II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ ИНТЕГРАЛАХ ТИПА КОШИ-СТИЛЬТЬЕСА

С. Я. ХАВИНСОН

Основное содержание настоящей статьи состоит в доказательстве теоремы о том, что аналитическая функция представимая интегралом типа Коши-Стильтьеса по всюду разрывному множеству E, удовлетворяющему некоторым дополнительным условиям (не слишком обременительным) не может иметь однозначной первообразной, если только эта функция не есть тождественный нуль. Эта теорема изложена в § 2. В § 1 дается изложение некоторых из результатов В. П. Хавина [1] о характеристических признаках функций представимых интегралами типа Коши-Стильтьеса. В целях интересующих нас приложений это изложение проведено в более общих предположениях чем в [1]. В § 3 мы даем дальнейшее приложение результатов, изложенных в § 1, к вопросу о связи между аналитической емкостью множества и распределением масс на нем.

§ 1

Пусть E — ограниченное замкнутое множество расширенной плоскости R, $C(E)$ — пространство непрерывных на E функций с обычной нормой

$$\|f\|=\|f\|_{C(E)}=\max_{z\in E}|f(z)| \tag{1}$$

и $S(E)$ — подпространство в $C(E)$, состоящие из конечных комбинаций вида

$$f(z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{z-a_j}, \qquad a_j\in R-E,\quad j=1,\ \ldots,\ m,$$

m и a_j — свои для каждой $f(z)\in S(E)$. Обозначим через G дополнение E в расширенной плоскости: $G=R-E$ и пусть $u(z)$ — однозначна и аналитична в G. Определим над $S(E)$ однородный и аддитивный функционал:

$$L(f)=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{|z-a_k|=r_k} f(z)\,u(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\lambda_k u(a_k), \tag{2}$$

где радиусы r_k выбраны так, что соответствующие окружности не пересекаются.

Теорема 1 (В. П. Хавин [1]). Для того, чтобы функция $u(z)$ представилась в виде интеграла типа Коши-Стильтьеса по множеству E:

$$u(z)=\int\limits_E \frac{dg}{\zeta-z}, \tag{3}$$

где $g(e)$ — некоторая вполне аддитивная функция B — множеств $e\subset E$, необходимо и достаточно, чтобы функционал (2) был непрерывен по норме пространства $C(E)$, т. е., чтобы существовало такое K, что

$$|L(f)|\leqslant K\|f\|_{C(E)}. \tag{4}$$

При этом $\int\limits_E |dg|\leqslant K$.

Следующая теорема, используемая нами в дальнейшем, формально является обобщением теоремы 3 работы [1]; однако, доказательство ее приводится тем же методом, что и доказательство упомянутой теоремы 3 из [1].

Пусть G область, содержащая ∞ и $E=R-G$. Построим исчерпание области G областями G_n, обладающими следующими свойствами: $G_n\ni\infty$, $G_n\subset G_{n+1}$, $G=\sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n — конечно-связна, порядок связности G_n обозначим m_n; граница Γ_n области G_n состоит из аналитических контуров $\gamma_1^n, \ldots, \gamma_{m_n}^n$. Положим $E_n=R-G_n$; E_n состоит из замкнутых односвязных областей $E_1^n, \ldots, E_{m_n}^n$, γ_j^n — граница E_j^n. Пусть $C_A(E_j^n)$ пространство непрерывных в E_j^n, аналитических внутри E_j^n функций. Для аналитической в G функции $u(z)$ положим:

$$r_j^n=\sup_f\left|\int\limits_{\gamma_j^n} f(z)\,u(z)\,dz\right|,\quad f\in C_A(E_j^n),\quad \|f\|_{C(E_j^n)}\leqslant 1, \tag{5}$$

$$R_n=\sum_{j=1}^{m_n} r_j^n. \tag{6}$$

Теорема 2. Для того, чтобы аналитическая в G функция $u(z)$, $u(\infty)=0$, представлялась интегралом типа Коши-Стильтьеса (3) по множеству $E=R-G$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $K>0$, для которого:

$$R_n\leqslant K,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots. \tag{7}$$

При этом

$$\int\limits_E |dg|\leqslant K. \tag{8}$$

Доказательство. Достаточность. Если $f(z)\in S(E)$, то при достаточно больших n, полюсы $f(z)$ лежат внутри G и поэтому

$$L(f)=\int\limits_{\Gamma_n} f(z)\,u(z)\,dz$$

в силу интегральной формулы Коши. Кроме того,

$$\|f\|_{C(E_n)} \leqslant \|f\|_{C(E)} + \varepsilon$$

и поэтому

$$|L(f)| \leqslant \|f\|_{C(E_n)} \cdot R_n \leqslant (\|f\|_{C(E)} + \varepsilon)\, K.$$

И, значит,

$$|L(f)| \leqslant \|f\|_{C(E)} \cdot K.$$

Из теоремы 1 следует, что $u(z)$ представляется желаемой формулой (3) и имеет место (8).

Необходимость. Пусть функционал (2) ограничен над $S(E)$, т. е.

$$|L(f)| \leqslant K\|f\|_{C(E)}, \qquad f \in S(E).$$

Тогда он ограничен и над $S(E_n) \subseteq S(E)$, ибо

$$|L(f)| \leqslant K\|f\|_{C(E)} \leqslant K\|f\|_{C(E_n)}, \qquad f \in S(E_n). \tag{6}$$

Но норма функционала L над $S(E_n)$ равна R_n. В самом деле, с одной стороны,

$$\|L\|_{S(E_n)} = \sup_{\substack{f \in S(E_n) \\ \|f\|_{C(E_n)} \leqslant 1}} \left| \int_{\Gamma_n} f(z)\, u(z)\, dz \right| \leqslant R_n.$$

С другой стороны, в силу теоремы Рунге для любого набора функций $f_1(z), \ldots, f_{m_n}(z)$, $f_j(z) \in C_A(E_j^n)$, можно найти такую функцию $f(z) \in S(E_n)$, что

$$|f(z) - f_j(z)| < \varepsilon, \quad z \in E_j^n, \quad j = 1, \ldots, m_n.$$

Отсюда сейчас же следует, что $R_n \leqslant \|L\|_{S(E_n)}$. Сопоставив это с (9), находим $R_n \leqslant K$, что и требовалось.

§ 2

Нам потребуется следущая лемма, эквивалентная частному случаю одной теоремы Бишупа [2].

Лемма. Пусть E – ограниченное замкнутое всюду – разрывное множество. Если для заданных на E мер $g_1(e), g_2(e), \ldots, g_k(e)$ выполняется тождество:

$$\sum_{j=1}^{k} \int_E \frac{dg_j}{(\zeta - z)^j} \equiv 0, \qquad z \in R - E, \tag{10}$$

то $g_j(e) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Пусть S – некоторое открытое множество. Докажем, что $g_1(S \cap E) = 0$; отсюда будет следовать, что $g_1 \equiv 0$. Берем исчерпание S областями S_n, $S_n \subset S_{n+1}$, $S_n \to S$, причем $\overline{S_n}$ находится на положительном расстоянии δ_n от границы S. Заключим все множество E в непересекающиеся замкнутые многоугольники $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$, диаметры которых меньше δ_n, а стороны свободны от точек E. Это всегда возможно сделать (см., например, [3], стр. 123). Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ – те из многоугольников, которые содержат точки $\overline{S_n} \cap E$. Тогда $\sum_1^s \Delta_j \subset S$. Обозначим часть E попавшую в $\sum_1^s \Delta_j$ через R_n. Очевидно, что $S \cap E = \sum_1^\infty R_n$ и, значит, надо доказать равенство

$g_1(R_n)=0$, $n=1, 2, \ldots$. Подберем точки $z_1, \ldots, z_m$ в $R-\sum\limits_1^r \Delta_j$ и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что

$$\left|1-\sum_1^m \frac{\lambda_i}{(\zeta-z_i)}\right|<\varepsilon; \quad \zeta\in\sum_1^s \Delta_j, \tag{11}$$

$$\left|\sum_1^m \frac{\lambda_i}{(\zeta-z_i)}\right|<\varepsilon, \quad \zeta\in\sum_{s+1}^r \Delta_j. \tag{12}$$

Это возможно по теореме Рунге. Кроме того, в силу теоремы Вейерштрасса из (11) и (12) будет следовать, что

$$\left|\sum_1^m \frac{\lambda_i}{(\zeta-z_i)^t}\right|<\varepsilon, \quad \zeta\in\sum_1^r \Delta_j, \qquad 2\leqslant t\leqslant k. \tag{13}$$

Сопоставив (10), (11), (12) и (13), получаем:

$$\left|\int_{R_n} dg_1\right|\leqslant A\varepsilon, \tag{14}$$

где A независит от ε. Отсюда следует равенство

$$g_1(R_n)=0,$$

что и нужно было. Поскольку доказано, что $g_1\equiv 0$, условие (10) запишется теперь так:

$$\sum_{j=2}^k \int_E \frac{dg_j}{(\zeta-z)^j}\equiv 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{j=2}^k \int_E \frac{(-1)^{j+1}\,dg_j}{j!\,(\zeta-z)^{j-1}}\equiv 0,$$

и рассуждая, как выше, мы докажем что $g_2\equiv 0$ и т. д. Лемма доказана.

Введем следующую характеристику ограниченной односвязной области D. Пусть z_0 некоторая точка внутри D. Положим

$$\alpha(z_0, D)=\sup_{z\in D}\inf L(z_0, z), \tag{15}$$

где $L(z_0, z)$ – длина линии идущей внутри D и соединяющей z_0 и z, а inf берется по всем таким линиям. Положим далее

$$\alpha(D)=\inf_{z_0\in D}\alpha(z_0, D). \tag{16}$$

Нашим основным результатом является следующая теорема:

Теорема 3. Пусть E ограниченное замкнутое всюду разрывное множество, причем существует такое положительное число M, что при любом $\varepsilon>0$ точки E можно заключить внутрь непересекающихся односвязных областей $\Delta_1, \ldots, \Delta_{r(\varepsilon)}$, диаметры которых меньше ε, и

$$\alpha(\Delta_j)\leqslant M, \qquad j=1, \ldots, r(\varepsilon). \tag{17}$$

Тогда функция $u(z)$ представимая в $G=R-E$ интегралом типа Коши-Стильтьеса (3) не может иметь в G однозначной первообразной, если только $u(z)\not\equiv 0$.

Доказательство. Пусть граница Δ_j, обозначена через γ_j. В силу теоремы 2 имеем:

$$R_\varepsilon=\sum_{j=1}^{r(\varepsilon)}\sup\left|\int_{\gamma_j} f(z)\,u(z)\,dz\right|\leqslant K<\infty, \tag{18}$$

где sup берется по аналитическим в Δ_j, непрерывным в $\overline{\Delta}_j$, функциям не превосходящим по модулю единицу. Допустим, что $u(z)$ имеет в G однозначную первообразную $V(z)$, $V(\infty)=0$. Покажем, что $V(z)$, тоже представляется интегралом типа Коши-Стильтьеса по множеству E:

$$R_\varepsilon^*=\sum_{j=1}^{r(\varepsilon)}\sup\left|\int_{\gamma_j} f(z)\,V(z)\,dz\right|=\sum_{j=1}^{r(\varepsilon)}\sup\left|\int_{\gamma_j} F(z)\,u(z)\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{j=1}^{r(\varepsilon)}\sup\left|\int_{\gamma_j} f(z)\,u(z)\,dz\right|\leqslant MK. \tag{19}$$

Здесь sup все время по тем же $f(z)$, что и в (18), а $F(z)$ — первообразная для $f(z)$:

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz. \tag{20}$$

В силу (17) получаем из $|f(z)|\leqslant 1$, что $|F(z)|\leqslant M$ и значит (19) — установлено. По теореме 2 это влечет представимость $V(z)$ интегралом типа Коши-Стильтьеса:

$$V(z)=\int_E \frac{dg_1}{(\zeta-z)}$$

и, следовательно,

$$u(z)=\int_E \frac{dg_1}{(\zeta-z)^2}.$$

Но по условию

$$u(z)=\int_E \frac{dg}{(\zeta-z)}$$

и значит

$$\int \frac{dg}{(\zeta-z)}-\int_E \frac{dg_1}{(\zeta-z)^2}\equiv 0, \qquad z\in R-E.$$

В силу леммы получаем $g\equiv 0$, $g_1\equiv 0$, следовательно, $u(z)\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие теоремы о возможности покрытия с неравенством (17) — не слишком обременительное. Ему удовлетворяют все множества конечной длины, а также множества, получаемые достаточно регулярными процессами — например, выкидыванием из квадрата крестов и т. п. В то же время существуют и всюду разрывные множества не удовлетворяющие (17). Идея, как можно строить такие множества, указана мне

Е. П. Долженко. Вопрос о справедливости теоремы для таких множеств остается открытым.

Замечание 2. Теорема хорошо иллюстрируется случаем, когда E состоит из единственной точки ζ. Тогда выражение „$u(z)$ — есть интеграл типа Коши-Стильтьеса по E" — означает, что

$$u(z)=\frac{g}{\zeta-z},$$

где g — некоторое комплексное число. Первообразная к $u(z)$:

$$V(z)=g\ln(\zeta-z).$$

Она однозначна в $R-\zeta$ лишь, если $g=0$, т. е. $u(z)\equiv 0$. Хорошая иллюстрация получится и если E — состоит из двух точек ζ_1, ζ_2.

§ 3

Следующее применение теоремы 2 относится к вопросу о связи аналитической емкости множества с распределениями масс на нем. Пусть G — область содержащая ∞, $E=R-G$ и Γ — граница G. Через $B^1(G)$ обозначим класс однозначных аналитических в G' функций $f(z)$, для которых $|f(z)|\leqslant 1$ и $f(\infty)=0$. Аналитической емкостью E (и Γ) называют число

$$\Omega(E)=\Omega(\Gamma)=\sup_{f\in B^1(G)}|\lim_{z\to\infty} zf(z)|. \tag{21}$$

Определение, свойства и предшествующую литературу можно найти в [4]. Если длина Γ конечна, то всякая $f(z)\in B^1(G)$ представляется интегралом типа Коши-Стильтьеса по множеству E. Этот простой факт, вытекающий из теоремы Радона о компактности семейства мер, был замечен независимо друг от друга В. Д. Ерохиным и автором (см. [4]). Из него вытекало, что при конечности длины Γ:

$$\Omega(E)=\sup\left|\int_\Gamma d\mu\right|, \tag{22}$$

где sup взята по всем μ, для которых

$$\left|\int_\Gamma \frac{d\mu}{\zeta-z}\right|\leqslant 1,\qquad z\in G. \tag{23}$$

Мы сейчас покажем, что определение емкости содержащееся в (22) и (23) остается действенным и в некоторых случаях, когда длина Γ бесконечна.

Теорема 4. Пусть при каждом $\varepsilon>0$ множество E можно покрыть непересекающимися односвязными областями $\Delta_1,\ \dots,\ \Delta_{r(\varepsilon)}$, лежащими в ε — окрестности E и такими, что

$$\sum_1^{r(\varepsilon)}\alpha(\Delta_j)\leqslant K, \tag{24}$$

где K — не зависит от ε. Тогда $\Omega(E)$ может быть определено посредством (22) и (23).

Доказательство. Очевидно, что всегда верхняя грань из (22) при условии (23) не больше, чем $\Omega(E)$. Равенство (22) будет доказано, если покажем, что экстремальная для (21) функция $F(z)$ представляется интегралом типа Коши-Стильтьеса. Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ и пусть $\Delta_1^n, \ldots, \Delta_{r_n}^n$ — не пересекающиеся односвязные области, покрывающие E и лежащие в ε_n — окрестности E, $E_n = \sum\limits_j \Delta_j^n$. Рассмотрим области $G_n = R - E_n$, $G_n \subset G_{n+1}$, $G_n \to G$.

Если $F_n(z)$ экстремальная функция для задачи (21) в области G_n, то последовательность $\{F_n(z)\}$ можно считать равномерно в G сходящейся к $F(z)$. Пусть γ_j^n — граница Δ_j^n. Тогда:

$$\sum_{j=1}^{r_n} \sup \left| \int\limits_{\gamma_j^n} f(z) F_n(z)\, dz \right| = \sum_{j=1}^{r_n} \sup \left| \int\limits_{\gamma_j^n} \Phi(z) F_n'(z)\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} \alpha(\Delta_j^n) \int\limits_{\gamma_j^n} |F_n'(z)|\, ds = 2\pi \sum_{j=1}^{r_n} \alpha(\Delta_j^n) \leqslant 2\pi K, \tag{25}$$

sup в (25) берется по функциям $f(z)$ аналитическим в Δ_j^n и ограниченным там единицей; $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz$ — первообразная для $f(z)$, $|\Phi(z)| \leqslant \alpha(\Delta_j^n)$, $z \in \Delta_j^n$. Так как экстремальная функция $F_n(z)$ отображает G_n на r_n — листный круг (Альфорс [5], см. также [4]), причем каждый контур γ_j^n переходит в окружность $|w| = 1$, то

$$\int\limits_{\gamma_j^n} |F_n'(z)|\, ds = 2\pi$$

и (25) установлено.

В силу теоремы 2 $F_n(z)$ может быть представлена интегралом типа Коши-Стильтьеса:

$$F_n(z) = \int\limits_{E_n} \frac{d\mu_n}{\zeta - z},$$

где

$$\int\limits_{E_n} |d\mu_n| \leqslant K.$$

Выбирая из последовательности $\{\mu_n\}$ подпоследовательность, сходящуюся к мере μ, легко найдем, что носителем μ является E и

$$F(z) = \int\limits_{E} \frac{d\mu}{\zeta - z}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Примером множества, удовлетворяющего условиям настоящей теоремы, но такого, что длина Γ бесконечна, может служить звезда, состоящая из круга, к которому присоединены треугольные „лучи" высоты $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

Московский инжинерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию 15.V.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Хавин. Об аналитических функциях, представимых интегралом типа Коши-Стильтьеса. Вестник Л. Г. У., 1958, N 1, стр. 66—79.
2. E. Bishop. Simultaneous approximation by a polynomial and its derivatives, Proc. Amer. Math. Soc., 1959, т. 10, стр. 741—743.
3. Н. Н. Лузин. Теория функций действительного переменного, Н—Л., 1949.
4. С. Я. Хавинсон. Об аналитической емкости множеств, совместной нетривиальности различных классов аналитических функций и лемме Шварца в произвольных областях, Мат. сб., 1961, т. 54 (96), N 1, стр. 3—50.
5. L. V. Ahlfors. Bounded analytic functions, Duke Math. Journ., т. 14, 1947, стр. 1—11.

KAI KURIOS PASTABOS APIE KOŠI-STILTIESO TIPO INTEGRALUS

S. CHAVINSON

(Reziumė)

Tegul funkcija $f(z)$, $f(z)\not\equiv 0$, yra išreiškiama Koši-Stiltieso tipo integralu

$$f(z)=\int\limits_{E}\frac{d\mu}{\zeta-z},$$

kur E—uždara, visur trūki aibė. Darbe įrodoma, kad, esant tam tikroms sąlygoms, funkcijos $f(z)$ pirmapradė funkcija nėra vienareikšmė. Šitas rezultatas leidžia gauti sąryšį tarp analizinio aibės talpumo ir masių pasiskirstymo toje aibėje.

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE INTEGRALEN VOM CAUCHY-STIELTJESSCHEN TYPUS

S. CHAVINSON

(Zusammenfassung)

Mag die Funktion $f(z)$, $f(z)\not\equiv 0$, eine Integraldarstellung vom Cauchy-Stieltjesschen Typus haben:

$$f(z)=\int\limits_{E}\frac{d\mu}{\zeta-z},$$

wo E eine abgeschlossene, nirgens zusammenhängende Menge bedeutet. Es wird bewiesen dass bei gewissen zusätzlichen die Menge E betreffenden Voraussetzungen das unbestimmte Integral von $f(z)$ nicht eindeutig sein kann.

Dieses Resultat findet Verwendung bei der Erforschung gewisser Zusammenhänge zwischen der analytischen Kapazität einer Menge und der Massenverteilung auf derselben Menge.