of $A_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k + a_n$ converge for some $\{A_n\}$ and $\{a_n\}$ to a nondegenerate normal distribution if and only if $\mathbf{D}\left(t, \sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to \infty$ when $n \to \infty$ for every $t \in R^m$.