III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

ОТЫСКАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

П. ГОЛОКВОСЧЮС

В предлагаемой статье матричным методом исследуется вопрос отыскания характеристических чисел (х. ч.) решений системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, аналитическими относительно малого параметра. Рассматриваются случаи, когда периодическая матрица коэффициентов соответствующей порождающей системы коммутирует со своим интегралом.

Настоящая работа является продолжением работ [1], [2] и [3].

Некоторые результаты данной работы были доложены на Второй сибирской конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики [4].

ЧАСТЬ I

§ 1. Нахождение интегральной матрицы

Рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений в матричном виде

$$\frac{dX}{dt}=XQ(t,\ \mu), \tag{1}$$

где $Q(t,\ \mu)$ — матрица 2-го порядка вещественная непрерывная и ограниченная в области $t\geqslant 0$, представляемая рядом

$$Q(t,\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t)\,\mu^k, \tag{2}$$

сходящемся при численном вещественном параметре $|\mu|<R$, а X — интегральная матрица системы.

Предположим, что непрерывные матрицы $Q_k(t)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ являются периодическими с периодом $\omega=1$ и, кроме того, пусть выполнены условия[1]:

$$Q(t,\ \mu)\int_0^t Q(\tau,\ \mu)\,d\tau\neq\int_0^t Q(\tau,\ \mu)\,d\tau\cdot Q(t,\ \mu), \tag{3}$$

$$Q_0(t)\int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau=\int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau\cdot Q_0(t). \tag{4}$$

---

[1] Если условие (3) не имеет места, то согласно [5] (стр. 32) нормированную в точке $t=0$ интегральную матрицу $X(t,\ \mu)$ системы (1) получаем в виде

$$X(t,\ \mu)=\exp\left[\int_0^t Q(\tau,\ \mu)\,d\tau\right].$$

Тогда необходимые и достаточные условия ограниченности и периодичности решений данной системы находим на основе интегральной подстановки (см. [5] и [6]).

Преобразуем систему (1) в другую систему с помощью формулы

$$Y = XS, \tag{5}$$

где Y — новая неизвестная матрица, а S — постоянная неособенная матрица преобразования, приводящая $Q_0(t)$ к каноническому виду.

Получим уравнение

$$\frac{dY}{dt} = YP(t, \mu), \tag{6}$$

причем матрица

$$P(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\mu^k, \tag{7}$$

где

$$P_k(t) = S^{-1} Q_k(t) S = \| p_{\sigma\nu}^{(k)}(t) \| \qquad (\sigma, \nu = 1, 2; \quad k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

обладает свойством (3), а матрица $P_0(t)$ — свойством (4), т. е. коммутирует со своим интегралом.

На основании теории приводимых систем [7] и [8] нормированную в точке $t=0$ интегральную матрицу системы (6) ищем в виде

$$Y(t, \mu) = \exp[A(\mu)t]\, z(t, \mu) \qquad \big(z(0, \mu) = I\big). \tag{9}$$

Здесь I — единичная матрица, а матрица $A(\mu)$ и периодическая с периодом $\omega = 1$ матрица $z(t, \mu)$ разлагаются соответственно в ряды:

$$A(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^k, \tag{10}$$

$$z(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\mu^k, \tag{11}$$

сходящиеся при $|\mu| < r < R$.

Инварианты матрицы $A(\mu)$ являются голоморфными функциями по крайней мере в области $|\mu| < r < R$, где дискриминант

$$\Delta(\mu) = \frac{1}{4}\sigma^2[A(\mu)] - D[A(\mu)] \tag{12}$$

характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \sigma[A(\mu)]\lambda + D[A(\mu)] = 0 \tag{13}$$

отличен от нуля при $\mu \neq 0$ [9].

При $\mu \to 0$ система (6) переходит в систему

$$\frac{dY_0(t)}{dt} = Y_0(t) P_0(t), \tag{14}$$

интегрируемую в квадратурах. Ее интегральная нормированная в точке $t=0$ матрица $Y_0(t)$ представляется в виде

$$Y_0(t) = \exp\Big[\int_0^t P_0(\tau)\,d\tau\Big] = \exp[A_0 t + \Phi_0(t)], \tag{15}$$

причем

$$A_0 = \int_0^1 P_0(t)\,dt, \tag{16}$$

а $\Phi_0(t)$ — матрица непрерывная и периодическая с периодом $\omega = 1$. Так как матрица $P_0(t)$ коммутирует со своим интегралом, то матрицы A_0 и $\Phi_0(t)$ коммутируют друг с другом. Следовательно, из (15) имеем

$$Y_0(t) = \exp(A_0 t) \cdot \exp[\Phi_0(t)]. \tag{17}$$

Таким образом в рассматриваемом случае интегральную нормированную в точке $t = 0$ матрицу $Y_0(t)$ порождающей системы (14) получаем в виде

$$Y_0(t) = \exp(A_0 t) z_0(t), \tag{18}$$

где постоянная матрица A_0 определяется формулой (16), а непрерывная и периодическая с периодом $\omega = 1$ матрица $z_0(t)$, как видно из равенства (17), имеет вид

$$z_0(t) = \exp[\Phi_0(t)]. \tag{19}$$

При $\mu \to 0$ матрицы (10) и (11) переходят соответственно в матрицы (16) и (19).

Для нахождения рядов (10) и (11) подставим функцию (9) в уравнение (6). Тогда после сокращения на миожитель $\exp[A(\mu)t]$ мы приходим к уравнению

$$\frac{dz}{dt} = zP - Az.$$

Подставляя сюда ряды (7), (10) и (11) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_0}{dt} = z_0 P_0 - A_0 z_0, \tag{20}$$

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{j=0}^{k} (z_{k-j} P_j - A_{k-j} z_j) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{21}$$

Согласно [7] (стр. 8) общее решение каждого матричного уравнения (21) ищем в виде

$$z_k(t) = \exp(-A_0 t) c_k(t) Y_0(t), \tag{22}$$

где матрица $Y_0(t)$ дана формулой (18), причём $z_0(t)$ является решением уравнения (20), а $c_k(t)$ — дифференцируемая матрица.

Подставляя матрицу (22) в уравнение (21), после сокращений найдём

$$c_k(t) = \int_0^t e^{A_0 \tau} (M_k(\tau) - A_k) e^{-A_0 \tau} d\tau, \tag{23}$$

где

$$M_k(\tau) = \sum_{j=1}^{k-1} (z_{k-j} P_j - A_{k-j} z_j) z_0^{-1} + z_0 P_k z_0^{-1}. \tag{24}$$

Учитывая (18) и (23), из (22) имеем

$$z_1(t) = e^{-A_0 t} \int_0^t e^{A_0 \tau} (z_0 P_1 z_0^{-1} - A_1) e^{-A_0 \tau} d\tau \cdot e^{A_0 t} z_0(t), \tag{25}$$

$$z_k(t) = e^{-A_0 t} \int_0^t e^{A_0 \tau} (M_k(\tau) - A_k) e^{-A_0 \tau} d\tau \cdot e^{A_0 t} z_0(t) \qquad (k = 2,\ 3,\ \ldots), \tag{26}$$

причём матрица $M_k(\tau)$ определяется равенством (24).

Подчиняя $z_k(t)$ условию периодичности, мы последовательно и единственным образом найдём матричные коэффициенты рядов (10) и (11). Таким образом, нормированную в точке $t=0$ интегральную матрицу системы (6) представим в виде (9).

Тогда из (5) нетрудно увидеть, что матрица

$$X(t,\ \mu)=\exp[A(\mu)t]\,z(t,\ \mu)S^{-1}$$

будет интегральной матрицей системы (1). Отсюда и из (9) видно, что х. ч. решений систем (1) и (6), т. е. характеристические числа матрицы $A(\mu)$, совпадают.

§ 2. Канонический вид матриц $P_0(t)$, $\exp(\pm A_0 t)$ и $z_0^{\pm 1}(t)$

Рассмотрим матрицу

$$Q_0(t)=\left\| \begin{matrix} \varphi_1(t)+b_1\varphi_2(t), & b_3\varphi_2(t) \\ b_2\varphi_2(t), & \varphi_1(t) \end{matrix} \right\|, \tag{27}$$

обладающую свойством (4).

В общем случае основной промежуток $[0,\ 1]$ распадается на части $[\alpha,\ \beta]\}$, на каждой из которых $[\alpha,\ \beta]$ матрица $Q_0(t)$ имеет вид (27), где $\{b_k$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ постоянные, а $\varphi_k(t)$ $(k=1,\ 2)$ непрерывные и периодически с периодом $\omega=1$ функции (см. [10]).

В этой статье прежде всего изучим случай, когда множество $\{[\alpha,\ \beta]\}$ состоит из одного единственного элемента, совпадающего с $[0,\ 1]$.

1. Пусть в матрице (27) величины b_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяют условию

$$b_1^2+4b_2b_3\neq 0. \tag{28}$$

Тогда в системе (1) матрица (27) имеет разные х. ч.

$$\zeta_{12}(t)=\varphi_1(t)+\frac{1}{2}\left(b_1\pm\sqrt{b_1^2+4b_2b_3}\right)\varphi_2(t), \tag{29}$$

и согласно (8) получаем[1]

$$P_0(t)=S^{-1}Q_0(t)S=\left\| \begin{matrix} \zeta_1(t), & 0 \\ 0, & \zeta_2(t) \end{matrix} \right\|, \tag{30}$$

причём

$$S=\left\| \begin{matrix} 1, & 1 \\ \frac{1}{2}\left(-b_1+\sqrt{b_1^2+4b_2b_3}\right), & \frac{1}{2}\left(-b_1-\sqrt{b_1^2+4b_2b_3}\right) \end{matrix} \right\|,$$

$$D(S)=-\sqrt{b_1^2+4b_2b_3}\neq 0.$$

Так как функции $\varphi_k(t)$ $(k=1,\ 2)$ являются непрерывными и периодическими с периодом $\omega=1$, то следовательно,

$$\int_0^t \varphi_k(\tau)\,d\tau=a_k t+\psi_k(t) \qquad (k=1,\ 2), \tag{31}$$

где

$$a_k=\int_0^1 \varphi_k(t)\,dt \qquad (k=1,\ 2), \tag{32}$$

а $\psi_k(t)$ $(k=1,\ 2)$ — функции непрерывные и периодические с периодом $\omega=1$.

[1] По поводу о возможности приведения матрицы (27) постоянным преобразованием к виду (30) или (40) см. работу [10] (§ 2, теорема 1).

Учитывая (17), (18), (29)—(32), имеем

$$A_0=\begin{Vmatrix} \xi_1, & 0 \\ 0, & \xi_2 \end{Vmatrix}, \tag{33}$$

$$\xi_{1,2}=a_1+\frac{1}{2}\left(b_1\pm\sqrt{b_1^2+4b_2b_3}\right)a_2, \tag{34}$$

$$\Phi_0(t)=\begin{Vmatrix} \eta_1(t), & 0 \\ 0, & \eta_2(t) \end{Vmatrix}, \tag{35}$$

$$\eta_{1,2}(t)=\psi_1(t)+\frac{1}{2}\left(b_1\pm\sqrt{b_1^2+4b_2b_3}\right)\psi_2(t). \tag{36}$$

Таким образом, в данном случае в системе (6) матрица $P_0(t)$ имеет вид (30). Кроме того, на основании [5] (стр. 21), (19), (33) и (35) находим

$$\exp(\pm A_0t)=\begin{Vmatrix} e^{\pm\xi_1t}, & 0 \\ 0, & e^{\pm\xi_2t} \end{Vmatrix}, \tag{37}$$

$$z_0^{\pm1}(t)=\begin{Vmatrix} e^{\pm\eta_1(t)}, & 0 \\ 0, & e^{\pm\eta_2(t)} \end{Vmatrix}, \tag{38}$$

причём здесь и в дальнейших аналогичных выражениях берем соответственно верхние или нижние знаки.

2. Теперь предположим, что

$$a_1+\frac{1}{2}a_2b_1=0,\quad b_1^2+4b_2b_3=0. \tag{39}$$

В этом случае в системе (1) х. ч. матрицы $Q_0(t)$ равны с непростым элементарным делителем, а матрица A_0 имеет нулевые х. ч. с непростым элементарным делителем (при $a_2\neq0$).

Тогда

$$P_0(t)=S^{-1}Q_0(t)S=\begin{Vmatrix} \zeta(t), & 0 \\ \chi(t), & \zeta(t) \end{Vmatrix}, \tag{40}$$

где

$$S=\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ \frac{1}{a_2}, & -\frac{1}{2}b_1 \end{Vmatrix} \qquad (a_2\neq0),$$

$$\zeta(t)=\varphi_1(t)+\frac{1}{2}b_1\varphi_2(t), \tag{41}$$

$$\chi(t)=\frac{1}{a_2}\varphi_2(t) \qquad (a_2\neq0). \tag{42}$$

Принимая во внимание (17)—(19), (31), (34), (39) и (40), получаем

$$A_0=\begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{Vmatrix}, \tag{43}$$

$$\Phi_0(t)=\begin{Vmatrix} \eta(t), & 0 \\ \vartheta(t), & \eta(t) \end{Vmatrix}, \tag{44}$$

причём функции

$$\eta(t)=\psi_1(t)+\frac{1}{2}b_1\psi_2(t), \tag{45}$$

$$\vartheta(t)=\frac{1}{a_2}\psi_2(t) \qquad (a_2\neq0) \tag{46}$$

являются непрерывными и периодическими с периодом $\omega=1$.

На основании [5] (стр. 21), (19), (43) и (44) в рассматриваемом случае

$$\exp(\pm A_0 t)=\left\|\begin{matrix}1, & 0\\ \pm t, & 1\end{matrix}\right\|, \tag{47}$$

$$z_0^{\pm 1}(t)=e^{\pm\eta(t)}\left\|\begin{matrix}1, & 0\\ \pm\vartheta(t), & 1\end{matrix}\right\|. \tag{48}$$

Если $a_2=0$, то из первого соотношения (39) следует, что и $a_1=0$. Тогда матрица $P_0(t)$ имеет вид (40), причём

$$S=\left\|\begin{matrix}0, & 1\\ 1, & -\frac{1}{2}b_1\end{matrix}\right\|,$$

$$\chi(t)=\varphi_2(t), \tag{49}$$

а кратное х. ч. $\zeta(t)$ определяется формулой (41). Согласно равенствам $a_k=0$ ($k=1$, 2), (16) и (32), в этом последнем случае

$$A_0=\int_0^1 P_0(t)\,dt=0, \tag{50}$$

$$\exp(\pm A_0 t)=\left\|\begin{matrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{matrix}\right\|=I. \tag{51}$$

Кроме того, матрица $z_0^{\pm 1}(t)$ имеет вид (48), причём

$$\vartheta(t)=\psi_2(t), \tag{52}$$

а функция $\eta(t)$ определяется равенством (45).

3. Отметим нас интересующие случаи матрицы $Q_0(t)$, обладающей свойством (4) и уже имеющей канонический вид. Для простоты дальнейшего рассуждения эту матрицу будем обозначать через $P_0(t)$.

а) Предположим, что в (27) $b_1\neq 0$, $b_2=b_3=0$.

Тогда матрица $P_0(t)$ имеет вид (30), где

$$\zeta_1(t)=\varphi_1(t)+b_1\varphi_2(t),\quad \zeta_2(t)=\varphi_1(t). \tag{53}$$

Следовательно, канонический вид матриц $\exp(\pm A_0 t)$ и $z_0^{\pm 1}(t)$ будет соответственно вида (37) и (38), причём в этом случае

$$\xi_1=a_1+a_2 b_1,\quad \xi_2=a_1; \tag{54}$$

$$\eta_1(t)=\psi_1(t)+b_1\psi_2(t),\quad \eta_2(t)=\psi_1(t). \tag{55}$$

б) При $b_1=b_2=b_3=0$ из (27) получаем

$$P_0(t)=\left\|\begin{matrix}\varphi_1(t), & 0\\ 0, & \varphi_1(t)\end{matrix}\right\|=\varphi_1(t)\,I. \tag{56}$$

Тогда из (34), (36) соответственно следует

$$\xi_1=\xi_2=a_1, \tag{57}$$

$$\eta_1(t)=\eta_2(t)=\psi_1(t), \tag{58}$$

причём, согласно (37) и (38) находим

$$\exp(\pm A_0 t)=Ie^{\pm a_1 t}, \tag{59}$$

$$z_0^{\pm 1}(t)=Ie^{\pm\psi_1(t)}. \tag{60}$$

в) Пусть в (27) $b_1=b_3=0$, $b_2=\frac{1}{a_2}$ $(a_2\neq 0)$.

Тогда матрицу $P_0(t)$ получаем в виде (40), где

$$\zeta(t) = \varphi_1(t), \tag{61}$$

а функция $\chi(t)$ определяется формулой (42). Канонический вид матриц $\exp(\pm A_0 t)$ и $z_0^{\pm 1}(t)$ будет соответственно (47) и (48), причём в этом случае

$$\eta(t) = \psi_1(t), \tag{62}$$

а функция $\vartheta(t)$ дана формулой (46).

г) Предположим наконец, что в (27) $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 = \frac{1}{a_2}$ $(a_2 \neq 0)$, $\varphi_1(t) = 0$.

Согласно (16), (32), (45) и (46) тогда имеем $\eta(t) = 0$, а функция $\vartheta(t)$ определяется равенством (46). Следовательно, $\exp(\pm A_0 t)$ представляется в виде (47), а из соотношения (48) следует

$$z_0^{\pm 1}(t) = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ \pm\vartheta(t), & 1 \end{Vmatrix}. \tag{63}$$

Теперь приступим к отысканию х. ч. решений системы (1).

§ 3. Характеристические числа матрицы $P_0(t)$ вещественные и разные

Предположим, что в (27) величины b_k $(k = 1, 2, 3)$ удовлетворяют условию

$$b_1^2 + 4 b_2 b_3 > 0.$$

Тогда х. ч. $\zeta_k(t)$ $(k = 1, 2)$ матрицы (30), определяемые равенствами (29), будут вещественные и разные.

Найдём х. ч. решений системы (1) в двух случаях.

I. Предположим, что

$$A_0 = \int_0^1 P_0(t)\,dt \neq 0 \qquad (a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0). \tag{64}$$

В этом случае матрицы $P_0(t)$, A_0, $\Phi_0(t)$, $\exp(\pm A_0 t)$ и $z_0^{\pm 1}(t)$ определяются соответственно равенствами (30), (33), (35), (37) и (38). Обозначая через $a_{\sigma\nu}^{(k)}$ $(\sigma, \nu = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots)$ элементы матриц A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и используя (37) и (38), на основании (25) получаем

$$z_1(t) = \begin{Vmatrix} \int_0^t p_{11}^{(1)}(\tau)\,d\tau - a_{11}^{(1)} t, & e^{-at}\int_0^t [g_{12}^{(1)}(\tau) - a_{12}^{(1)}]\, e^{a\tau}\,d\tau \\ e^{at}\int_0^t [g_{21}^{(1)}(\tau) - a_{21}^{(1)}]\, e^{-a\tau}\,d\tau, & \int_0^t p_{22}^{(1)}(\tau)\,d\tau - a_{22}^{(1)} t \end{Vmatrix} \cdot z_0(t), \tag{65}$$

где

$$a = \xi_1 - \xi_2, \tag{66}$$

а функции

$$g_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau) = p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\, e^{\pm v(\tau)} \qquad (\sigma, \nu = 1, 2;\quad \sigma \neq \nu), \tag{67}$$

$$v(\tau) = \eta_1(\tau) - \eta_2(\tau) = \sqrt{b_1^2 + 4 b_2 b_3}\,\psi_2(\tau) \tag{68}$$

и матрица $z_0(t)$, определяемая равенством (38), являются непрерывными и периодическими с периодом $\omega = 1$. Кроме того, в (67) знак „$+$“ соответствует индексам $\sigma = 1$, $\nu = 2$, а знак „$-$“ индексам $\sigma = 2$, $\nu = 1$.

Чтобы в матрице (65) элементы, стоящие на главной диагонали, были периодическими с периодом $\omega=1$, необходимо положить

$$a_{\sigma\sigma}^{(1)}=\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt \qquad (\sigma=1,\ 2), \tag{69}$$

так как

$$\int_0^t p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)\,d\tau=\alpha_{\sigma\sigma}^{(1)}t+\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t) \qquad (\sigma=1,\ 2), \tag{70}$$

где

$$\alpha_{\sigma\sigma}^{(1)}=\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt \qquad (\sigma=1,\ 2), \tag{71}$$

а функции $\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)$ являются непрерывными и периодическими с периодом $\omega=1$.

Обозначая

$$p(\tau)=p_{12}^{(1)}(\tau)\,e^{v(\tau)}-a_{12}^{(1)}, \tag{72}$$

подчиняем элемент

$$u(t)=e^{-at}\int_0^t p(\tau)\,e^{a\tau}\,d\tau, \tag{73}$$

стоящий в матрице (65) в верхнем правом углу, условию периодичности

$$u(t+1)=u(t). \tag{74}$$

На основании этого равенства и принимая во внимание (72), после упрощений получаем условие периодичности

$$\int_0^{t+1} p_{12}^{(1)}(\tau)\,e^{v(\tau)+a\tau}\,d\tau-e^a\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)\,e^{v(\tau)+a\tau}\,d\tau=\frac{1}{a}\,(e^a-1)\,a_{12}^{(1)}, \tag{75}$$

откуда при $t=0$ следует

$$a_{12}^{(1)}=\frac{a}{e^a-1}\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,e^{v(t)+at}\,dt. \tag{76}$$

Используя это равенство, условие (75) записываем в виде

$$\int_0^{t+1} p_{12}^{(1)}(\tau)\,e^{v(\tau)+a\tau}\,d\tau=e^a\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)\,e^{v(\tau)+a\tau}\,d\tau+\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,e^{v(t)+at}\,dt. \tag{77}$$

Аналогично, подчиняя условию периодичности элемент, стоящий в матрице (65) в нижнем левом углу, получаем соответственно

$$a_{21}^{(1)}=\frac{a}{1-e^{-a}}\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,e^{-v(t)-at}\,dt, \tag{78}$$

$$\int_0^{t+1} p_{21}^{(1)}(\tau)\,e^{-v(\tau)-a\tau}\,d\tau=e^{-a}\int_0^t p_{21}^{(1)}(\tau)\,e^{-v(\tau)-a\tau}\,d\tau+\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,e^{-v(t)-at}\,dt. \tag{79}$$

При ом выборе элементов $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$, определяемых по формулам (69), (76) и (78), и при выполнении условий (75) и (79) матрица $z_1(t)$

будет периодической с периодом $\omega=1$. Согласно (38), (65) и введенным обозначениям она будет вида

$$z_1(t)=\left\| \begin{matrix} \varphi_{11}^{(1)}(t)\, e^{\eta_1(t)}, & \varphi_{12}^{(1)}(t)\, e^{\eta_2(t)} \\ \varphi_{21}^{(1)}(t)\, e^{\eta_1(t)}, & \varphi_{22}^{(1)}(t)\, e^{\eta_2(t)} \end{matrix} \right\|, \tag{80}$$

где функции

$$\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)\, d\tau - t\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\, dt \qquad (\sigma=1,\ 2) \tag{81}$$

периодические с периодом $\omega=1$, а функции

$$\varphi_{12}^{(1)}(t)=e^{-at}\left[\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)\, e^{v(\tau)+a\tau}\, d\tau - \frac{e^{at}-1}{e^{a}-1}\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\, e^{v(t)+at}\, dt\right], \tag{82}$$

$$\varphi_{21}^{(1)}(t)=e^{at}\left[\int_0^t p_{21}^{(1)}(\tau)\, e^{-v(\tau)-a\tau}\, d\tau - \frac{1-e^{-at}}{1-e^{-a}}\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\, e^{-v(t)-at}\, dt\right], \tag{83}$$

периодические с периодом $\omega=1$ при выполнении соответственно условий (77) и (79).

Принимая во внимание (10), (33), (69), (76) и (78), имеем

$$A(\mu)=\left\| \begin{matrix} \xi_1+a_{11}^{(1)}\mu+\ldots, & a_{12}^{(1)}\mu+\ldots \\ a_{21}^{(1)}\mu+\ldots, & \xi_2+a_{22}^{(1)}\mu+\ldots \end{matrix} \right\|, \tag{84}$$

откуда находим дискриминант (12) характеристического уравнения (13)

$$\Delta(\mu)=\frac{1}{4}\left[(\xi_1-\xi_2)^2+2(\xi_1-\xi_2)(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})\mu+\ldots\right]. \tag{85}$$

Учитывая (34), в рассматриваемом случае

$$\Delta(0)=\frac{1}{4}(\xi_1-\xi_2)^2=\frac{1}{4}(b_1^2+4b_2b_3)\, a_2^2\neq 0. \tag{86}$$

Следовательно, на основании [11] (гл. III, § 1) х. ч. матрицы (84) при достаточно малых μ разлагаются по ц е л ы м степеням μ:

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\frac{1}{2}\left[(\xi_1+\xi_2)\pm(\xi_1-\xi_2)\right]+\left[\frac{1}{2}(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)})+2(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})\right]\mu+o_{\pm}(\mu), \tag{87}$$

причем, принимая во внимание (32), (34) и (69),

$$\xi_1+\xi_2=b_1\int_0^1 \varphi_2(t)\, dt+2\int_0^1 \varphi_1(t)\, dt, \tag{88}$$

$$\xi_1-\xi_2=\sqrt{b_1^2+4b_2b_3}\int_0^1 \varphi_2(t)\, dt, \tag{89}$$

$$a_{11}^{(1)}\pm a_{22}^{(1)}=\int_0^1\left[p_{11}^{(1)}(t)\pm p_{22}^{(1)}(t)\right]dt, \tag{90}$$

а $o_{\pm}(\mu)$ — бесконечно малое порядка выше первого по сравнению с μ при $\mu\to 0$.

На основании проведенных рассуждений и равенств (54) нетрудно заметить, что в случае а) (см. § 2), когда х. ч. матрицы $P_0(t)$ определяются формулами (53), вместо равенств (88) и (89) имеем

$$\xi_1+\xi_2=2\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt+b_1\int_0^1 \varphi_2(t)\,dt, \tag{91}$$

$$\xi_1-\xi_2=b_1\int_0^1 \varphi_2(t)\,dt, \tag{92}$$

а соотношения (90) остаются в силе.

II. Пусть теперь

$$A_0=\int_0^1 P_0(t)\,dt=0. \tag{93}$$

Тогда из (25) и (26) соответственно получаем

$$z_1(t)=\int_0^t (z_0 P_1 z_0^{-1}-A_1)\,d\tau\cdot z_0(t), \tag{94}$$

$$z_k(t)=\int_0^t [M_k(\tau)-A_k]\,d\tau\cdot z_0(t), \tag{95}$$

где матрицы $z_0^{\pm 1}(t)$ и $M_k(\tau)$ определяются соответственно формулами (38) и (24).

Согласно (38) и (94)

$$z_1(t)=\left[\int_0^t P_1(\tau)\,d\tau-A_1 t\right]z_0(t), \tag{96}$$

причём матрица $z_0(t)$ периодическая с периодом $\omega=1$. Здесь

$$\int_0^t P_1(\tau)\,d\tau=B_1 t+\Phi_1(t), \tag{97}$$

где

$$B_1=\int_0^1 P_1(t)\,dt, \tag{98}$$

а матрица $\Phi_1(t)$ периодическая с периодом $\omega=1$. Чтобы матрица $z_1(t)$ была периодической с периодом $\omega=1$ необходимо положить

$$A_1=B_1=\int_0^1 P_1(t)\,dt. \tag{99}$$

Таким образом, элементы матриц A_1 и $\Phi_1(t)$ определяются соответственно равенствами

$$a_{\sigma\nu}^{(1)}=\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2); \tag{100}$$

$$\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{101}$$

причём матрица $z_1(t)$, имеющая вид (80), является непрерывной и периодической с периодом $\omega=1$.

Теперь, используя (95) при $k=2$ и соотношения (31), (37), (93), (100) и подчиняя $z_2(t)$ условию периодичности, аналогично находим элементы матрицы A_2:

$$a_{\sigma\sigma}^{(2)}=\int_0^1\left\{\left[p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt\right]\cdot\left[\int_0^t p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt\right]+\right.$$
$$-\left[\int_0^t p_{\nu\sigma}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 p_{\nu\sigma}^{(1)}(t)\,dt\right]\cdot\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt+$$
$$\left.+\left[\int_0^t p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt\right]\cdot p_{\nu\sigma}^{(1)}(t)\,e^{\mp v(t)}+p_{\sigma\sigma}^{(2)}(t)\right\}dt, \tag{102}$$

$$a_{\sigma\nu}^{(2)}=\int_0^1\left\{\left[p_{\nu\nu}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt\right]\cdot\left[\int_0^t p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt\right]+\right.$$
$$-\left[\int_0^t p_{\nu\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 p_{\nu\nu}^{(1)}(t)\,dt\right]\cdot\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt+$$
$$\left.+\left[\int_0^t p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt\right]\cdot p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,e^{\pm v(t)}+p_{\sigma\nu}^{(2)}(t)\right\}dt, \tag{103}$$

где σ, $\nu=1$, 2 ($\sigma\neq\nu$), причём при $\sigma=1$, $\nu=2$ берем верхние знаки, а при $\sigma=2$, $\nu=1$ нижние знаки. Кроме того, здесь функция $v(t)$ определяется соотношениями (68).

Принимая во внимание (10), (93), (100), (102) и (103), имеем

$$A(\mu)=\begin{Vmatrix} a_{11}^{(1)}\mu+a_{11}^{(2)}\mu^2+\ldots, & a_{12}^{(1)}\mu+a_{12}^{(2)}\mu^2+\ldots \\ a_{21}^{(1)}\mu+a_{21}^{(2)}\mu^2+\ldots, & a_{22}^{(1)}\mu+a_{22}^{(2)}\mu^2+\ldots \end{Vmatrix}, \tag{104}$$

откуда дискриминант (12) представляется в виде

$$\Delta(\mu)=\frac{1}{4}c_2\mu^2+c_3\mu^3+\ldots\qquad\bigl(\Delta(0)=0\bigr), \tag{105}$$

где

$$c_2=(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})^2+4a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}, \tag{106}$$

$$c_3=\frac{1}{2}(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})(a_{21}^{(2)}-a_{22}^{(2)})+a_{12}^{(1)}a_{21}^{(2)}+a_{12}^{(2)}a_{21}^{(1)}. \tag{107}$$

1. Предположим, что

$$\Delta''(0)=\frac{1}{2}c_2\neq 0. \tag{108}$$

Тогда х. ч. матрицы (104) в достаточно малой окрестности $\mu=0$ разлагаются по **целым** степеням μ:

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\frac{1}{2}(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}\pm\sqrt{c_2})\,\mu+\left[\frac{1}{2}(a_{11}^{(2)}+a_{22}^{(2)})\pm\frac{c_3}{\sqrt{c_2}}\right]\mu^2+o_\pm(\mu^2), \tag{109}$$

причём

$$a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}=\int_0^1\left[p_{11}^{(1)}(t)+p_{22}^{(1)}(t)\right]dt, \tag{110}$$

$$c_2=\left[\int_0^1\left(p_{11}^{(1)}(t)-p_{22}^{(1)}(t)\right)dt\right]^2+4\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt\cdot\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt, \tag{111}$$

величина c_3 определяется формулой (107) с помощью соотношений (100), (102) и (103), а $o_\pm(\mu^2)\to 0$ при $\mu\to 0$.

2. Теперь предположим, что условие (108) не имеет места и что

$$\Delta'''(0)=3!\,c_3\neq 0. \qquad (112)$$

В этом случае х. ч. матрицы $A(\mu)$ при достаточно малых μ разлагаются по дробным степеням μ. Согласно введенным обозначениям (107) и (110) имеем

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\frac{1}{2}(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)})\,\mu\pm\sqrt{c_3}\,\mu^{\frac{3}{2}}+o_\pm(\mu^{\frac{3}{2}}). \qquad (113)$$

Наконец заметим, что в случае а), когда х. ч. матрицы $P_0(t)$ определяются равенствами (53) и когда имеет место условие (93), разложения х. ч. решений системы (1) получаем соответственно в видах (109) и (113). Тогда вместо периодической с периодом $\omega=1$ функции (68) будет функция

$$v(t)=b_1\psi_2(t)=b_1\int_0^t\varphi_2(\tau)\,d\tau, \qquad (114)$$

с тем же периодом.

§ 4. Характеристические числа матрицы $P_0(t)$ комплексные

Пусть в (27) величины b_k ($k=1,\ 2,\ 3$) удовлетворяют условию

$$b_1^2+4\,b_2b_3<0. \qquad (115)$$

Тогда х. ч. матрицы $P_0(t)$ комплексные.

Рассмотрим два случая.

1. Предположим сначала, что вместе с условием (115) имеем

$$a_1+\frac{1}{2}a_2b_1=0 \qquad (a_2\neq 0,\ b_1\neq 0). \qquad (116)$$

В этом случае, очевидно, выполняется соотношение (64), а х. ч. матрицы A_0 чисто мнимые.

На основании (33), (34), (66), (115) и (116)

$$A_0=\begin{Vmatrix}\xi_1, & 0\\ 0, & \xi_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\beta i, & 0\\ 0, & -\beta i\end{Vmatrix} \qquad (\beta\neq 0), \qquad (117)$$

причём

$$a=\xi_1-\xi_2=2\,\beta i=a_2\sqrt{b_1^2+4\,b_2b_3}\,. \qquad (118)$$

Кроме того, предположим, что

$$a=\xi_1-\xi_2\neq 2\,\pi m i \qquad (m-\text{целое},\ i=\sqrt{-1}), \qquad (119)$$

и найдем разложения х. ч. матрицы $A(\mu)$ по степеням малого параметра μ[1].

Учитывая (118), из (65) получаем

$$z_1(t)=\begin{Vmatrix}\int_0^t p_{11}^{(1)}(\tau)\,d\tau-a_{11}^{(1)}t, & e^{-2\beta i t}\int_0^t[g_{12}^{1}(\tau)-a_{12}^{(1)}]\,e^{2\beta i\tau}d\tau\\ e^{2\beta i t}\int_0^t[g_{21}^{(1)}(\tau)-a_{21}^{(1)}]\,e^{-2\beta i\tau}d\tau, & \int_0^t p_{22}^{1}(\tau)\,d\tau-a_{22}^{(1)}t\end{Vmatrix}\cdot z_0(t), \qquad (120)$$

[1] Если условие (119) не выполнено, то матрицу Y можно преобразовать так, чтобы ξ_1 и ξ_2 уже удовлетворяли такому условию (см. [7], (стр. 10).

где непрерывные комплексные и периодические с периодом $\omega=1$ функции $g_{\sigma\nu}(\tau)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\ \sigma\neq\nu)$ и матрица $z_0(t)$ определяются соответственно формулами (67) и (37).

На основании рассуждений, проведенных в § 3 относительно периодичности матрицы (65), нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае $a_{\sigma\sigma}^{(1)}$ $(\sigma=1,\ 2)$ находим с помощью (69), а элементы $a_{12}^{(1)}$ и $a_{21}^{(1)}$ получаем соответственно из (76) и (78). Имеем

$$a_{12}^{(1)}=\frac{2\beta i}{e^{2\beta i}-1}\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,e^{iw(t)}\,dt, \tag{121}$$

$$a_{21}^{(1)}=\frac{2\beta i}{1-e^{-2\beta i}}\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,e^{-iw(t)}\,dt, \tag{122}$$

причём, принимая во внимание (31), (68) и (118),

$$iw(t)=\frac{2\beta i}{a_2}\int_0^t \varphi_2(\tau)\,d\tau=v(t)+2\beta it. \tag{123}$$

При таком выборе $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ $(\sigma,\ \nu=1,2)$ и при выполнении соотношений

$$\int_0^{t+1} p_{12}^{(1)}(\tau)\,e^{iw(\tau)}\,d\tau=e^{2\beta i}\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)\,e^{iw(\tau)}\,d\tau+\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,e^{iw(t)}\,dt, \tag{124}$$

$$\int_0^{t+1} p_{21}^{(1)}(\tau)\,e^{-iw(\tau)}\,d\tau=e^{-2\beta i}\int_0^t p_{21}^{(1)}(\tau)\,e^{-iw(\tau)}\,d\tau+\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,e^{-iw(t)}\,dt, \tag{125}$$

получаемых соответственно из (77) и (79), матрица $z_1(t)$ обладает свойствами $z_1(t+1)=z_1(t)$, $z_1(1)=z_1(0)$, т. е. является периодической с периодом $\omega=1$. При этом она определяется формулой (80), причём функции $\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)$ $(\sigma=1,2)$ даны равенствами (81), а функции $\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\ \sigma\neq\nu)$, учитывая (123), получаем соответственно из (82) и (83). Таким образом,

$$\varphi_{12}^{(1)}(t)=e^{-2\beta it}\left[\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)\,e^{iw(\tau)}\,d\tau-\frac{e^{2\beta it}-1}{e^{2\beta i}-1}\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,e^{iw(t)}\,dt\right], \tag{126}$$

$$\varphi_{21}^{(1)}(t)=e^{2\beta it}\left[\int_0^t p_{21}^{(1)}(\tau)\,e^{-iw(\tau)}\,d\tau-\frac{1-e^{-2\beta it}}{1-e^{-2\beta i}}\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,e^{-iw(t)}\,dt\right]. \tag{127}$$

Из (26) для $k=2$ имеем

$$z_2(t)=e^{-A_0t}\int_0^t e^{A_0\tau}\,[M_2(\tau)-A_2]\,e^{-A_0\tau}\,d\tau\cdot e^{A_0t}\,z_0(t), \tag{128}$$

где, принимая во внимание (24),

$$M_2(\tau)=\left[z_1(\tau)P_1(\tau)-A_1z_1(\tau)\right]z_0^{-1}(\tau)+z_0(\tau)P_2(\tau)z_0^{-1}(\tau)=\|m_{\sigma\nu}^{(2)}(\tau)\| \tag{129}$$

$$(\sigma,\ \nu=1,\ 2).$$

Здесь

$$m_{\sigma\sigma}^{(2)}(\tau)=\left[p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)-a_{\sigma\sigma}^{(1)}\right]\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)+p_{\nu\sigma}^{(1)}(\tau)\,\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,e^{\mp v(\tau)}+$$
$$-a_{\sigma\nu}^{(1)}\varphi_{\nu\sigma}^{(1)}(\tau)+p_{\sigma\sigma}^{(2)}(\tau)\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\quad\sigma\neq\nu), \tag{130}$$

$$m_{\sigma\nu}^{(2)}(\tau)=\left[p_{\nu\nu}^{(1)}(\tau)-a_{\sigma\sigma}^{(1)}\right]\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)+\left[p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)+p_{\sigma\nu}^{(2)}(\tau)\right]e^{\pm v(\tau)}+$$
$$-a_{\sigma\nu}^{(1)}\varphi_{\nu\nu}^{(1)}(\tau)\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\quad \sigma\neq\nu),\tag{131}$$

где верхние знаки берем при $\sigma=1$, $\nu=2$ и нижние при $\sigma=2$, $\nu=1$, являются непрерывными и периодическими с периодом $\omega=1$ функции. Величины $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ — элементы матрицы A_1, определяемые соответственно формулами (69), (76) и (78), причём надо учитывать (115), (118), (119) и (123).

Используя введенные обозначения, из (128) получаем

$$z_2(t)=\begin{Vmatrix}\int\limits_0^t m_{11}^{(2)}(\tau)\,d\tau-a_{11}^{(2)}t, & e^{-2\beta it}\int\limits_0^t\left[m_{12}^{(2)}(\tau)-a_{12}^{(2)}\right]e^{2\beta i\tau}\,d\tau\\ e^{2\beta it}\int\limits_0^t\left[m_{21}^{(2)}(\tau)-a_{21}^{(2)}\right]e^{-2\beta i\tau}\,d\tau, & \int\limits_0^t m_{22}^{(2)}(\tau)\,d\tau-a_{22}^{(2)}t\end{Vmatrix}\cdot z_0(t),\tag{132}$$

где, как известно, комплексная матрица $z_0(t)$, имеющая вид (38), является непрерывной и периодической с периодом $\omega=1$.

Аналогично предыдущему, подчиняя матрицу (132) условию периодичности, находим элементы матрицы A_2:

$$a_{\sigma\sigma}^{(2)}=\int\limits_0^1 m_{\sigma\sigma}^{(2)}(t)\,dt\qquad(\sigma=1,\ 2),\tag{133}$$

$$a_{12}^{(2)}=\frac{2\beta i}{e^{2\beta i}-1}\int\limits_0^1 m_{12}^{(2)}(t)\,e^{2\beta it}\,dt,\tag{134}$$

$$a_{21}^{(2)}=\frac{2\beta i}{1-e^{-2\beta i}}\int\limits_0^1 m_{21}^{(2)}(t)\,e^{-2\beta it}\,dt.\tag{135}$$

При таком выборе A_2 и при выполнении условий (124) и (125), в которых в данном случае функции

$$p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,e^{\pm v(\tau)}\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\quad\sigma\neq\nu)\tag{136}$$

надо заменить соответственно функциями $m_{\sigma\nu}^{(2)}(\tau)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\ \sigma\neq\nu)$, матрица $z_2(t)$ является периодической с периодом $\omega=1$ и имеет вид

$$z_2(t)=\begin{Vmatrix}\varphi_{11}^{(2)}(t)\,e^{\eta_1(t)}, & \varphi_{12}^{(2)}(t)\,e^{\eta_2(t)}\\ \varphi_{21}^{(2)}(t)\,e^{\eta_1(t)}, & \varphi_{22}^{(2)}(t)\,e^{\eta_2(t)}\end{Vmatrix}.\tag{137}$$

Здесь непрерывные и периодические с периодом $\omega=1$ функции $\varphi_{\sigma\nu}^{(2)}(t)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ определяются соответственно формулами вида (81), (126) и (127), в которых функции $p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)$ $(\sigma=1,\ 2)$ и (136) надо заменить соответственно на $m_{\sigma\sigma}^{(2)}(\tau)$ $(\sigma=1,\ 2)$ и $m_{\sigma\nu}^{(2)}(\tau)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\ \sigma\neq\nu)$.

Принимая во внимание (10), (69), (117), (121), (122), (124), (125) и (133) — (135), имеем

$$A(\mu)=\begin{Vmatrix}\beta i+a_{11}^{(1)}\mu+a_{11}^{(2)}\mu^2+\ldots, & a_{12}^{(1)}\mu+a_{12}^{(2)}\mu^2+\ldots\\ a_{21}^{(1)}\mu+a_{21}^{(2)}\mu^2+\ldots, & -\beta i+a_{22}^{1}\mu+a_{22}^{(2)}\mu^2+\ldots\end{Vmatrix}.\tag{138}$$

В рассматриваемом случае дискриминант характеристического уравнения этой матрицы

$$\Delta(\mu) = -\beta^2 + \beta(a_{11}^{(1)} - a_{22}^{(1)}) i\mu + \left[\frac{1}{4}(a_{11}^{(1)} - a_{22}^{(1)})^2 + a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)} + \beta(a_{11}^{(2)} - a_{22}^{(2)}) i\right]\mu^2 + \ldots$$

обладает свойством

$$\Delta(0) = -\beta^2 \neq 0.$$

Следовательно, на основании [10] (гл. III, § 1) х. ч. матрицы (138) при достаточно малых μ разлагаются по целым степеням μ. Учитывая введенные обозначения, имеем

$$\lambda_1(\mu) = \beta i + \left(\int_0^1 p_{11}^{(1)}(t)\,dt\right)\mu + \left(a_{11}^{(2)} - \frac{i}{2\beta} a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)}\right)\mu^2 + v_+(\mu^2), \tag{139}$$

$$\lambda_2(\mu) = -\beta i + \left(\int_0^1 p_{22}^{(1)}(t)\,dt\right)\mu + \left(a_{22}^{(2)} + \frac{i}{2\beta} a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)}\right)\mu^2 + o_-(\mu^2), \tag{140}$$

где

$$\beta = \frac{1}{2i} a_2 \sqrt{b_1^2 + 4 b_2 b_3} \neq \pi m \qquad (m - \text{целое}, \quad i = \sqrt{-1}); \tag{141}$$

$$a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)} = \frac{\beta^2}{\sin^2\beta} \int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\, e^{\frac{2\beta i}{a_2} L_2(t)}\,dt \cdot \int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\, e^{-\frac{2\beta i}{a_2} L_2(t)}\,dt, \tag{142}$$

$$L_2(t) = \int_0^t \varphi_2(\tau)\,d\tau; \tag{143}$$

$$a_{\sigma\sigma}^{(2)} = \int_0^1 \left[F_{\sigma\sigma}(t) + p_{\nu\sigma}^{(1)}(t) R_{\pm}(t) \exp\left[\mp \frac{2\beta i}{a_2} L_2(t)\right] + G_{\pm}(t) R_{\mp}(t)\right] dt \tag{144}$$

$$(\sigma,\ \nu = 1,\ 2; \quad \sigma \neq \nu);$$

$$F_{\sigma\sigma}(t) = \left[p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t) - \int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt\right] \cdot \left[\int_0^t p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)\,d\tau - t \int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt\right] + p_{\sigma\sigma}^{(2)}(t) \tag{145}$$

$$(\sigma,\ \nu = 1,\ 2);$$

$$R_{\pm}(t) = \int_0^t p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau) \exp\left[\pm \frac{2\beta i}{a_2} L_2(\tau)\right] d\tau - \frac{1 - e^{\pm 2\beta i t}}{1 - e^{\pm 2\beta i}} \int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t) \times$$

$$\times \exp\left[\pm \frac{2\beta i}{a_2} L_2(t)\right] dt \qquad (\sigma,\ \nu = 1,\ 2; \quad \sigma \neq \nu); \tag{146}$$

$$G_{\pm}(t) = \frac{\pm 2\beta i e^{\pm 2\beta i t}}{1 - e^{\pm 2\beta i}} \int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t) \exp\left[\pm \frac{2\beta i}{a_2} L_2(t)\right] dt \tag{147}$$

$$(\sigma,\ \nu = 1,\ 2; \quad \sigma \neq \nu),$$

причём в формулах (144), (146) и (147) берем верхние знаки при $\sigma = 1$, $\nu = 2$ и нижние знаки при $\sigma = 2$, $\nu = 1$. Кроме того, в разложениях (139) и (140) величины $o_+(\mu^2)$ и $o_-(\mu^2)$ являются бесконечно малыми порядка выше второго по сравнению с μ при $\mu \to 0$.

2. Пусть теперь выполняются условия (93) и (115).

Тогда х. ч. матрицы $P_0(t)$ чисто мнимые, а матрица $A_0 = 0$.

В этом последнем случае при достаточно малых μ разложение х. ч. решений системы (1) получаем соответственно в видах (109) и (113). Согласно (68) и (115), функция $v(t)$, входящая в формулы (102) и (103), будет чисто мнимой.

§ 5. Характеристические числа матрицы $P_0(t)$ равные

I. Предположим, что имеют место соотношения (39).

Тогда матрицы $P_0(t)$, A_0, $\exp(\pm A_0 t)$ и $z_0^{\pm 1}(t)$ определяются соответственно формулами (40), (43), (47) и (48). Кроме того, выполняется условие (64).

При этом из (25) получаем

$$z_1(t)=\left\| \begin{matrix} r_{11}(t)+tr_{12}(t), & r_{12}(t) \\ r_{21}(t)+t\,[r_{22}(t)-r_{11}(t)]-t^2 r_{12}(t), & r_{22}(t)-tr_{12}(t) \end{matrix} \right\| \cdot z_0(t), \qquad (148)$$

где

$$r_{11}(t)+tr_{12}(t)=\int_0^t q_{21}(\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_0^\tau q_{12}(u)\,du\,d\tau-a_{11}^{(1)}t-\frac{1}{2}a_{12}^{(1)}t^2, \qquad (149)$$

$$r_{22}(t)-tr_{12}(t)=\int_0^t q_{12}(\tau)\,d\tau-\int_0^t\int_0^\tau q_{12}(u)\,du\,d\tau-a_{22}^{(1)}t+\frac{1}{2}a_{12}^{(1)}t^2, \qquad (150)$$

$$r_{12}(t)=\int_0^t q_{12}(\tau)\,d\tau-a_{12}^{(1)}t, \qquad (151)$$

$$r_{21}(t)+t\Big[r_{22}(t)-r_{11}(t)\Big]-t^2 r_{12}(t)=\int_0^t q_{21}(\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_0^\tau\Big[q_{22}(u)-q_{11}(u)\Big]du\,d\tau+$$

$$-2\int_0^t\int_0^\tau\int_0^u q_{12}(v)\,dv\,du\,d\tau-a_{21}^{(1)}t+\frac{1}{2}(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})\,t^2+\frac{1}{3}a_{12}^{(1)}t^3, \qquad (152)$$

причём функции

$$q_{11}(\tau)=p_{11}^{(1)}(\tau)-p_{12}^{(1)}(\tau)\,\vartheta(\tau), \qquad (153)$$

$$q_{22}(\tau)=p_{22}^{(1)}(\tau)+p_{12}^{(1)}(\tau)\,\vartheta(\tau), \qquad (154)$$

$$q_{12}(\tau)=p_{12}^{(1)}(\tau), \qquad (155)$$

$$q_{21}(\tau)=p_{21}^{(1)}(\tau)+\Big[p_{11}^{(1)}(\tau)-p_{22}^{(1)}(\tau)\Big]\vartheta(\tau)-p_{12}^{(1)}(\tau)\,\vartheta^2(\tau) \qquad (156)$$

являются непрерывными и периодическими с периодом $\omega=1$.

Так как

$$\int_0^t q_{\sigma\nu}(\tau)\,d\tau=\alpha_{\sigma\nu}^{(1)}t+\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t) \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \qquad (157)$$

$$\int_0^t\int_0^\tau q_{\sigma\nu}(u)\,du\,d\tau=\frac{1}{2}\alpha_{\sigma\nu}^{(1)}t^2+\alpha_{\sigma\nu}^{(2)}t+\varphi_{\sigma\nu}^{(2)}(t) \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \qquad (158)$$

$$\int_0^t\int_0^\tau\int_0^u q_{12}(v)\,dv\,du\,d\tau=\frac{1}{6}\alpha_{12}^{(1)}t^3+\frac{1}{2}\alpha_{12}^{(2)}t^2+\alpha_{12}^{(3)}t+\varphi_{12}^{(3)}(t), \qquad (159)$$

где

$$\alpha_{\sigma\nu}^{(1)}=\int_0^1 q_{\sigma\nu}(t)\,dt, \qquad (160)$$

$$\alpha_{\sigma\nu}^{(2)}=\int_0^1 \varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt, \qquad (161)$$

$$\alpha_{12}^{(3)}=\int_0^1 \varphi_{12}^{(2)}(t)\,dt, \qquad (162)$$

а функции $\varphi_{\sigma\nu}^{(k)}(t)$ (σ, $\nu=1$, 2; $k=1$, 2, 3) периодические с периодом $\omega=1$, то на основании (157)—(159) из (149)—(152) соответственно получаем

$$r_{11}(t)+tr_{12}(t)=(\alpha_{11}^{(1)}-a_{11}^{(1)}+\alpha_{12}^{(2)})\,t+\frac{1}{2}(\alpha_{12}^{(1)}-a_{12}^{(1)})\,t^2+\varphi_{11}^{(1)}(t)+\varphi_{12}^{(2)}(t), \tag{163}$$

$$r_{22}(t)-tr_{12}(t)=(\alpha_{22}^{(1)}-a_{22}^{(1)}-\alpha_{12}^{(2)})\,t+\frac{1}{2}(a_{12}^{(1)}-\alpha_{12}^{(1)})\,t^2+\varphi_{22}^{(1)}(t)-\varphi_{12}^{(2)}(t), \tag{164}$$

$$r_{12}(t)=(\alpha_{12}^{(1)}-a_{12}^{(1)})\,t+\varphi_{12}^{(1)}(t), \tag{165}$$

$$\begin{gathered}r_{21}(t)+t\left[r_{22}(t)-r_{11}(t)\right]-t^2r_{12}(t)=(\alpha_{21}^{(1)}+\alpha_{22}^{(2)}-\alpha_{11}^{(2)}-2\alpha_{12}^{(3)}-a_{21}^{(1)})\,t+\\+\frac{1}{2}(\alpha_{22}^{(1)}-\alpha_{11}^{(1)}-2\alpha_{12}^{(2)}+a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})\,t^2+\frac{1}{3}(a_{12}^{(1)}-\alpha_{12}^{(1)})\,t^3+\varphi_{21}^{(1)}(t)+\\+\varphi_{22}^{(2)}(t)-\varphi_{11}^{(2)}(t)-2\varphi_{12}^{(3)}(t).\end{gathered} \tag{166}$$

Подчиняя эти выражения условию периодичности и принимая во внимание (153)—(156) и (160)—(162), находим элементы матрицы A_1:

$$a_{11}^{(1)}=\int_0^1\left[p_{11}^{(1)}(t)-p_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta(t)+\varphi_{12}^{(1)}(t)\right]dt, \tag{167}$$

$$a_{22}^{(1)}=\int_0^1\left[p_{22}^{(1)}(t)+p_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta(t)-\varphi_{12}^{(1)}(t)\right]dt, \tag{168}$$

$$a_{12}^{(1)}=\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt, \tag{169}$$

$$\begin{gathered}a_{21}^{(1)}=\int_0^1\Big\{p_{21}^{(1)}(t)+\left[p_{11}^{(1)}(t)-p_{22}^{(1)}(t)\right]\vartheta(t)-p_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta^2(t)+\\+\varphi_{22}^{(1)}(t)-\varphi_{11}^{(1)}(t)-2\varphi_{12}^{(2)}(t)\Big\}\,dt.\end{gathered} \tag{170}$$

При этом матрица $z_1(t)$ получается периодической с периодом $\omega=1$, а её элементы определяются равенствами:

$$z_{11}^{(1)}(t)=\left[(\varphi_{11}^{(1)}(t)+\varphi_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta(t)+\varphi_{12}^{(2)}(t)\right]e^{\eta(t)}, \tag{171}$$

$$z_{22}^{(1)}(t)=\left[\varphi_{22}^{(1)}(t)-\varphi_{12}^{(2)}(t)\right]e^{\eta(t)}, \tag{172}$$

$$z_{12}^{(1)}(t)=\varphi_{12}^{(1)}(t)\,e^{\eta(t)}, \tag{173}$$

$$z_{21}^{(1)}(t)=\left\{\varphi_{21}^{(1)}(t)+\varphi_{22}^{(2)}(t)-\varphi_{11}^{(2)}(t)-2\varphi_{12}^{(3)}(t)+\left[\varphi_{22}^{(1)}(t)-\varphi_{12}^{(2)}(t)\right]\vartheta(t)\right\}e^{\eta(t)}, \tag{174}$$

где функции $\eta(t)$ и $\vartheta(t)$ даны соответственно формулами (45) и (46).

В случае в) (см. § 2) функция $\eta(t)$ имеет вид (62), а функция $\vartheta(t)$ сохраняет свой вид.

Согласно (10), (43) и (167)—(170)

$$A(\mu)=\left\|\begin{matrix}a_{11}^{(1)}\mu+\ldots, & a_{12}^{(1)}\mu+\ldots\\ 1+a_{21}^{(1)}\mu+\ldots, & a_{22}^{(1)}\mu+\ldots\end{matrix}\right\|, \tag{175}$$

откуда находим дискриминант (12)

$$\Delta(\mu)=a_{12}^{(1)}\mu+\ldots\qquad\Big(\Delta(0)=0\Big). \tag{176}$$

1. Предположим сначала, что

$$\Delta'(0)=a_{12}^{(1)}=\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt\neq 0. \tag{177}$$

В этом случае х. ч. матрицы (175) в окрестности $\mu=0$ разлагаются по дробным степеням μ, причём

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\pm\sqrt{\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt}\,\mu^{\frac{1}{2}}+o_\pm(\mu^{\frac{1}{2}}), \tag{178}$$

где $o_\pm(\mu^{\frac{1}{2}})\to 0$ при $\mu\to 0$.

2. Пусть теперь условие (177) не выполнено.

Тогда, используя (128), привлекаем к рассмотрению матрицы $A(\mu)$ следующее приближение.

В этом случае $z_2(t)$ получаем в виде (148), причём

$$r_{11}(t)+tr_{12}(t)=\int_0^t m_{11}(\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_0^\tau m_{12}(u)\,du\,d\tau-a_{11}^{(2)}t-\frac{1}{2}a_{12}^{(2)}t^2, \tag{179}$$

$$r_{11}(t)-tr_{12}(t)=\int_0^t m_{22}(\tau)\,d\tau-\int_0^t\int_0^\tau m_{12}(u)\,du\,d\tau-a_{22}^{(2)}t+\frac{1}{2}a_{12}^{(2)}t^2, \tag{180}$$

$$r_{12}(t)=\int_0^t m_{12}(\tau)\,d\tau-a_{12}^{(2)}t, \tag{181}$$

$$r_{21}(t)+t\left[r_{22}(t)-r_{11}(t)\right]-t^2r_{12}(t)=\int_0^t m_{21}(\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_0^\tau\left[r_{22}(u)-r_{11}(u)\right]du\,d\tau+$$
$$-2\int_0^t\int_0^\tau\int_0^u m_{12}(v)\,dv\,du\,d\tau-a_{21}^{(2)}t+\frac{1}{2}(a_{11}^{(2)}-a_{22}^{(2)})t^2+\frac{1}{3}a_{12}^{(2)}t^3, \tag{182}$$

где

$$m_{11}(t)=\left[g_1(t)-g_2(t)\vartheta(t)\right]e^{-\eta(t)}, \tag{183}$$

$$m_{12}(t)=g_2(t)e^{-\eta(t)}, \tag{184}$$

$$m_{22}(t)=g_4(t)e^{-\eta(t)}, \tag{185}$$

$$m_{21}(t)=\left[g_3(t)-g_4(t)\vartheta(t)\right]e^{-\eta(t)}, \tag{186}$$

а непрерывные и периодические с периодом $\omega=1$ функции $g_k(t)$ ($k=1, 2, 3, 4$) определяются равенствами:

$$g_1(t)=\left[p_{11}^{(1)}(t)-a_{11}^{(1)}\right]z_{11}^{(1)}(t)+p_{21}^{(1)}(t)z_{12}^{(1)}(t)+p_{11}^{(2)}(t)e^{\eta(t)}, \tag{187}$$

$$g_2(t)=\left[p_{22}^{(1)}(t)-a_{11}^{(1)}\right]z_{12}^{(1)}(t)+p_{12}^{(1)}(t)z_{11}^{(1)}(t)+p_{12}^{(2)}(t)e^{\eta(t)}, \tag{188}$$

$$g_3(t)=\left[p_{11}^{(1)}(t)-a_{22}^{(1)}\right]z_{21}^{(1)}(t)+p_{21}^{(1)}(t)z_{22}^{(1)}(t)-a_{21}^{(1)}z_{11}^{(1)}(t)+$$
$$+\left[p_{21}^{(2)}(t)+p_{11}^{(2)}(t)\vartheta(t)\right]e^{\eta(t)}, \tag{189}$$

$$g_4(t)=\left[p_{22}^{(1)}(t)-a_{22}^{(1)}\right]z_{22}^{(1)}(t)+p_{12}^{(1)}(t)z_{21}^{(1)}(t)-a_{21}^{(1)}z_{12}^{(1)}(t)+$$
$$+\left[p_{22}^{(2)}(t)+p_{12}^{(2)}(t)\vartheta(t)\right]e^{\eta(t)}. \tag{190}$$

Здесь $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ ($\sigma, \nu=1, 2$) – элементы матрицы A_1, а $z_{\sigma\nu}^{(1)}(t)$ ($\sigma, \nu=1, 2$) – элементы матрицы $z_1(t)$, определяемые соответственно формулам (167) – (170) и (171) – (174).

Для периодических с периодом $\omega=1$ функций (183)—(186) имеют место соотношения:

$$\int_0^t m_{\sigma\nu}(\tau)\,d\tau=\beta_{\sigma\nu}^{(1)}t+\psi_{\sigma\nu}^{(1)}(t) \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{191}$$

$$\int_0^t\int_0^\tau m_{\sigma\nu}(u)\,du\,d\tau=\frac{1}{2}\beta_{\sigma\nu}^{(1)}t^2+\beta_{\sigma\nu}^{(2)}t+\psi_{\sigma\nu}^{(2)}(t) \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{192}$$

$$\int_0^t\int_0^\tau\int_0^u m_{12}(v)\,dv\,du\,d\tau=\frac{1}{6}\beta_{12}^{(1)}t^3+\frac{1}{2}\beta_{12}^{(2)}t^2+\beta_{12}^{(3)}t+\psi_{12}^{(3)}(t), \tag{193}$$

в которых

$$\beta_{\sigma\nu}^{(1)}=\int_0^1 m_{\sigma\nu}(t)\,dt, \tag{194}$$

$$\beta_{\sigma\nu}^{(2)}=\int_0^1 \psi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt, \tag{195}$$

$$\beta_{12}^{(3)}=\int_0^1 \psi_{12}^{(2)}(t)\,dt, \tag{196}$$

а $\psi_{\sigma\nu}^{(k)}(t)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\ k=1,\ 2,\ 3)$ — функции периодические с периодом $\omega=1$ обладающие свойством $\psi_{\sigma\nu}^{(k)}(0)=\psi_{\sigma\nu}^{(k)}(1)=0$.

Учитывая (179)—(182) и подчиняя матрицу $z_2(t)$ условию периодичности, находим элементы матрицы A_2:

$$a_{11}^{(2)}=\beta_{11}^{(1)}+\beta_{12}^{(2)}, \tag{197}$$

$$a_{12}^{(2)}=\beta_{12}^{(1)}, \tag{198}$$

$$a_{21}^{(2)}=\beta_{21}^{(1)}+\beta_{22}^{(2)}-\beta_{11}^{(2)}-2\beta_{12}^{(3)}, \tag{199}$$

$$a_{22}^{(2)}=\beta_{22}^{(1)}-\beta_{12}^{(2)}. \tag{200}$$

При этом элементы матрицы $z_2(t)$ являются периодическими с периодом $\omega=1$, и они определяются равенствами:

$$z_{11}^{(2)}(t)=\left[\psi_{11}^{(1)}(t)+\psi_{12}^{(2)}(t)+\psi_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta(t)\right]e^{\eta(t)},$$

$$z_{22}^{(2)}(t)=\left[\psi_{22}^{(1)}(t)-\psi_{12}^{(2)}(t)\right]e^{\eta(t)},$$

$$z_{12}^{(2)}(t)=\psi_{12}^{(1)}(t)\,e^{\eta(t)},$$

$$z_{21}^{(2)}(t)=\left\{\psi_{21}^{(1)}(t)+\psi_{22}^{(2)}(t)-\psi_{11}^{(2)}(t)-2\psi_{12}^{(3)}(t)+\left[\psi_{22}^{(1)}(t)-\psi_{12}^{(2)}(t)\right]\vartheta(t)\right\}e^{\eta(t)}.$$

Согласно (10), (43), (167)—(170) и (197)—(200) имеем

$$A(\mu)=\begin{Vmatrix} a_{11}^{(1)}\mu+a_{11}^{(2)}\mu^2+\ldots, & a_{12}^{(2)}\mu^2+\ldots \\ 1+a_{21}^{(1)}\mu+a_{21}^{(2)}\mu^2+\ldots, & a_{22}^{(1)}\mu+a_{22}^{(2)}\mu^2+\ldots \end{Vmatrix}, \tag{201}$$

откуда находим дискриминант характеристического уравнения этой матрицы

$$\Delta(\mu)=\left[\frac{1}{4}\left(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}\right)^2+a_{12}^{(2)}\right]\mu^2+\ldots \qquad \left(\Delta(0)=0\right). \tag{202}$$

Предположим, что, кроме выполнения условия

$$\Delta'(0)=a_{12}^{(1)}=\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt=0, \tag{203}$$

дискриминант (202) обладает свойством

$$\Delta''(0)=2\left[\frac{1}{4}(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})^2+a_{12}^{(2)}\right]\neq 0. \tag{204}$$

Тогда в достаточно малой окрестности $\mu=0$ х. ч. матрицы (201) разлагаются по целым степеням μ. Имеем

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\frac{1}{2}\left[a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}\pm\sqrt{(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)})^2+4\,a_{12}^{(2)}}\right]\mu+o_{\pm}(\mu), \tag{205}$$

где, согласно (167), (168), (194) и (198),

$$a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}=\int_0^1\left[p_{11}^{(1)}(t)+p_{22}^{(1)}(t)\right]dt, \tag{206}$$

$$a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}=\int_0^1\left\{p_{11}^{(1)}(t)-p_{22}^{(1)}(t)+2\left[\varphi_{12}^{(1)}(t)-p_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta(t)\right]\right\}dt, \tag{207}$$

$$a_{12}^{(2)}=\int_0^1\left\{p_{12}^{(1)}(t)\left[\varphi_{11}^{(1)}(t)+\varphi_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta(t)+\varphi_{12}^{(2)}(t)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[p_{22}^{(1)}(t)-\int_0^1\left(p_{11}^{(1)}(t)-p_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta(t)+\varphi_{12}^{(1)}(t)\right)dt\right]\varphi_{12}^{(1)}(t)+p_{12}^{(2)}(t)\right\}dt, \tag{208}$$

причём $o_{\pm}(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$. На основании (31), (32), (46), (153), (155), (157), (158), (167) и (169) находим, что входящие в соотношения (207) и (208) непрерывные и периодические с периодом $\omega=1$ функции $\varphi_{11}^{(1)}(t)$, $\varphi_{12}^{(1)}(t)$, $\varphi_{12}^{(2)}(t)$ и $\vartheta(t)$ выражаются через данные функции системы (6) равенствами:

$$\varphi_{11}^{(1)}(t)=\int_0^t\left[p_{11}^{(1)}(\tau)-p_{12}^{(1)}(\tau)\,\vartheta(\tau)\right]d\tau-t\int_0^1\left[p_{11}^{(1)}(t)-p_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta(t)\right]dt, \tag{209}$$

$$\varphi_{12}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)-t\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt, \tag{210}$$

$$\varphi_{12}^{(2)}(t)=\int_0^t\int_0^\tau p_{12}^{(1)}(u)\,du\,d\tau-\frac{1}{2}t\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt-t\int_0^1\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)\,d\tau\,dt+$$

$$+t^2\int_0^1\int_0^1 p_{12}^{(1)}(\tau)\,d\tau\,dt, \tag{211}$$

$$\vartheta(t)=\frac{1}{a_2}\psi_2(t)=\frac{1}{a_2}\left[\int_0^t\varphi_2(\tau)\,d\tau-t\int_0^1\varphi_2(t)\,dt\right], \tag{212}$$

где, как известно,

$$a_2=\int_0^1\varphi_2(t)\,dt\neq 0.$$

Из проведенных рассуждений нетрудно заметить, что в случае г) (см. § 2) при выполнении условия (64) имеют место соответственно разложения (178) и (205), причём в этом случае $\eta(t)=0$.

Предположим теперь, что матрица $P_0(t)$ имеет вид (56) и что выполнено условие (64).

Тогда, используя (25), (56) – (60), аналогично, как и выше, находим дискриминант матрицы (10)

$$\Delta(\mu)=\frac{1}{4}\left[(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)})^2+4\,a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}\right]\mu^2+\ldots\qquad \Big(\Delta(0)=0\Big). \tag{213}$$

Полагая

$$\Delta''(0)=\frac{1}{2}\left[(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)})^2+4\,a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}\right]\neq 0, \tag{214}$$

при достаточно малых μ получаем разложение х. ч. матрицы $A(\mu)$ по ц е л ы м степеням μ:

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\xi+\frac{1}{2}\left[(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)})\pm\sqrt{(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)})^2+4\,a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}}\right]\mu+o_{\pm}(\mu). \tag{215}$$

Здесь

$$\xi=a_1=\int_0^1\varphi_1(t)\,dt\neq 0, \tag{216}$$

$$a_{\sigma\nu}^{(1)}=\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{217}$$

а $o_{\pm}(\mu)$ – бесконечно малое порядка выше чем первого относительно μ при $\mu\to 0$.

II. Пусть теперь имеют место соотношения (39) и $a_2=0$.

1. Тогда $a_1=0$, а матрица $P_0(t)$, определяемая формулой (40), где в данном случае функции $\zeta(t)$ и $\chi(t)$ даны соответственно равенствами (41) и (49), обладает свойствами (50).

В рассматриваемом случае дискриминант характеристического уравнения матрицы $A(\mu)$ имеет вид (105), а разложения х. ч. этой матрицы получаем соответственно в видах (109) и (113).

При этом

$$a_{11}^{(1)}=\int_0^1\left[p_{11}^{(1)}(t)-\vartheta(t)\,p_{12}^{(1)}(t)\right]dt, \tag{218}$$

$$a_{22}^{(1)}=\int_0^1\left[p_{22}^{(1)}(t)+\vartheta(t)\,p_{12}^{(1)}(t)\right]dt, \tag{219}$$

$$a_{12}^{(1)}=\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt, \tag{220}$$

$$a_{21}^{(1)}=\int_0^1\left\{p_{21}^{(1)}(t)+\left[p_{11}^{(1)}(t)-p_{22}^{(1)}(t)\right]\vartheta(t)-p_{12}^{(1)}(t)\,\vartheta^2(t)\right\}dt, \tag{221}$$

где

$$\vartheta(t)=\psi_2(t)=\int_0^t\varphi_2(\tau)\,d\tau\qquad\left(a_2=\int_0^1\varphi_2(t)\,dt=0\right). \tag{222}$$

Кроме того,

$$a_{\sigma\nu}^{(2)}=\int_0^1\left[e^{-\eta(t)}g_{\sigma\nu}(t)+\rho_{\sigma\nu}(t)\right]dt\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{223}$$

где

$$g_{11}(t)=\left[p_{11}^{(1)}(t)-a_{11}^{(1)}\right]z_{11}^{(1)}(t)+z_{12}^{(1)}(t)p_{21}^{(1)}(t)-a_{12}^{(1)}z_{21}^{(1)}(t)+$$
$$-\left\{\left[p_{22}^{(1)}(t)-a_{11}^{(1)}\right]z_{12}^{(1)}(t)+z_{11}^{(1)}(t)p_{12}^{(1)}(t)-a_{12}^{(1)}z_{22}^{(1)}(t)\right\}\vartheta(t),$$
$$g_{21}(t)=\left[p_{11}^{(1)}(t)-a_{22}^{(1)}\right]z_{21}^{(1)}(t)+z_{22}^{(1)}(t)p_{21}^{(1)}(t)-a_{21}^{(1)}z_{11}^{(1)}(t)+$$
$$-\left\{\left[p_{22}^{(1)}(t)-a_{22}^{(1)}\right]z_{22}^{(1)}(t)+z_{21}^{(1)}(t)p_{12}^{(1)}(t)-a_{21}^{(1)}z_{12}^{(1)}(t)\right\}\vartheta(t),$$
$$g_{12}(t)=\left[p_{22}^{(1)}(t)-a_{11}^{(1)}\right]z_{12}^{(1)}(t)+z_{11}^{(1)}(t)p_{12}^{(1)}(t)-a_{12}^{(1)}z_{22}^{(1)}(t),$$
$$g_{22}(t)=\left[p_{22}^{(1)}(t)-a_{22}^{(1)}\right]z_{22}^{(1)}(t)+z_{21}^{(1)}(t)p_{12}^{(1)}(t)-a_{21}^{(1)}z_{12}^{(1)}(t),$$
$$z_{11}^{(1)}(t)=\left[\varphi_{11}^{(1)}(t)+\vartheta(t)\,\varphi_{12}^{(1)}(t)\right]e^{\eta(t)},$$
$$z_{21}^{(1)}(t)=\left[\varphi_{21}^{(1)}(t)+\vartheta(t)\,\varphi_{22}^{(1)}(t)\right]e^{\eta(t)},$$
$$z_{12}^{(1)}(t)=\varphi_{12}^{(1)}(t)\,e^{\eta(t)},$$
$$z_{22}^{(1)}(t)=\varphi_{22}^{(1)}(t)\,e^{\eta(t)},$$
$$\eta(t)=\int_0^t\left[\varphi_1(\tau)+\frac{1}{2}b_1\varphi_2(\tau)\right]d\tau,$$
$$\varphi_{11}^{(1)}(t)=\int_0^t\left[p_{11}^{(1)}(\tau)-\vartheta(\tau)p_{12}^{(1)}(\tau)\right]d\tau-a_{11}^{(1)}t,$$
$$\varphi_{22}^{(1)}(t)=\int_0^t\left[p_{22}^{(1)}(\tau)+\vartheta(\tau)p_{12}^{(1)}(\tau)\right]d\tau-a_{22}^{(1)}t,$$
$$\varphi_{12}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)\,d\tau-a_{12}^{(1)}t,$$
$$\varphi_{21}^{(1)}(t)=\int_0^t\left\{p_{21}^{(1)}(\tau)+\left[p_{11}^{(1)}(\tau)-p_{22}^{(1)}(\tau)\right]\vartheta(\tau)-p_{12}^{(1)}(\tau)\,\vartheta^2(\tau)\right\}d\tau-a_{21}^{(1)}t,$$

причём величины $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ определяются соответственно равенствами (218)–(221), и функции

$$\rho_{11}(t)=p_{11}^{(2)}(t)-\vartheta(t)p_{12}^{(2)}(t),$$
$$\rho_{22}(t)=p_{22}^{(2)}(t)+\vartheta(t)p_{12}^{(2)}(t),$$
$$\rho_{12}(t)=p_{12}^{(2)}(t),$$
$$\rho_{21}(t)=p_{21}^{(2)}(t)+\left[p_{11}^{(2)}(t)-p_{22}^{(2)}(t)\right]\vartheta(t)-p_{12}^{(2)}(t)\,\vartheta^2(t)$$

являются непрерывными и периодическими с периодом $\omega=1$.

2. Пусть теперь матрица $P_0(t)$ имеет вид (56) и обладает свойством (50).

Тогда в случае б) (см. § 2) при достаточно малых μ разложение х. ч. решений системы (1), как и выше, получаем соответственно в видах (109) и (113). В данном случае входящие в эти разложения величины $a_{\sigma\nu}^{(k)}$ (σ, ν, $k=1,\ 2$) определяются следующими равенствами:

$$a_{\sigma\nu}^{(1)}=\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2);$$

$$a_{\sigma\sigma}^{(2)}=\int_0^1\left\{\left[p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt\right]\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)+\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)p_{\nu\sigma}^{(1)}(t)-\right.$$
$$\left.-\varphi_{\nu\sigma}^{(1)}(t)\cdot\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt+p_{\sigma\sigma}^{(2)}(t)\right\}dt\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\quad\sigma\neq\nu),$$
$$a_{\sigma\nu}^{(2)}=\int_0^1\left\{\left[p_{\nu\nu}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt\right]\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)+\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)-\right.$$
$$\left.-\varphi_{\nu\nu}^{(1)}(t)\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt+p_{\sigma\nu}^{(2)}(t)\right\}dt\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2;\quad\sigma\neq\nu),$$

где

$$\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$$

функции непрерывные и периодические с периодом $\omega=1$.

3. Наконец предположим, что в случае г) (см. § 2) имеем $b_2=1$. Кроме того, пусть при этом получаемая из формулы (27) матрица

$$P_0(t)=\begin{Vmatrix}0, & 0\\ \varphi_2(t), & 0\end{Vmatrix}$$

обладает свойством (50).

Тогда х. ч. решений системы (1) при достаточно малых μ тоже разлагаются соответственно в видах (109) и (113), причём в этом последнем случае величины $a_{\sigma\nu}^{(k)}$ $(\sigma,\ \nu,\ k=1,\ 2)$ определяются формулами (218)—(223), в которых надо положить $\eta(t)=0$.

Если в полученных разложениях (87), (109), (113), (139) (140), (178), (205) и (215) вещественная часть свободного члена или коэффициента при наименьшей степени параметра μ не равна нулю, то вопрос об ограниченных решениях системы (1) решается при всех достаточно малых значениях μ.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
30.X.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Б. Голоквосчюс. ДАН БССР, 1959, 3, № 9, 361—367.
2. П. Б. Голоквосчюс. ДАН БССР, 1960, 4, № 6, 236—240.
3. П. Б. Голоквосчюс. Лит. мат. сб., 1961, 1, № 1—2. 59—77.
4. П. Б. Голоквосчюс. Доклады Второй сибирской конф. по мат. и мех., изд. Томского у-та, 1962, 17.
5. Н. П. Еругин. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений, изд. Ленинградского у-та, 1956.
6. П. Б. Голоквосчюс. Изв. вузов, Матем., 1960, № 3, 113—117.
7. Н. П. Еругин. Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1946, 13.
8. Н. П. Еругин. ДАН БССР, 1961, 5, № 12, 533—534.
9. Н. П. Еругин. Инж.-физ. ж., 1960, № 2, 115—127.
10. Ю. С. Богданов, Г. Н. Чеботарёв. Изв. вузов., Матем., 1959, № 4, 27—37.
11. П. Б. Голоквосчюс. Вопросы ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в некоторых частных случаях, канд. дисс., Минск, 1960.

VIENOS KLASĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SU PERIODINIAIS KOEFICIENTAIS SISTEMŲ SPRENDINIŲ CHARAKTERINGŲ SKAIČIŲ RADIMAS

P. GOLOKVOSČIUS

(Reziumė)

Tiriama lygčių sistema

$$\frac{dX}{dt}=XQ(t, \mu), \tag{1}$$

kur antros eilės periodinė su periodu $\omega=1$ reali matrica

$$Q(t, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t)\mu^k \quad \left(Q_k(t+1)=Q_k(t)\right) \tag{2}$$

yra tolydinė ir aprėžta srityje $t\geqslant 0$, μ—skaitinis realus mažas parametras, o eilutė (2) konverguoja intervale $|\mu|<R$. X—sistemos integralinė matrica.

Matricos $Q(t, \mu)$ ir $Q_0(t)$ patenkina atitinkamai sąlygas:

$$Q(t, \mu)\int_0^t Q(\tau, \mu)\,d\tau\neq\int_0^t Q(\tau, \mu)\,d\tau\cdot Q(t, \mu),$$

$$Q_0(t)\int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau=\int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau\cdot Q_0(t),$$

kur

$$Q_0(t)=\begin{Vmatrix} \varphi_1(t)+b_1\varphi_2(t), & b_3\varphi_2(t) \\ b_2\varphi_2(t), & \varphi_1(t) \end{Vmatrix},$$

arba $Q_0(t)$ yra kanoninio pavidalo matrica. Čia b_k $(k=1, 2, 3)$ visame periodo intervale $[0,1]$ yra pastovūs skaičiai, o $\varphi_k(t)$ $(k=1, 2)$—funkcijos tolydinės ir periodinės su periodu $\omega=1$.

Šiame darbe nurodytais atvejais yra gauti sistemos (1) sprendinių charakteringų skaičių išdėstymai mažo parametro μ atžvilgiu sveikais ir trupmeniniais laipsniais.

LA RECHERCHE DES NOMBRES CARACTERISTIQUES POUR LE SYSTÈME D'UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES À COEFFICIENTS PERIODIQUES

P. GOLOKVOSČIUS

(Résumé)

Dans cet article nous recherchons les nombres caractéristiques pour le système

$$\frac{dX}{dt}=XQ(t, \mu), \tag{1}$$

où

$$Q(t, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t)\mu^k \quad \left(Q_k(t+1)=Q_k(t)\right) \tag{2}$$

est une matrice réelle du second degré. Cette matrice admet la période $\omega=1$ par rapport à t. Elle est bornée et continue de la variable réelle $t\geqslant 0$. X est une matrice intégrale, μ est un petit paramètre variable indépendant. La série (2) est convergente pour $|\mu|<R$.

Supposons que les matrices $Q(t, \mu)$ et $Q_0(t)$ satisfont respectivement aux relations:

$$Q(t, \mu)\int_0^t Q(\tau, \mu)\,d\tau \neq \int_0^t Q(\tau, \mu)\,d\tau \cdot Q(t, \mu),$$

$$Q_0(t)\int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau = \int_0^t Q_0(\tau)\,d\tau \cdot Q_0(t),$$

où

$$Q_0(t) = \left\| \begin{matrix} \varphi_1(t) + b_1\varphi_2(t), & b_3\varphi_2(t) \\ b_2\varphi_2(t), & \varphi_1(t) \end{matrix} \right\|,$$

ou bien que la matrice $Q_0(t)$ a une forme canonique. Observons que dans les cas mentionnés ci-dessus b_k $(k=1, 2, 3)$ sont des constantes quelconques et que les fonctions $\varphi_k(t)$ $(k=1, 2)$ sont continues, admettant la période $\omega=1$.