III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Э. ВИЛКАС

Эта заметка является продолжением [1] и посвящена решению функционального уравнения

$$x = \operatorname{val} A(x), \tag{1}$$

где $\operatorname{val} A$ — значение игры с матрицей

$$A = \| a_{ij} \|_{k \times l}.$$

Заметка содержит метод нахождения $\operatorname{val} A(x)$ в явном виде и приближенный метод последовательного нахождения всех решений уравнения (1).

1. Для полного исследования уравнения (1) мы найдем явное выражение $\operatorname{val} A(x)$, используя известную теорему Л. С. Шепли и Р. Н. Сноу [2] (см. также [3], стр. 13). Результаты настоящего пункта тривиальным образом обобщаются для многомерного случая.

Пусть α — подмножество множества $K = \{1, 2, \ldots, k\}$, β — подмножество множества $L = \{1, 2, \ldots, l\}$,

$$M = \{\alpha\}, \quad M = \{\beta\}.$$

Обозначим через $v_{\alpha\beta}$ значение игры, матрица $A_{\alpha\beta}$ которой состоит из элементов матрицы A, стоящих на пересечении строк α и столбцов β, через SB сумму элементов матрицы, обратной матрице B.

Лемма 1. *Игра с матрицей $\| v_{\alpha\beta} \|$, где множества чистых стратегий — множества M и N, имеет хотя бы одну седловую точку $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, причем такую, что*

$$v_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \operatorname{val} A = [SA_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}]^{-1}.$$

Пара $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ является седловой точкой тогда и только тогда, когда $v_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \operatorname{val} A$.

Доказательство. По теореме Шепли и Сноу [2] (см. также [3], стр. 13) в силу существования решения матричной игры найдется такая невырожденная при $\operatorname{val} A \neq 0$ квадратная субматрица $A_{\alpha\beta}$ матрицы A, что

$$\operatorname{val} A = [SA_{\alpha\beta}]^{-1},$$

причем

$$p = I_r A_{\alpha\beta}^{-1} (\operatorname{val} A), \quad q = A_{\alpha\beta}^{-1} \cdot I_r^T (\operatorname{val} A)$$

(T — знак транспонирования) являются крайними оптимальными стратегиями: Если $A_{\alpha\beta}$ — $(r \times r)$-матрица, то I_r — r-мерный вектор. Очевидно тогда $\operatorname{val} A = \operatorname{val} A_{\alpha\beta}$. Остается показать, что из равенства $v_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \operatorname{val} A$ следуют неравенства

$$v_{\alpha\bar{\beta}} \leqslant v_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \leqslant v_{\bar{\alpha}\beta}, \tag{2}$$

для всех $\alpha\in M$, $\beta\in N$. Докажем первое из них. Пусть верно обратное: для первого игрока существует такая стратегия $\alpha'\in M$, что

$$v_{\alpha'\bar\beta}>v_{\bar\alpha\bar\beta}.$$

Тогда первый игрок в игре с матрицей A должен получить по крайней мере $v_{\alpha'\bar\beta}$, так как по определению $\bar\beta$ и $v_{\alpha\beta}$ смешанная стратегия, составленная из чистых стратегий $\bar\beta$, второму игроку обеспечивает наименьший проигрыш. Но это противоречит определению значения игры. Второе неравенство (2) доказывается аналогично.

Обозначим $d(\alpha)$ число элементов множества α.

Лемма 2. *Пусть $(\bar\alpha, \bar\beta)$ — седловая точка матрицы $\|v_{\alpha\beta}(x)\|$ в точке $\bar x$, $A_{\bar\alpha\bar\beta}$ — $(r\times r)$-матрица, I — какое нибудь множество, $\bar x\in I$. Тогда для того, чтобы $(\bar\alpha, \bar\beta)$ была седловой точкой при всех $x\in I$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$v_{\alpha\bar\beta}(x)\leqslant v_{\bar\alpha\bar\beta}(x)\leqslant v_{\bar\alpha\beta}(x), \tag{3}$$

для всех $\alpha\in M$, $\beta\in N$, для которых $d(\alpha)\leqslant r$, $d(\alpha)\leqslant r$, и любого $x\in I$.

Доказательство. В силу леммы 1 и неравенств (2) для выполнения утверждения леммы необходимо и достаточно, чтобы

$$v_{\alpha\bar\beta}(x)\leqslant v_{\bar\alpha\bar\beta}(x)\leqslant v_{\bar\alpha\beta}(x), \tag{4}$$

для всех $\alpha\in M$, $\beta\in N$. По упомянутой выше теореме [2] для любых α и β существуют такие α_0 и β_0, что

$$v_{\bar\alpha\beta}=v_{\bar\alpha\beta_0},\quad v_{\alpha\bar\beta}=v_{\alpha_0\beta},\quad d(\alpha_0)\leqslant r,\quad d(\beta_0)\leqslant r.$$

Отсюда и (4) следует лемма.

Будем говорить, что матрица $A_{\alpha\beta}(x)$ *существенна в точке* x, если

$$v_{\alpha\beta}(x)=[SA_{\alpha\beta}(x)]^{-1}. \tag{5}$$

Заметим, что для существенности матрицы $A_{\alpha\beta}$ в точке x необходимо, чтобы в матрице $A_{\alpha\beta}(x)$ не было доминирования столбцов и строк. Часто этого и достаточно.

Теорема 1. *Пусть в какой нибудь точке $\bar x\in I$*

$$\operatorname{val} A(\bar x)=[SA_{\bar\alpha\bar\beta}(\bar x)]^{-1},$$

где $d(\alpha)=d(\beta)=r$. Для того, чтобы при любом $x\in I$ имело место равенство

$$\operatorname{val} A(x)=[SA_{\bar\alpha\bar\beta}(x)]^{-1}, \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\min_{\beta\in\bar\beta}[SA_{\alpha\beta}(x)]^{-1}\leqslant[SA_{\bar\alpha\bar\beta}(x)]^{-1}\leqslant\max_{\alpha\in\bar\alpha}[SA_{\alpha\beta}(x)]^{-1}, \tag{7}$$

для всех $x\in I$ и α, β, для которых $A_{\alpha\beta}(x)$ существенны и $d(\alpha)\leqslant r$, $d(\beta)\leqslant r$.

Доказательство. Теорема легко следует из лемм 1 и 2, если заметить, что при $d(\alpha)>d(\beta)$

$$v_{\alpha\beta}=\max_{\substack{\alpha'\subset\alpha\\ d(\alpha')=d(\beta)}} v_{\alpha'\beta},$$

а при $d(\alpha)<d(\beta)$

$$v_{\alpha\beta}=\min_{\substack{\beta'\subset\beta\\ d(\beta')=d(\alpha)}} v_{\alpha\beta'}.$$

Замечание. Если (6) имеет место, то по [2] в множестве I мы можем написать крайние оптимальные стратегии в явном виде. Следовательно, эта теорема может быть применена к решению общей параметрической задачи линейного программирования в множестве I (см. [4], стр. 258).

Определим отображения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ числовой прямой в множества M и N, соответственно, из равенств

$$\operatorname{val} A(x) = v_{\alpha(x)\beta(x)}(x) = [SA_{\alpha(x)\beta(x)}(x)]^{-1}.$$

Пользуясь теоремой 1, практически мы можем построить $\operatorname{val} A(x)$ только в таком интервале, в котором $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ кусочно-постоянны, т. е. множества

$$\{x : \alpha(x) = \alpha', \quad a < x < b\}, \qquad \{x : \beta(x) = \beta', \quad a < x < b\}$$

являются суммами конечного числа интервалов для всех $\alpha' \in M$ $\beta' \in N$. Легко видеть, что в случае, когда все $a_{ij}(x)$ — рациональные или дробно-рациональные функции, такое обстоятельство имеет место для интервала $(-\infty, \infty)$. Поэтому значение игры, а, следовательно, и оптимальные стратегии могут быть найдены на всей прямой и явном виде, и решение уравнения (1) сводится к решению уравнения с кусочно-дробно-рациональной функцией.

2. Здесь мы дадим итеративный метод последовательного нахождения всех решений уравнения 1.

Под мерой, которая будет употребляться нами в дальнейшем, будем подразумевать лебеговскую меру. Измеримость употребляемых множеств следует из того, что все они являются борелевскими множествами. Поэтому этого вопроса мы больше касаться не будем.

Теорема 2. *Если все* $a_{ij}(x)$ *непрерывные функции, производная* $\operatorname{val} A(x)$ *существует почти всюду в* $[a, b]$ *и существует такое* M, *что*

$$\left| \frac{d}{dx} \operatorname{val} A(x) - 1 \right| < M \tag{8}$$

для тех $x \in [a, b]$, *для которых производная существует, то итеративные процессы*

$$x_n = x_{n-1} \pm \frac{|\operatorname{val} A(x_{n-1}) - x_{n-1}|}{M}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

монотонно сходятся к

$$\bar{x} = \min\{x : \operatorname{val} A(x) = x, \quad x \geqslant x_0\},$$

когда берем знак „+“, к

$$\bar{\bar{x}} = \max\{x : \operatorname{val} A(x) = x, \quad x \leqslant x_0\},$$

когда берем знак „−“, для любого $x_0 \in [a, b]$, *для которого* $\bar{x} \in [a, b]$ *и, соответственно,* $\bar{\bar{x}} \in [a, b]$ *существует.*

Доказательство. Недифференцируемость $\operatorname{val} A(x)$ на множестве меры 0 не влияет на рост функций

$$\varphi_{1,2}(x) = x \pm \frac{|\operatorname{val} A(x) - x|}{M}.$$

Пусть $\varphi'_{1,2}(x)$ — производные функций $\varphi_{1,2}(x)$. В силу того, что $\varphi'_{1,2}(x) > 0$ почти всюду в $[a, b]$, функции $\varphi_{1,2}(x)$ являются монотонно возрастающими в интервале (a, b). А сходимость в этом случае доказана в [5].

Для практического решения уравнения (1) при помощи этой теоремы, если интервал, содержащий решение, известен, нужно знать, когда производная функции $\operatorname{val} A(x)$ существует, и оценить ее по абсолютной величине сверху.

Обозначим через $p(x)$ и $q(x)$ оптимальные стратегии первого и второго игроков, соответственно, в игре с матрицей $A(x)$. Пусть

$$A'(x)=\left\| \frac{d}{dx} a_{ij}(x) \right\|.$$

Теорема 3. *Если все функции* $a_{ij}(x)$ *непрерывны в интервале* $[a, b]$ *имеют непрерывную производную почти всюду в* $[a, b]$, *то* $\frac{d}{dx}\operatorname{val} A(x)$ *существует почти всюду в* $[a, b]$ *и*

$$\frac{d}{dx}\operatorname{val} A(x)=p(x)A'(x)q(x).$$

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы на основании теоремы 1 достаточно показать, что $SA_{\alpha\beta}(x)-SA_{\alpha'\beta'}(x)$ меняет знак только на множестве значений $x\in[a, b]$ меры 0 для любых квадратных матриц $A_{\alpha\beta}$ и $A_{\alpha'\beta'}$. Но это немедленно следует из непрерывности почти всюду в интервале $[a, b]$ производных функций $a_{ij}(x)$.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть

$$p(x+h)=p(x)+hp_h(x),$$
$$q(x+h)=q(x)+hq_h(x).$$

Тогда

$$\operatorname{val} A(x+h)=p(x)A(x+h)q(x)+hp_h(x)A(x+h)q(x)+$$
$$+hp(x)A(x+h)q_h(x)+h^2p(x)A(x+h)q_h(x).$$

Поэтому в силу доказанного, непрерывности и ограниченности $a_{ij}(x)$ в $[a, b]$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{val} A(x)=p(x)A'(x)q(x)+p'(x)A(x)q(x)+p(x)A(x)q'(x)$$

почти всюду в интервале $[a, b]$. Легко заметить, что

$$p'(x)A(x)q(x)=0, \quad p(x)A(x)q'(x)=0,$$

почти всюду в $[a, b]$. Действительно,

$$p(x)A(x)=\operatorname{val} A(x)(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l),$$
$$A(x)q(x)=\operatorname{val} A(x)(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)^T,$$

где δ_j и Θ_i равно 1, если $q_j(x)\neq 0$ и, соответственно, $p_i(x)\neq 0$ $(i=1, \ldots, k;$ $j=1, \ldots, l)$,

$$p(x)=\left(p_1(x), \ldots, p_k(x)\right), \quad q(x)=\left(q_1(x), \ldots, q_l(x)\right),$$

Кроме того, если $p_i'(x)$, $q_j'(x)$ — производные функций $p_i(x)$, $q_j(x)$, то

$$\sum_{i=1}^{k} p'(x)=0, \quad \sum_{j=1}^{l} q_j'(x)=0.$$

Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что множества

$$P=\{x\colon \text{существует } i, \text{ что } p_i(x)=0, \ p_i'(x)\neq 0\},$$
$$Q=\{x\colon \text{существует } j, \text{ что } q_j(x)=0, \ q_j'(x)\neq 0\},$$

имеют меру 0. Очевидно, $x \in P$ или $x \in Q$ означает, что x является концом некоторого интервала, в котором $p(x)$ и $q(x)$ — крайние оптимальные стратегии. Следовательно, множества таких точек имеют меру 0.

Следствие. *Если все функции $a_{ij}(x)$ непрерывны в интервале $[a, b]$ имеют там почти всюду непрерывные производные и в $[a, b]$ имеется хотя бы одно решение уравнения (1), то к нахождению всех решений уравнения (1) из $[a, b]$ применима теорема 3 с*

$$M = \max_{\substack{i, j \\ a \leqslant x \leqslant b}} | a'_{ij}(x) - 1 | \cdot$$

Доказательство. Теорема 3.

Теорема 4. *Пусть все функции $a_{ij}(x)$ непрерывны в интервале $[a, b]$ и имеют там почти всюду непрерывные производные и, кроме того,*

$$\operatorname{val} A(a) > a, \quad | p(x) A'(x) q(x) | \leqslant \delta < 1, \qquad b \geqslant \frac{\operatorname{val} A(a) - a\delta}{1 - \delta}.$$

Тогда в интервале $[a, b]$ уравнение (1) имеет решение.

Доказательство. По условиям теоремы $\operatorname{val} A(x)$ скорее пересекает биссектрису координатного угла, чем прямая с угловым коэффициентом δ, проходящая через точку плоскости $\left(a, \operatorname{val} A(a)\right)$.

Выражаю искреннюю благодарность Н. Н. Воробьеву за ценные замечания.

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Поступила в редакцию
20.XI.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Вилкас, Решение функционального уравнения с оператором значения игры, Литовский мат. сб., 3, 1 (1963).
2. L. S. Shapley and R. N. Snow, Basic solutions of discrete games, Contr. to the theory of games, vol. I, Princeton, 1950, 27—35.
3. Матричные игры, Физматгиз, М., 1961.
4. С. Гасс, Линейное программирование, Физматгиз, М., 1961.
5. Л. М. Рыбаков, Метод последовательного вычисления всех действительных корней уравнения, Мат. просв., 6 (1961), 262—263.

MATRICINIO LOŠIMO REIKŠMĖS KAI KURIOS FUNKCIONALINĖS SAVYBĖS

E. VILKAS

(Reziumė)

Duodamas metodas kaip lošimo reikšmės funkciją parašyti išreikštoje formoje. Gana plačiai lošimo matricų klasei randamas monotoniškas iteratyvinis metodas, kurio pagalba galima rasti paeiliui visus lygties (1) sprendinius.

SOM FUNCTIONAL PROPERTIES OF THE MATRIX GAME VALUC

E. VILKAS

(Summary)

The method to find the function of the value of game in explicit form is given. There is given monotone iterative method for sequencial finding of all solutions of the equation (1). Matrix $A(x)$ can be sufficiently general.