II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ

Р. УЖДАВИНИС

§ 1. Введение

Вещественная функция $F(m)$, областью определения которой служит множество натуральных чисел, называется аддитивной арифметической (а. а.), если для любой пары взаимно простых m, n, $F(mn)=F(m)+F(n)$.

По своему содержанию настоящая статья является продолжением опубликованных автором работ [1—3]. Полученные в этих работах результаты здесь в некоторой степени уточняются и распространяются на более широкий класс вещественных а. а. функций.

Прежде чем приступить к изложению наших результатов, введем некоторые необходимые обозначения.

Пусть n — достаточно большое натуральное число; p, q — простые числа; $\nu_n\{\ldots\}$ — частота натуральных чисел $m\leqslant n$, подчинённых условиям, которые будут написаны в скобках; $g_1(m)$, $g_2(m)$, ...* — целочисленные полиномы положительной степени, дискриминанты которых $D_1\neq 0$, $D_2\neq 0$, ...; $\vartheta_i(a)$ $(i=1, 2, \ldots)$ — числа несравнимых решений соответствующих сравнений $g_i(m)\equiv 0 \pmod a$; $r=r(n)$ — некоторая функция от n, которая каждый раз определяется точнее; $[x]$ — целая часть от x; $\gamma_p=\left[\frac{\ln r}{\ln p}\right]$;

$$\eta^{(p^\alpha)}(m)=\begin{cases} 1, & \text{если } p^\alpha \| m,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $p^\alpha\|m$ означает, что $p^\alpha \backslash m$ и $p^{\alpha+1}\not\backslash m$; $\alpha_p(m)$ — целое неотрицательное число, такое что $p^{\alpha_p(m)}\|m$; $\beta_p(m)=\min\left(\alpha_p(m), \gamma_p\right)$; $F(m)$, $F_1(m)$, ..., $F_s(m)$ — вещественные а. а. функции; $F^{(p)}(m)=F(p^{\beta_p(m)})$; $F(m)_r=\sum\limits_{n_0<p\leqslant r} F^{(p)}(m)$, где n_0 — некоторая положительная постоянная;

$$A_{ij}(u)=\sum_{p\leqslant u}\frac{F_i(p)\,\vartheta_j(p)}{p}, \quad B_{ij}^2(u)=\sum_{p\leqslant u}\frac{F_i^2(p)\,\vartheta_j(p)}{p} \qquad (i,\ j=1,\ \ldots,\ s);$$

$$G(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du.$$

Результаты изложим в виде следующих теорем.

---

* Для простоты изложения считаем, что полиномы $g_1(m)$, $g_2(m)$, ... примитивны.

Теорема 1 *(аналог закона больших чисел). Пусть* $g_1(m), \ldots, g_s(m)$ — *взаимно простые полиномы;* $F_1(m), \ldots, F_s(m)$ — *вещественные а. а. функции, подчинённые условиям:* $\max\limits_{p\leqslant n}|F_i(p^\alpha)|=O\left(\alpha^k B_{ii}(n)\right)$, *причем* $B_{ii}\left(|g_i(n)|\right)\ll B_{ii}(n)$ $(i=1, \ldots, s)$. *Тогда для любой положительной неограниченно возрастающей функции* $\psi(n)$

$$\nu_n\left\{\left|\sum_{i=1}^{s}\frac{F_i\left(|g_i(m)|\right)-A_{ii}(n)}{B_{ii}(n)}\right|>\psi(n)\right\}\to 0, \tag{1.1}$$

при $n\to\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $g_1(m), \ldots, g_s(m)$ — *взаимно простые полиномы;* $a_1, \ldots, a_s$ — *любые положительные постоянные,* $\sum\limits_{j=1}^{s}a_j^{-2}=a(s)$; $F_1(m), \ldots, F_s(m)$ — *вещественные а. а. функции, удовлетворяющие условиям:*

$$F_j(p^\alpha)=O\left(\alpha^k|F_j(p)|\right);\quad B_{jj}(n)\to\infty \quad \text{при}\quad n\to\infty,\quad \frac{1}{B_{jj}(n)}\max_{p\leqslant n}|F_j(p)|\leqslant\mu_n,$$

где μ_n *монотонно стремится к 0 при* $n\to\infty$. *Тогда*

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{F_j\left(|g_j(m)|\right)-A_{jj}(n)}{a_jB_{jj}(n)}<x\right\}=G(x)+O\left\{\mu_n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\ln^k\frac{1}{\mu_n}+1\right)\right\} \tag{1.2}$$

равномерно относительно $n>n_1$ *и* x, *причем* n_1 *зависит от* $F_j(m)$ *и* $g_j(m)$ $(j=1, \ldots, s)$.

Теорема 3. *Пусть плотность s-мерного нормального распределения дается формулой*

$$p(x_1, \ldots, x_s)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s D}}\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{k,\, l=1}^{s}D_{kl}x_kx_l\right\}, \tag{1.3}$$

где

$$D=\begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \ldots & b_{1s}\\ b_{21} & 1 & \ldots & b_{2s}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{s1} & b_{s2} & \ldots & 1\end{vmatrix}$$

и D_{kl} — *минор детерминанта* D *относительно элемента* b_{kl}; $F_1(m), \ldots, F_s(m)$ — *вещественные а. а. функции, подчинённые условиям:* $\max\limits_{p\leqslant n}|F_i(p^\alpha)|= =o\left(\alpha^kB_{i1}(n)\right)$, $B_{i1}(n)\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Если*

$$\frac{1}{B_{i1}(n)B_{j1}(n)}\sum_{p\leqslant n}\frac{F_i(p)F_j(p)\vartheta_1(p)}{p}\to b_{ij}\qquad (1\leqslant i,\ j\leqslant s,\quad i\neq j), \tag{1.4}$$

при $n\to\infty$, *то совместные функции распределения*

$$\nu_n\left\{\frac{F_1\left(|g_1(m)|\right)-A_{11}(n)}{B_{11}(n)}<x_1, \ \ldots, \ \frac{F_s\left(|g_1(m)|\right)-A_{s1}(n)}{B_{s1}(n)}<x_s\right\}$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.5}$$

сходятся при $n\to\infty$ *к нормальному закону* (1.3).

Во всех теоремах k *означает произвольную положительную постоянную, не зависящую от* p.

При доказательстве последних двух теорем в основном используются метод решета А. А. Бухштаба и некоторые предельные теоремы суммирования независимых случайных величин.

В § 2 излагаются основные леммы, полученные применением упомянутого выше решета. В §§ 3–5 доказываются теоремы 1, 2 и 3. § 6 посвящается примерам.

§ 2. Применение метода решета А. А. Бухштаба

В самом начале приведем леммы, необходимые в дальнейшем.

Лемма 1 (см. 4, стр. 2). *Пусть $g_1(m)$ и $g_2(m)$ — взаимно простые целочисленные полиномы. Тогда, за исключением конечного числа целых положительных a, сравнения*

$$g_1(m) \equiv 0 \pmod a \quad и \quad g_2(m) \equiv 0 \pmod a$$

не имеют общих решений.

Лемма 2 (см. 5, стр. 345–349). *Пусть $g(m)$ — любой примитивный полином степени ν с дискриминантом $D \neq 0$. Тогда число несравнимых решений сравнения $g(m) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ равно $\vartheta(p)$, если $p \nmid D$, и не больше νD^2, если $p \backslash D$.*

Лемма 3. *В условиях леммы 2 количество натуральных чисел $m \leqslant n$, удовлетворяющих сравнению $g(m) \equiv 0 \pmod a$, равно*

$$\left(\left[\frac{n}{a}\right] + \Theta\right)\vartheta(a), \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Кроме того,

$$\vartheta(ab) = \vartheta(a)\,\vartheta(b), \qquad (a, b) = 1,$$

$$\vartheta(p^\alpha) \leqslant \nu, \quad p \nmid D, \quad \alpha \geqslant 1,$$

$$\vartheta(p^\alpha) \leqslant c_1,$$

где c_1 — положительная постоянная, зависящая от $g(m)$.

Непосредственно из леммы 3 выводится следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — набор различных простых чисел. Тогда*

$$\sum_{m=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \eta^{(p_i^{\alpha_i})}\big(g(m)\big) = \begin{cases} n \prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\vartheta_i(p)}{p^\alpha}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right) + R(k), & \text{если } (p_1 \ldots p_k, D) = 1, \\ S(n;\, p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}), & \text{если } (p_1 \ldots p_k, D) \geqslant 1, \end{cases}$$

где

$$|R(k)| \leqslant 2\vartheta(p_1) \ldots 2\vartheta(p_k) \leqslant (2\nu)^k,$$

$$S(n;\, p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}) \leqslant \vartheta(p_1^{\alpha_1}) \ldots \vartheta(p_k^{\alpha_k})\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}} + 1\right) \leqslant (\nu D^2)^k \left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}} + 1\right).$$

Лемма 5 (см. 6, стр. 9). *Пусть $g(m)$ — любой целочисленный полином, разлагающийся на s взаимно простых неприводимых множителей. Тогда*

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{\vartheta(p)}{p} = s \ln\ln n + c_2 + o(1),$$

где c_2 и в дальнейшем $c_3, c_4, \ldots$ — положительные постоянные, зависящие от полиномов, но не зависящие от n.

Пусть теперь $g_1(m), \ldots, g_s(m)$ — любые взаимно простые полиномы, определены в введении. Обозначим через ν_i степень полинома $g_i(m)$ $(i=1, \ldots, s)$. Для краткости записи положим

$$\nu=\nu_1+\ldots+\nu_s, \quad \vartheta^*(p)=\vartheta_1(p)+\ldots+\vartheta_s(p).$$

Согласно лемме 3 $\vartheta_i(p)\leqslant \nu_i$ $(i=1, \ldots, s)$, и тем самым $\vartheta^*(p)\leqslant\nu$. Далее мы воспользуемся результатами вышеприведённых лемм, чтобы ввести новые величины для полиномов $g_1(m), \ldots, g_s(m)$, необходимые в дальнейшем.

Итак, на основе леммы 1 мы можем подобрать такое положительное число δ_1, чтобы для всякого $p>\delta_1$ ни одна пара различных сравнений $g_i(m)\equiv 0 \pmod p$ и $g_j(m)\equiv 0 \pmod p$ $(i, j=1, \ldots, s)$ не имела общих решений. Следовательно, для таких p число несравнимых решений сравнения $g_1(m)\ldots g_s(m)\equiv 0 \pmod p$ равно $\vartheta^*(p)$. Далее, положим $\delta_2=\max(|D_1|, \ldots, |D_s|)$. Тогда по лемме 2 заключаем, что каждое сравнение $g_i(m)\equiv \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ $(i=1, \ldots, s)$ при всяком простом $p>\delta_2$ имеет $\vartheta_i(p)$ несравнимых решений по модулю p^α. Наконец, введем последнюю величину, полагая $\delta=\max(\delta_1, \delta_2)$. Тогда имеет место следующая основная лемма.

Лемма 6. *Пусть $g_1(m), \ldots, g_s(m)$ — взаимно простые полиномы, сумма степеней которых равна ν; $r=r(n)$ — функция от n, подчинённая условиям $r>2$, $\ln r(n)=o(\ln n)$ при $n\to\infty$; $B_1, \ldots, B_s$, $b_1, \ldots, b_s$ — натуральные числа, делящиеся на простые числа, бо́льшие n_0, причем $B_1\ldots B_s b_1\ldots b_s\leqslant \leqslant \sqrt[4]{n}$; $\mathfrak{P}$ — любой набор простых чисел, бо́льших n_0 и не превосходящих $r(n)$, где $n_0=\max(\delta, 2\nu)$. Тогда число натуральных $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям*

$$\begin{cases} g_i(m)\equiv 0 \pmod{B_i b_i} & (i=1, \ldots, s), \\ g_i(m)\not\equiv 0 \pmod{b_i p} & (i=1, \ldots, s; \quad p\in\mathfrak{P}, \quad p\nmid B_i), \end{cases} \tag{2.1}$$

равно 0, *если числа $B_i b_i$ $(i=1, \ldots, s)$ не являются попарно взаимно простыми, или*

$$\frac{n}{B_1\ldots B_s b_1\ldots b_s}\prod_{p\mid B_1 b_1}\vartheta_1(p)\ldots\prod_{p\mid B_s b_s}\vartheta_s(p)\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{\nu(p)}{p}\right)\left(1+O(R)\right),$$

в противном случае, где

$$\nu(p)=\begin{cases} 0, & \text{если } p\mid B_1\ldots B_s, \\ 1, & \text{если } p\nmid B_1\ldots B_s, \ p\mid b_1\ldots b_s, \\ \vartheta^*(p), & \text{если } p\nmid B_1\ldots B_s b_1\ldots b_s, \end{cases}$$

$$R=\begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{\ln n}{32\ln r}\left(\ln\dfrac{\ln n}{32\ln r}+\ln\ln\ln\ln n-1-\ln 6\nu+c_3\dfrac{\ln\ln\ln\ln n}{\ln\ln\ln n}\right)\right\}+ \\ \qquad +\dfrac{\ln\ln n}{n^{3/10}} \quad \text{при} \quad \ln r<\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}, \\ \exp\left\{-\dfrac{\ln n}{32\ln r}\left(\ln\dfrac{\ln n}{32\ln r}+\ln\ln\dfrac{\ln n}{\ln r}-1-\ln 6\nu+c_4\dfrac{\ln\ln\dfrac{\ln n}{\ln r}}{\ln\dfrac{\ln n}{\ln r}}\right)\right\} \\ \qquad \text{при} \quad \ln r\geqslant\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}. \end{cases}$$

Доказательство. Мы можем предполагать, что $B_i b_i$ $(i=1, \ldots, s)$ попарно взаимно просты, так как в противном случае согласно лемме 1 система сравнений (2.1) не имеет решений.

Обозначим через $Q(B_1, \ldots, B_s, b_1, \ldots, b_s, \mathfrak{P})$ количество натуральных чисел $m \leqslant n$, удовлетворяющих системе сравнений (2.1). Поскольку простые числа p, принадлежащие к $\mathfrak{P}$ и делящие $b_1 \ldots b_s$, больше δ_1, мы можем согласно лемме 1 систему (2.1) заменить более простой, но равносильной ей системой сравнений

$$\begin{cases} g_i(m) \equiv 0 \pmod{B_i b_i} & (i=1, \ldots, s), \\ g_i(m) \not\equiv 0 \pmod{b_i p} & (i=1, \ldots, s;\ p \in \mathfrak{P},\ p \backslash b_i,\ p \times B_i), \\ g_1(m) \ldots g_s(m) \not\equiv 0 \pmod{p} & (p \in \mathfrak{P},\ p \times B_1 \ldots B_s b_1 \ldots b_s). \end{cases} \tag{2.2}$$

Для определения количества натуральных $m \leqslant n$, удовлетворяющих новой системе сравнений (2.2), выделим целые положительные степени простых чисел $p^\alpha \| b_i$ $(i=1, \ldots, s)$, для которых $p \in \mathfrak{P}$. Исходя из того, что простые числа p, входящие в канонические разложения чисел b_i, по условию леммы больше δ_2, получаем для всякого выделенного $p^\alpha \| b_i$, что множество натуральных чисел m, для которых $p^\alpha \| g_i(m)$ $(i=1, \ldots, s)$, содержит $(p-1)\vartheta_i(p)$ классов вычетов по модулю $p^{\alpha+1}$. Для остальных $p^\alpha \| B_i b_i$ множество натуральных m, для которых $g_i(m) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ $(i=1, \ldots, s)$, содержит $\vartheta_i(p)$ классов вычетов по модулю p^α. Тогда множество натуральных m, для которых

$$\begin{cases} g_i(m) \equiv 0 \pmod{B_i b_i} & (i=1, \ldots, s), \\ g_i(m) \not\equiv 0 \pmod{b_i p} & (i=1, \ldots, s;\ p \in \mathfrak{P},\ p \backslash b_i,\ p \times B_i), \end{cases}$$

содержит

$$\omega = \varphi\Big(\prod_{\substack{p \in \mathfrak{P},\ p \backslash b_1 \ldots b_s \\ p \times B_1 \ldots B_s}} p\Big) \prod_{i=1}^{s} \prod_{p \backslash b_i B_i} \vartheta_i(p)$$

классов вычетов по модулю

$$B = B_1 \ldots B_s b_1 \ldots b_s \prod_{\substack{p \in \mathfrak{P},\ p \backslash b_1 \ldots b_s, \\ p \times B_1 \ldots B_s}} p,$$

где $\varphi(p)$ — функция Эйлера. Полученные классы вычетов по модулю B представим следующими сравнениями $m \equiv a_\chi \pmod{B}$ $(\chi=1, \ldots, \omega)$, где a_χ — некоторое целое число.

Пусть теперь $p_1 < p_2 < \ldots < p_\lambda$ — все простые числа, которые принадлежат к $\mathfrak{P}$ и не входят в канонические разложения чисел $B_i b_i$ $(i=1, \ldots, s)$. Обозначим через $A(a_\chi; B; p_1, \ldots, p_\lambda)$ число натуральных $m \leqslant n$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} m \equiv a_\chi \pmod{B}, \\ g_1(m) \ldots g_s(m) \not\equiv 0 \pmod{p_j} & (j=1, \ldots, \lambda). \end{cases}$$

Когда множество $\{p_1, \ldots, p_\lambda\}$ пусто, через $A(a, B)$ будем обозначать число тех $m \leqslant n$, для которых $m \equiv a_\chi \pmod{B}$. Тогда, очевидно,

$$Q(B_1 \ldots B_s, b_1 \ldots b_s; \mathfrak{P}) = \sum_{\chi=1}^{\omega} A(a_\chi, B; p_1, \ldots, p_\lambda). \tag{2.3}$$

Далее, для оценки числа $A(a_\chi, B; p_1, \ldots, p_\lambda)$ применим метод решета А. А. Бухштаба [7–8]. Для этого обозначим через $W_{\sigma_1,\ldots,\sigma_i}(n)$ число тех $m \leqslant n$, для которых $m \equiv a \pmod B$ и $g_1(m) \ldots g_s(m)$ делятся на $p_{\sigma_1} \ldots p_{\sigma_i}$. Для пустого комплекса $(\sigma_1, \ldots, \sigma_i)$ величина $p_{\sigma_1} \ldots p_{\sigma_i}$ заменяется единицей и соответственно пишем $W_0(n) = A(a, B)$. Имеем:

$$W_{\sigma_1,\ldots,\sigma_i}(n) = \vartheta^*(p_{\sigma_1}) \ldots \vartheta^*(p_{\sigma_i})\left(\frac{A(a, B)}{p_{\sigma_1} \ldots p_{\sigma_i}} + \Theta\right), \qquad |\Theta| \leqslant 1. \quad (2.4)$$

Теперь докажем, что $A(a, B; p_1, \ldots, p_\lambda)$ удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\bar{\Gamma}} (-1)^i W_{\sigma_1,\ldots,\sigma_i}(n) \leqslant A(a, B; p_1, \ldots, p_\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma} (-1)^i W_{\sigma_1,\ldots,\sigma_i}(n), \quad (2.5)$$

где Γ и $\overline{\Gamma}$ — совокупности комплексов $(\sigma_1, \ldots, \sigma_i)$, вводимые в [7]. При этом укажем, что при доказательстве нашей леммы будем пользоваться обозначениями и необходимыми оценками статьи [7].

В самом деле,

$$W_{\sigma_1,\ldots,\sigma_i}(n) = \sum_{\substack{m\leqslant n,\ m\equiv a \pmod B \\ g_1(m)\ldots g_s(m)\equiv 0 \pmod{p_{\sigma_1}\ldots p_{\sigma_i}}}} 1,$$

причем для пустого комплекса $p_{\sigma_1} \ldots p_{\sigma_i}$ заменяется единицей. Поэтому

$$\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma} (-1)^i W_{\sigma_1,\ldots,\sigma_i}(n) = \sum_{\substack{m\leqslant n \\ m\equiv a \pmod B}} \sum_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma \\ p_{\sigma_1}\ldots p_{\sigma_i}\backslash g_1(m)\ldots g_s(m)}} (-1)^i.$$

Но, если для $m \equiv a \pmod B$ произведение $g_1(m) \ldots g_s(m)$ взаимно просто со всеми $p_1, \ldots, p_\lambda$, то среди всех комплексов в Γ только пустой комплекс таков, что $p_{\sigma_1} \ldots p_{\sigma_i} \backslash g_1(m) \ldots g_s(m)$; $p_{\sigma_1} \ldots p_{\sigma_i}$ для него заменяется единицей, и тогда для такого m

$$\sum_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma \\ p_{\sigma_1}\ldots p_{\sigma_i}\backslash g_1(m)\ldots g_s(m)}} (-1)^i = 1,$$

А если для $m \equiv a \pmod B$ произведение $g_1(m) \ldots g_s(m)$ делится на некоторые числа $p_{\mu_1}, \ldots, p_{\mu_t}$ из $p_1, \ldots, p_\lambda$, то беря в качестве Γ' часть Γ, состоящую из комплексов, все элементы которых заключены среди $\mu_1, \ldots, \mu_t$, получаем согласно комбинаторным принципам решета, что для такого $m \equiv a \pmod B$

$$\sum_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma \\ p_{\sigma_1}\ldots p_{\sigma_i}\backslash g_1(m)\ldots g_s(m)}} (-1)^i = \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma'} (-1)^i \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma} (-1)^i W_{\sigma_1,\ldots,\sigma_i}(n) \geqslant \sum_{\substack{m\leqslant n,\ m\equiv a \pmod B \\ (g_1(m)\ldots g_s(m),\, p_1\ldots p_\lambda)=1}} 1 = A(a, B; p_1, \ldots, p_\lambda).$$

Аналогично доказывается, что имеет место левая часть неравенства (2.5). Заменяя в неравенствах (2.5) $W_{\sigma_1,\ldots,\sigma_i}(n)$ выражением (2.4), получаем:

$$A(a,\ B)\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma}(-1)^i\frac{\vartheta^*(p_{\sigma_1})\ldots\vartheta^*(p_{\sigma_i})}{p_{\sigma_1}\ldots p_{\sigma_i}}-\bar{R}_0\leqslant A(a,\ B;\ p_1,\ \ldots,\ p_\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant A(a,\ B)\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma}(-1)^i\frac{\vartheta^*(p_{\sigma_1})\ldots\vartheta^*(p_{\sigma_i})}{p_{\sigma_1}\ldots p_{\sigma_i}}+R_0, \tag{2.6}$$

где

$$R_0\leqslant\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma}\vartheta^*(p_{\sigma_1})\ldots\vartheta^*(p_{\sigma_i})\quad\text{и}\quad\bar{R}_0\leqslant\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\bar{\Gamma}}\vartheta^*(p_{\sigma_1})\ldots\vartheta^*(p_{\sigma_i}).$$

Возьмём в качестве чисел $x_1,\ \ldots,\ x_\lambda$ решета числа $\dfrac{\vartheta^*(p_{\sigma_1})}{p_{\sigma_1}},\ \ldots,\ \dfrac{\vartheta^*(p_{\sigma_i})}{p_{\sigma_i}}$, тогда в новых обозначениях соотношения (2.6) можно записать в виде

$$A(a,\ B)\bar{E}-\bar{R}_0\leqslant A(a,\ B;\ p_1,\ \ldots,\ p_\lambda)\leqslant A(a,\ B)E+R_0, \tag{2.7}$$

где

$$\bar{E}=\bar{E}_{t+1}=\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\bar{\Gamma}}(-1)^i x_{\sigma_1}\ldots x_{\sigma_i}\quad\text{и}\quad E=E_{t+1}=\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)\in\Gamma}(-i)^i x_{\sigma_1}\ldots x_{\sigma_i}.$$

Далее, положим

$$\varkappa_0=2\left[\frac{\ln n}{64\ln r}\right],\qquad \varkappa_1=\varkappa_2=\ldots=\varkappa_t=2;$$

$$g=\left[\left(\frac{64\ln r}{\ln n}+\frac{1}{\ln\frac{\ln n}{4v}}\right)^{-1}\right];\quad h=1+\frac{1}{g};$$

$$t=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \ln r<\dfrac{h}{2}\ln\dfrac{\ln n}{4v},\\[2ex] \left[\dfrac{\ln\dfrac{2\ln r}{\ln\ln n-\ln 4v}}{\ln h}\right], & \text{если}\quad \ln r\geqslant\dfrac{h}{2}\ln\dfrac{\ln n}{4v}.\end{cases}$$

После этого обозначим через λ_a $(a=0,\ \ldots,\ t)$ — индекс наибольшего p_i, для которого выполняется неравенство $p_i\leqslant\exp\{h^{-a}\ln r\}$, и через $S_a^{(i)}$ — i-ю симметрическую функцию от величин $x_{\lambda_a+1},\ \ldots,\ x_{\lambda_a-1}$ $(a=1,\ \ldots,\ t+1)$, которая равна 1 при $i=0$, а при $i>\lambda_{a-1}-\lambda_a$ нулю.

Сначала рассмотрим случай $\ln r\geqslant\dfrac{h}{2}\ln\dfrac{\ln n}{4v}$. Воспользовавшись оценкой

$$\sum_{p\leqslant x}1=\frac{x}{\ln x}+R(x),\quad |R(x)|\leqslant\frac{x}{\ln^{1+\beta}x},\qquad 0<\beta<1,$$

выводим

$$S_a^{(1)}=\sum_{\lambda_a<i\leqslant\lambda_{a-1}}\frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}<v\left(2\left(\frac{h^a}{\ln r}\right)^{1+\beta}+\ln h+\left(\frac{h^a}{\ln r}\right)^{\beta}(h-1)\right).$$

Но по определению t

$$\frac{h^a}{\ln r}\leqslant\frac{h^t}{\ln r}=\frac{1}{\ln r}\exp\{t\ln h\}\leqslant\frac{1}{\ln r}\exp\left\{\ln\frac{2\ln r}{\ln\frac{\ln n}{4v}}\right\}\leqslant\frac{2}{\ln\frac{\ln n}{4v}}.$$

Следовательно,

$$S_a^{(1)} < v\left(\frac{4}{\ln \frac{\ln n}{4v}} + \ln h + \frac{1}{g}\right) < \frac{6v}{g} = 6v\tau \quad \text{при} \quad a = 1, \ldots, t, \tag{2.8}$$

откуда, считая $p_{\lambda_{t+1}} \leqslant n_0$, имеем:

$$\pi_a = \prod_{\lambda_a < i \leqslant \lambda_{a-1}} \left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right) \geqslant \exp\left\{-2 \sum_{\lambda_a < i \leqslant \lambda_{a-1}} \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right\} > \exp\{-12vr\}$$

$$\text{при} \quad a = 1, \ldots, t. \tag{2.9}$$

С целью оценить E сверху и $\bar{E}$ снизу оценим функции Φ_a и $\bar{\Phi}_a$ решета. Для этого вводим функцию $v(x)$ решета следующим образом:

$$v(\lambda_a) = \begin{cases} \frac{1}{h^a} & \text{при} \quad a = 0, \ldots, t-1, \\ 0 & \text{при} \quad a = t, \end{cases} \tag{2.10}$$

которая определяет области J_a и $\bar{J}_a$ комплексов $(\iota_1 \ldots, \iota_a)$, таким же образом, как указано в [7]. Ввиду соотношения (2.8) $S_a^{(1)} < 1$ для всех a, поэтому

$$S_a^{(i)} < S_a^{(i-1)} S_a^{(1)} < S_a^{(i-1)} \quad \text{и} \quad S_a^{(i)} < \frac{S_a^{(1)}}{i!} \leqslant \frac{(6v\tau)^i}{i!}. \tag{2.11}$$

Воспользовавшись (2.11) и проделывая аналогичные выкладки как и в [7], выводим:

$$\Phi_a = \sum_{(\iota_1, \ldots, \iota_{a-1}) \in J_{a-1}} S_1^{(\iota_1)} \ldots S_{a-1}^{(\iota_{a-1})} S_a^{\iota'_a+1} \leqslant \frac{(6v\tau z)^{\varkappa_0}}{\varkappa_0!} \left(\frac{6v\tau}{1-(6v\tau)^\tau}\right)^{2(a-1)} \quad (a = 1, \ldots, t),$$

где z определяется из уравнения $z = 1 + (6v)^\tau z^{1+\tau} \tau^{2\tau}$. Отсюда и из (2.9) следует, что

$$\Phi = \frac{\Phi_1}{\pi_1} + \frac{\Phi_2}{\pi_1 \pi_2} + \ldots < \frac{(6v\tau z)^{\varkappa_0}}{\varkappa_0!} \sum_{a=1}^{\infty} e^{12v\tau a} \left(\frac{6v^\tau}{1-(6v\tau)^\tau}\right)^{2(a-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(6v\tau z)^{\varkappa_0}}{\varkappa_0!} \cdot \frac{e^{12v\tau}}{1 - e^{12v\tau}\left(\frac{6v\tau}{1-(6v\tau)^\tau}\right)^2}.$$

Так как $\ln \frac{1}{\tau z} = \ln \ln g + O\left(\frac{\ln \ln g}{\ln g}\right)$ и при $n \to \infty$ величины τ и $\frac{\tau}{1-(6v\tau)^\tau}$ стремится к нулю, то

$$\Phi < \frac{(6v\tau z)^{\varkappa_0}}{\varkappa_0!} = e^{-\varkappa_0\left\{\ln \varkappa_0 + \ln \ln g - 1 - \ln 6v - O\left(\frac{\ln \ln g}{\ln g}\right) + O\left(\frac{\ln \varkappa_0}{\varkappa_0}\right)\right\}}.$$

Подставляя вместо $\varkappa_0$ и g их значения при соответственно подобранных положительных постоянных c_3 и c_4, получим

$$\Phi < R_1 = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\ln n}{32 \ln r}\left(\ln \frac{\ln n}{32 \ln r} + \ln \ln \ln \ln n - 1 - \ln 6v + c_3 \frac{\ln \ln \ln \ln n}{\ln \ln \ln n}\right)\right\} \\ \qquad \text{при} \quad \frac{h}{2} \ln \frac{\ln n}{4v} < \ln r < \frac{\ln n}{\ln \ln n}, \\ \exp\left\{-\frac{\ln n}{32 \ln r}\left(\ln \frac{\ln n}{32 \ln r} + \ln \ln \frac{\ln n}{\ln r} - 1 - \ln 6v + c_4 \frac{\ln \ln \frac{\ln n}{\ln r}}{\ln \frac{\ln n}{\ln r}}\right)\right\} \\ \qquad \text{при} \quad \ln r \geqslant \frac{\ln n}{\ln \ln n}. \end{cases}$$

Совершенно так же, без изменения хода рассуждений, с теми же оценками выводим, что и $\overline{\Phi} < R_1$.

Заметим, наконец, что все условия решета для оценки наших E и $\overline{E}$ соблюдены и поскольку

$$\pi_1 \dots \pi_{t+1} = \prod_{i=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right),$$

то

$$E = E_{t+1} < \pi_1 \dots \pi_{t+1}(1+\Phi) < \prod_{i=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right)(1+R_1), \tag{2.12}$$

$$\overline{E} = \overline{E}_{t+1} > \pi_1 \dots \pi_{t+1}(1-\overline{\Phi}) > \prod_{i=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right)(1-R_1). \tag{2.13}$$

Оценим теперь R_0 и $\overline{R}_0$. Для этой цели обозначим через Γ^* и $\overline{\Gamma}^*$ части Γ и $\overline{\Gamma}$, состоящие из тех комплексов, все элементы которых взяты из подмножества $\lambda_t+1, \dots, \lambda$. Тогда вследствие (2.10) имеем следующие соотношения:

$$R_0 \leqslant \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_j) \in \Gamma} \vartheta^*(p_{\sigma_1}) \dots \vartheta^*(p_{\sigma_j}) =$$

$$= \prod_{\lambda_{t+1} < \sigma_j \leqslant \lambda_t} \left(1 + \vartheta^*(p_{\sigma_j})\right) \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_j) \in \Gamma^*} \vartheta^*(p_{\sigma_1}) \dots \vartheta^*(p_{\sigma_j}),$$

$$\overline{R}_0 \leqslant \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_j) \in \overline{\Gamma}} \vartheta^*(p_{\sigma_1}) \dots \vartheta^*(p_{\sigma_j}) =$$

$$= \prod_{\lambda_{t+1} < \sigma_j \leqslant \lambda_t} \left(1 + \vartheta^*(p_{\sigma_j})\right) \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_j) \in \overline{\Gamma}^*} \vartheta^*(p_{\sigma_1}) \dots \vartheta^*(p_{\sigma_j}).$$

Теперь, если в комплексе $(\sigma_1, \dots, \sigma_i) \in \Gamma^*$ среди чисел $\sigma_1, \dots, \sigma_i$ имеется ι_1 чисел, лежащих между λ_0 и λ_1, ι_2 чисел, лежащих между λ_1 и λ_2, и т.д., ι_a чисел, лежащих между λ_{a-1} и λ_a, где $a \leqslant t$, то $(\iota_1, \dots, \iota_a) \in J_a$ и, следовательно,

$$\iota_1 + \dots + \frac{\iota_a}{h^{a-1}} \leqslant \varkappa_0 + \frac{2}{h} + \dots + \frac{2}{h^{a-1}} < \varkappa_0 + \frac{2}{h-1},$$

так что каждому комплексу $(\sigma_1, \dots, \sigma_i) \in \Gamma^*$ может быть сопоставлено число

$$2^i \leqslant p_{\sigma_1} \dots p_{\sigma_j} \leqslant p_{\lambda}^{\iota_1} p_{\lambda_1}^{\iota_2} \dots p_{\lambda_{a-1}}^{\iota_a} < \exp\left\{\ln r\left(\iota_1 + \frac{\iota_2}{h} + \dots + \frac{\iota_a}{h^{a-1}}\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\left(\varkappa_0 + \frac{2}{h-1}\right)\ln r\right\}.$$

Точно так же получим, что

$$\vartheta^*(p_{\sigma_1}) \dots \vartheta^*(p_{\sigma_j}) < \exp\left\{\left(\varkappa_0 + \frac{2}{h-1}\right)\ln r\right\}.$$

Поэтому, проделав то же самое и для $\overline{R}_0$, выводим:

$$R_0 < (2v)^{\lambda_t} \exp\left\{2\left(\varkappa_0 + \frac{2}{h-1}\right)\ln r\right\},$$

$$\overline{R}_0 < (2v)^{\lambda_t} \exp\left\{2\left(\varkappa_0 + \frac{2}{h-1}\right)\ln r\right\}.$$

Но

$$\lambda_t \ln 2v < \exp\{h^{-t}\ln r\}\ln 2v < \frac{\ln 2v}{4v}\ln n < \frac{1}{5}\ln n, \qquad 2\varkappa_0 \ln r \leqslant \frac{4\ln n}{64\ln r}\ln r =$$
$$= \frac{1}{16}\ln n, \qquad \frac{4}{h-1}\ln r = 4g\ln r \leqslant 4\left(\frac{64\ln n}{\ln n} + \frac{1}{\ln\frac{\ln n}{4v}}\right)^{-1}\ln r < \frac{1}{10}\ln n.$$

Следовательно,

$$R_0 < n^{1/3}, \qquad \overline{R_0} < n^{1/3}. \tag{2.14}$$

Так как $A(a, B) = \frac{n}{B} + \Theta$, $|\Theta| \leqslant 1$, то подставляя правые части соотношений (2.12), (2.13) и (2.14) в неравенства (2.7), получим:

$$\frac{n}{B}\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right)(1 - R_1) + O(n^{1/3}) < A(a, B;\, p_1, \ldots, p_\lambda) <$$
$$< \frac{n}{B}\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right)(1 + R_1) + O(n^{1/3}).$$

Принимая во внимание, что

$$R_1 > n^{-\frac{1}{8}}, \qquad \frac{n}{B} = \frac{n}{B_1\ldots B_s b_1\ldots b_s}\prod_{\substack{p\in\mathrm{P}\\ p\backslash b_1\ldots b_s}}\frac{1}{p} > \sqrt{n},$$
$$\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right)^{-1} \leqslant \exp\left\{v\sum_{p\leqslant r}\left(\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\right\} \ll (\ln r)^v,$$

имеем:

$$A(a, B;\, p_1, \ldots, p_\lambda) = \frac{n}{B}\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right)\Bigl(1 + O(R_1)\Bigr). \tag{2.15}$$

Остается рассмотреть случай $\ln r < \frac{h}{2}\ln\frac{\ln n}{4v}$. В этом случае числовую функцию $v(x)$ определим таким образом: $v(x) = v(\lambda) = 0$ при $0 < x \leqslant \lambda$. Тогда совокупности Γ и $\overline{\Gamma}$ совпадают и неравенства (2.5) превращаются в следующее равенство

$$A(a, B;\, p_1, \ldots, p_\lambda) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_j)\in\Gamma}(-1)^j W_{\sigma_1, \ldots, \sigma_j}(n). \tag{2.16}$$

Теперь, подставляя в правую часть (2.16) соотношение (2.4), имеем:

$$A(a, B;\, p_1, \ldots, p_\lambda) = \frac{n}{B}\sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_j)\in\Gamma}(-1)^j\frac{\vartheta^*(p_{\sigma_1})\ldots\vartheta^*(p_{\sigma_j})}{p_{\sigma_1}\ldots p_{\sigma_j}} +$$
$$+ O\Bigl(\sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_j)\in\Gamma}\vartheta^*(p_{\sigma_1})\ldots\vartheta^*(p_{\sigma_j})\Bigr).$$

Отсюда по определению совокупности Γ с $t = 0$ и $v(\lambda) = 0$ непосредственно выводим:

$$A(a, B;\, p_1, \ldots, p_\lambda) = \frac{n}{B}\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right) + O\Bigl((2v)^\lambda\Bigr).$$

Так как при $\ln r < \frac{h}{2} \ln \frac{\ln n}{4v}$

$$\lambda \ln 2v < r \ln 2v < \ln 2v \left(\frac{\ln n}{4v}\right)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{g}\right)} < \frac{1}{5} \ln n, \qquad \prod_{i=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right)^{-1} \ll (\ln \ln n)^v,$$

то

$$A(a, B;\ p_1, \ \ldots, \ p_\lambda) = \frac{n}{B} \prod_{i=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{\vartheta^*(p_i)}{p_i}\right)\left(1 + O\left(n^{-3/10} (\ln \ln n)^v\right)\right). \quad (2.17)$$

Наконец, объединяя (2.15) и (2.17) и подставляя в (2.3), получаем:

$$Q(B_1, \ \ldots, \ B_s, \ b_1, \ \ldots, \ b_s;\ \mathfrak{P}) = \frac{n}{B} \sum_{\chi=1}^{\omega} \prod_{\substack{p \in \mathfrak{P} \\ p \nmid B_1 \ldots B_s b_1 \ldots b_s}} \left(1 - \frac{\vartheta^*(p)}{p}\right)\left(1 + O(R)\right) =$$

$$= \frac{n}{B_1 \ldots B_s b_1 \ldots b_s} \cdot \prod_{i=1}^{s} \prod_{p \backslash B_i b_i} \vartheta_i(p) \prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{v^*(p)}{p}\right)\left(1 + O(R)\right).$$

Лемма доказана.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится ещё одна лемма, которую мы здесь приведем.

Лемма 7*. *Пусть $g(m)$ — примитивный полином степени v и с $D \neq 0$; $r = r(n)$ — функция от n, удовлетворяющая условиям $\ln r \geqslant \ln^{2/3} n$ и $\ln r(n) = o(\ln n)$ при $n \to \infty$; $\{b\}$ — множестео натуральных чисел, в канонические разложения которых входят лишь простые числа, не превосходящие $r(n)$. Тогда число натуральных $m \leqslant n$, для которых $g(m)$ делится хотя бы на одно из чисел $b \geqslant u$, где $2 < u \leqslant g(n)$, не превосходит $c_7 n \exp\left\{-\frac{\ln u}{c_8 \ln r}\right\}$.*

Доказательство. Обозначим через y оцениваемое число и через $\langle g(m) \rangle$ наибольшее b, делящее $g(m)$. Тогда, очевидно, при любом положительном l имеем:

$$\sum_{m \leqslant n} \ln^l \langle g(m) \rangle \geqslant y \ln^l u. \quad (2.18)$$

С другой стороны,

$$S = \sum_{m \leqslant n} \ln^l \langle g(m) \rangle \leqslant \sum_{m \leqslant n} \Big(\sum_{\substack{p^\alpha \| g(m) \\ p \leqslant r}} \ln p^\alpha \Big)^l \leqslant \sum_{m \leqslant n} \Big(\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant |g(n)| \\ p \leqslant r}} \eta^{(p^\alpha)}\big(g(m)\big) \ln p^\alpha \Big)^l.$$

Далее, по формуле мультинома

$$S \leqslant \sum_{m \leqslant n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{l_1 + \ldots + l_j = l \\ l_1 \geqslant \ldots \geqslant l_j \geqslant 1}} \frac{l!}{l_1! \ldots l_j!} \sum_{p_1, \ldots, p_j}{}' \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\alpha_1=1}^{\left[\frac{\ln |g(n)|}{\ln p_1}\right]} \eta^{(p_1^{\alpha_1})}\big(g(m)\big) \ln p^{\alpha_1} \Bigg)^{l_1} \ldots \Bigg(\sum_{\alpha_j=1}^{\left[\frac{\ln |g(n)|}{\ln p_j}\right]} \eta^{(p_j^{\alpha_j})}\big(g(m)\big) \ln p_j^{\alpha_j} \Bigg)^{l_j},$$

где штрих указывает, что простые $p_1, \ \ldots, \ p_t$ являются различными, каждый из которых не больше $r(n)$, и что суммирование ведется по всем воз-

---

* Лемма 7 в менее общей форме впервые доказана М. Б. Барбаном [9].

можным перестановкам простых $p_1, \ldots, p_l$. Отсюда, замечая, что произведение $\eta^{(p^{\alpha_i})}(m)\,\eta^{(p^{\alpha_j})}(m)$ при различных α_i и α_j равно нулю, получаем:

$$S \leqslant \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_j=l \\ l_1\geqslant\ldots\geqslant l_j\geqslant 1}} \frac{l!}{l_1!\ldots l_j!} \sum_{p_1,\ldots,p_j}{}' \sum_{\alpha_1=1}^{\left[\frac{\ln|g(n)|}{\ln p_1}\right]} \ln^{l_1} p_1^{\alpha_1} \ldots \sum_{\alpha_j=1}^{\left[\frac{\ln|g(n)|}{\ln p_j}\right]} \ln^{l_j} p_j^{\alpha_j} \times$$

$$\times \sum_{m\leqslant n} \eta^{(p_1^{\alpha_1})}\left(g(m)\right) \ldots \eta^{(p_j^{\alpha_j})}\left(g(m)\right),$$

и в силу второй оценки в лемме 4

$$S < n(vD^2)^l \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_j=l \\ l_1\geqslant\ldots\geqslant l_j\geqslant 1}} \frac{l!}{l_1!\ldots l_j!} \sum_{\substack{p\leqslant r \\ \alpha\geqslant 1}} \frac{\ln^{l_1} p^\alpha}{p^\alpha} \ldots \sum_{\substack{p\leqslant r \\ \alpha\geqslant 1}} \frac{\ln^{l_j} p^\alpha}{p^\alpha} + \Big(vD^2 \sum_{\substack{p^\alpha\leqslant|g(n)| \\ p\leqslant r}} \ln p^\alpha\Big)^l.$$

Так как

$$\sum_{\substack{p\leqslant u \\ \alpha\geqslant 1}} \frac{\ln^k p^\alpha}{p^\alpha} = O(k!\,\ln^k u)$$

и

$$\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant|g(n)| \\ p\leqslant r}} \ln p^\alpha = \sum_{p\leqslant r} \ln p \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\ln|g(n)|}{\ln p}\right]} \alpha < \ln^2|g(n)| \sum_{p\leqslant r} \frac{1}{\ln p} < c_5 v^2 \frac{r\ln^2 n}{\ln^2 r},$$

то при соответственно подобранной постоянной c_6

$$S < n(c_6 vD^2 l\ln r)^l + \Big(c_6 v^3 D^2 \frac{r\ln^2 n}{\ln^2 n}\Big)^l. \tag{2.19}$$

Подставляя оценку (2.19) в неравенство (2.18), находим, что

$$y < n\frac{(c_6 vD^2 l\ln r)^l}{\ln^l u}\left\{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{v^2 r\ln^2 n}{l\ln^3 r}\right)^l\right\}.$$

Откуда при $l = \left[\dfrac{\ln u}{c_6 vD^2 e\ln r}\right]$ и оценке

$$l\ln\frac{v^2 r\ln^2 n}{l\ln^3 r} \leqslant \frac{\ln|g(n)|}{ec_6 vD^2\ln r}(\ln r + 2\ln v) < \frac{1}{2}\ln n + \ln^{1/3} n < \frac{5}{6}\ln n$$

следует, что

$$y \leqslant n\exp\left\{-\frac{\ln u}{c_8\ln r}\right\}\left(1+o(1)\right).$$

Этим лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

В силу очевидного неравенства

$$n\psi^2(n)\nu_n\left\{\left|\sum_{i=1}^{s}\frac{F_i\left(|g_i(m)|\right)-A_{ii}(n)}{B_{ii}(n)}\right| > \psi(n)\right\} \leqslant \sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{s}\frac{F_i\left(|g_i(m)|\right)-A_{ii}(n)}{B_{ii}(n)}\Big)^2$$

нам достаточно показать, что

$$S = \sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{s}\frac{F_i\left(|g_i(m)|\right)-A_{ii}(n)}{B_{ii}(n)}\Big)^2 \ll n.$$

С этой целью дважды применяя неравенство Коши, выводим:

$$S\leqslant 5s\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{B_{ii}^2(n)}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left(F_i\left(|g_i(m)|\right)_{\sqrt{n}}-K_{ii}(n)\right)^2+n\left(K_{ii}(n)-A_{ii}\right)^2+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant n_0,\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}\\ p^\alpha\,\|\,g_i(m)}}F_i(p^\alpha)\Bigg)^2+\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n},\ p^\alpha>\sqrt{n}\\ p^\alpha\,\|\,g_i(m)}}F_i(p^\alpha)\Bigg)^2+$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{p>\sqrt{n},\ p^\alpha>\sqrt{n}\\ p^\alpha\,\|\,g_i(m)}}F_i(p^\alpha)\Bigg)^2\right\}, \tag{3.1}$$

где

$$K_{ii}(n)=\sum_{p>n_0,\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}\rho_i(p^\alpha)F_i(p^\alpha),\quad \rho_i(p^\alpha)=\frac{\vartheta_i(p)}{p^\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right)\qquad (i=1,\ \ldots,\ s),$$

и n_0 — постоянная, определенная в лемме 6.

Пусть при оценке каждого члена правой части (3.1) $F(m)$ означает любую из функций $F_j(m)$ $(j=1,\ \ldots,\ s)$, а $g(m)$, $A(n)$, $B(n)$, $K(n)$ — соответствующие $g_j(m)$, $A_{jj}(n)$, $B_{jj}(n)$, $K_{jj}(n)$.

Из леммы 3 следует, что

$$|K(n)-A(n)|\leqslant\sum_{p\leqslant n_0}\frac{|F(p)|\,\vartheta(p)}{p}+\sum_{\sqrt{n}<p\leqslant n}\frac{|F(p)|\,\vartheta(p)}{p}+\sum_{p^\alpha\leqslant\sqrt{n},\ \alpha>1}\frac{|F(p^\alpha)|\,\vartheta(p)}{p^\alpha}+$$

$$+\sum_{p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}\frac{|F(p^\alpha)|\,\vartheta(p)}{p^{\alpha+1}}\ll 1+B(n)\sum_{\sqrt{n}<p\leqslant n}\frac{\vartheta(p)}{p}+B(\sqrt{n})\sum_{p^\alpha,\ \alpha>1}\frac{\alpha^k}{p^\alpha}\ll B(n). \tag{3.2}$$

Теперь обратимся к последующим двум суммам. В силу леммы 4 имеем:

$$\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant n_0,\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}\\ p^\alpha\,\|\,g(m)}}F(p^\alpha)\Bigg)^2=\sum_{p\leqslant n_0,\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}F^2(p^\alpha)\sum_{m=1}^{n}\eta^{(p^\alpha)}\left(g(m)\right)+$$

$$+\sum_{\substack{p\leqslant n_0,\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}\\ q\leqslant n_0,\ q^\beta\leqslant\sqrt{n}\\ p\neq q}}F(p^\alpha)\,F(q^\beta)\sum_{m=1}^{n}\eta^{(p^\alpha)}\left(g(m)\right)\eta^{(q^\beta)}\left(g(m)\right)\ll$$

$$\ll B^2(n_0)\Bigg\{\sum_{p\leqslant n_0,\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}\alpha^{2k}\left(\frac{n}{p^\alpha}+1\right)+\sum_{\substack{p\leqslant n_0,\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}\\ q\leqslant n_0,\ q^\beta\leqslant\sqrt{n}\\ p\neq q}}\alpha^k\beta^k\left(\frac{n}{p^\alpha q^\beta}+1\right)\Bigg\}\ll$$

$$\ll n\Bigg\{1+\sum_{p^\alpha\leqslant\sqrt{n},\ \alpha>1}\frac{\alpha^{2k}}{p^\alpha}+\Bigg(1+\sum_{p^\alpha\leqslant\sqrt{n},\ \alpha>1}\frac{\alpha^k}{p^\alpha}\Bigg)^2\Bigg\}\ll n, \tag{3.3}$$

$$\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n},\ p^\alpha>\sqrt{n}\\ p^\alpha\,\|\,g(m)}}F(p^\alpha)\Bigg)^2\ll B^2(\sqrt{n})\Bigg\{\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n}\\ \sqrt{n}<p^\alpha\leqslant|g(n)|}}\alpha^{2k}\left(\frac{n}{p^\alpha}+1\right)+$$

$$+\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n},\ \sqrt{n}<p^\alpha\leqslant|g(n)|\\ q\leqslant\sqrt{n},\ \sqrt{n}<q^\beta\leqslant|g(n)|}}\alpha^k\beta^k\left(\frac{n}{p^\alpha q^\beta}+1\right)\Bigg\}\ll$$

$$\ll nB^2(\sqrt{n})\left\{\sum_{p^\alpha,\,\alpha>1}\frac{\alpha^{2k}}{p^\alpha}+\Big(\sum_{p^\alpha,\,\alpha>1}\frac{\alpha^k}{p^\alpha}\Big)^2\right\}+$$

$$+B^2(\sqrt{n})\Big(\sum_{p\leqslant\sqrt{n},\,p^\alpha\leqslant|g(n)|}\alpha^k\Big)^2\ll nB^2(\sqrt{n}). \qquad (3.4)$$

Далее, ввиду того, что для каждого m число простых чисел $p>\sqrt{n}$ при достаточно большом n, делящих $g(m)$, не больше $2v+1$, v — степень полинома $g(m)$, выводим, что

$$\sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{p>\sqrt{n},\,p^\alpha>\sqrt{n}\\ p^\alpha\,\|\,g(m)}}F(p^\alpha)\Big)^2\ll B^2\big(|g(n)|\big)\sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{p>\sqrt{n},\,p^\alpha>\sqrt{n}\\ p^\alpha\,\|\,g(m)}}\alpha^k\Big)^2\ll$$

$$\ll n(2v+1)^{2(k+1)}B^2\big(|g(n)|\big)\ll nB^2(n). \qquad (3.5)$$

Займемся в заключение оценкой первой суммы неравенства (3.1). Согласно лемме 4 имеем:

$$\sum_{m=1}^{n}F\big(|g(m)|\big)_{\sqrt{n}}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{p>n_0\\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}}F(p^\alpha)\,\eta^{(p^\alpha)}\big(g(m)\big)=nK(n)+O\Big(\sum_{p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}|F(p^\alpha)|\Big),$$

$$\sum_{m=1}^{n}F^2\big(|g(m)|\big)_{\sqrt{n}}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{p>n_0\\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}}\sum_{\substack{q>n_0\\ q^\beta\leqslant\sqrt{n}}}F(p^\alpha)F(q^\beta)\,\eta^{(p^\alpha)}\big(g(m)\big)\,\eta^{(q^\beta)}\big(g(m)\big)=$$

$$=n\left\{\sum_{\substack{p>n_0\\ p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}}F^2(p^\alpha)\,\rho(p^\alpha)+\sum_{\substack{p>n_0,\,p^\alpha\leqslant\sqrt{n}\\ q>n_0,\,q^\beta\leqslant\sqrt{n}\\ p\neq q}}F(p^\alpha)F(q^\beta)\,\rho(p^\alpha)\,\rho(q^\beta)\right\}+$$

$$+O\left\{\Big(\sum_{p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}|F(p^\alpha)|\Big)^2\right\}.$$

Так как

$$\Big|\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant\sqrt{n},\,p^\beta\leqslant\sqrt{n}\\ p=q}}F(p^\alpha)\,\xi F(q^\beta)\,\rho(p^\alpha)\,\rho(q^\beta)\Big|\ll\Big(\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant\sqrt{n},\,q^\beta\leqslant\sqrt{n}\\ p=q}}\frac{F^2(p^\alpha)}{p^\alpha q^\beta}\times$$

$$\times\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant\sqrt{n},\,q^\beta\leqslant\sqrt{n}\\ p=q}}\frac{F^2(q^\beta)}{p^\alpha q^\beta}\Big)^{\frac{1}{2}}\ll B^2(\sqrt{n})\sum_{\substack{p^\alpha\\ \alpha>1}}\frac{\alpha^{2k}}{p^\alpha}\ll B^2(n),$$

$$\sum_{p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}|F(p^\alpha)|\ll B(\sqrt{n})\sum_{p^\alpha\leqslant\sqrt{n}}\alpha^k\ll\frac{\sqrt{n}\,B(\sqrt{n})}{\ln n},$$

то

$$\sum_{m=1}^{n}F\big(|g(m)|\big)_{\sqrt{n}}=nK(n)+O\Big(\frac{\sqrt{n}\,B(\sqrt{n})}{\ln n}\Big),$$

$$\sum_{m=1}^{n}F^2\big(|g(m)|\big)_{\sqrt{n}}=nK^2(n)+O\big(nB^2(\sqrt{n})\big). \qquad (3.6)$$

Оценим ещё $K(n)$. Имеем:

$$|K(n)| \ll B(\sqrt{n})\left\{\sum_{p \leqslant \sqrt{n}} \frac{\vartheta(p)}{p} + \sum_{p^\alpha,\ \alpha>1} \frac{\alpha^k}{p^\alpha}\right\} \ll \ln\ln n B(\sqrt{n}),$$

откуда и из (3.6) вытекает, что

$$\sum_{m=1}^{n}\left(F\left(|g(m)|\right)_{\sqrt{n}} - K(n)\right)^2 \ll nB^2(\sqrt{n}). \tag{3.7}$$

Собирая теперь (3.7), (3.5), (3.4), (3.3), (3.2) и (3.1), находим $S \ll n$.

§ 4. Доказательство теоремы 2

В самом начале укажем способ, позволяющий свести изучение интегральных предельных законов для аддитивных арифметических функций к изучению предельных законов для сумм некоторых независимых случайных величин. С этой целью построим следующее поле вероятностей.

Пусть $n > n_1$, где n_1 достаточно большое число. Положим

$$r = r(n) = n^{\frac{1}{2\left[c_9 \ln \frac{1}{\mu_n}\right]}},$$

где $c_9 = 4\max(c_8^{(1)}, \ldots, c_8^{(s)})$ и $c_8^{(j)}$ $(j=1, \ldots, s)$ — постоянные, определенные в лемме 7 соответственно для $g_j(m)$. Так как

$$B_{jj}(n) = \sum_{p \leqslant n} \frac{F_j^2(p)\,\vartheta_j(p)}{p} \ll B_{jj}(n)\,\mu_n^2 \ln\ln n,$$

то

$$\mu_n \gg \frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}},$$

вследствие чего $r(n)$ удовлетворяет условиям лемм 6 и 7. Обозначим через q простые числа, подчинённые условиям $n_0 < q \leqslant r$, где n_0 — положительное число, определенное в лемме 6. Пусть $\mathfrak{N} = \{1, \ldots, n\}$; $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ — упорядоченная система чисел, которые все равны 0, либо одно равно α $(1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_q)$, а все остальные 0. Кроме того, пусть $\delta_q(m)$ равно $\alpha_q(m)$ при $\alpha_q(m) < \gamma_q$ и γ_q при $\alpha_q(m) \geqslant \gamma_q$. Далее, для любого q и любой возможной системы чисел $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ обозначим через $\mathfrak{M}_q(\delta_1, \ldots, \delta_s)$ множество тех $m \leqslant n$, для которых $\delta_q\left(g_j(m)\right) = \delta_j$ $(j=1, \ldots, s)$. Пусть $\mathfrak{F}$ — наименьшая алгебра множеств, содержащая все $\mathfrak{M}_q(\delta_1, \ldots, \delta_s)$. Тогда $\mathfrak{F}$ с функцией множества $\nu_n\{m \in \mathfrak{A}\}$ образует конечное поле вероятностей, по отношению к которому функции $\sum_{j=1}^{s} F_j^{(q)}\left(|g_j(m)|\right)$ являются случайными величинами.

Действительно, очевидно, сумма $\mathrm{U}\mathfrak{M}_q(\delta_1, \ldots, \delta_s)$ по всем $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ равна $\mathfrak{N}$ и для двух различных систем чисел $\{\delta_1', \ldots, \delta_s'\}$ и $\{\delta_1'', \ldots, \delta_s''\}$ множества $\mathfrak{M}_q(\delta_1', \ldots, \delta_s')$ и $\mathfrak{M}_q(\delta_1'', \ldots, \delta_s'')$ не пересекаются. Поэтому любое множество алгебры $\mathfrak{F}$ можно представить в виде суммы множеств типа

$$\mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s) = \bigcap_q \mathfrak{M}_q(\delta_1^{(q)}, \ldots, \delta_s^{(q)}),$$

где

$$k_j = \prod_q q^{\delta_j^{(q)}}, \qquad 0 \leqslant \delta_j^{(q)} \leqslant \gamma_q,$$

и, очевидно, k_j попарно взаимно просты.

Найдем теперь частоту $\nu_n\{\ldots\}$ для множества $\mathrm{U}'\mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s)$, штрих обозначает, что сумма берется по некоторым возможным системам $\{k_1, \ldots, k_s\}$. Заметим, что любые два множества $\mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s)$ не пересекаются. Поэтому

$$\nu_n\{m \in \mathrm{U}'\mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s)\} = \sum{}' \nu_n\{m \in \mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s)\}.$$

Если теперь $k_1 \ldots k_s \leqslant \sqrt[4]{n}$, то по лемме 6 имеем:

$$\nu_n\{m \in \mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s)\} = \prod_q \pi_q(k_1, \ldots, k_s)\left(1 + O(\mu_n^2)\right),$$

где

$$\pi_q(k_1, \ldots, k_s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\vartheta^*(q)}{q}, & \text{если } \alpha_q(k_1 \ldots k_s) = 0, \\ \dfrac{\vartheta_j(q)}{q^\alpha}\left(1 - \dfrac{1}{q}\right), & \text{если } \alpha_q(k_1 \ldots k_s) = \alpha_q(k_j) = \alpha, \quad 1 \leqslant \alpha < \gamma_q, \\ \dfrac{\vartheta_j(q)}{q^{\gamma_q}}, & \text{если } \alpha_q(k_1 \ldots k_s) = \alpha_q(k_j) = \gamma_q. \end{cases}$$

Отсюда и из оценки

$$\sum_{k_1 \ldots k_s \geqslant \sqrt[4]{n}} \nu_n\{m \in \mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s)\} \ll \mu_n^2,$$

справедливой в силу леммы 7, следует

$$\nu_n\{m \in \mathrm{U}'\mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s)\} = \sum_{k_1 \ldots k_s \leqslant \sqrt[4]{n}} \prod_q \pi_q(k_1, \ldots, k_s)\left(1 + O(\mu_n^2)\right) + O(\mu_n^2).$$

Так как выражение $\sum\limits_{k_1 \ldots k_s \geqslant \sqrt[4]{n}} \prod\limits_q \pi_q(k_1, \ldots, k_s)$ согласно лемме 6 представляет собой асимптотическую плотность множества натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $\delta_q\left(g_1(m)\right) = \delta_q(k_1), \ldots, \delta_q\left(g_s(m)\right) = \delta_q(k_s)$ для всех q и хотя бы одной системы $\{k_1, \ldots, k_s\}$ с $k_1 \ldots k_s \geqslant \sqrt[4]{n}$, то по лемме 7 оно равно $O(\mu_n^2)$. Итак, окончательно имеем:

$$\nu_n\{m \in \mathrm{U}'\mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s)\} = \sum{}' \prod_q \pi_q(k_1, \ldots, k_s) + O(\mu_n^2),$$

где оценка $O(\mu_n^2)$ равномерна для всех сумм $\mathrm{U}'\mathfrak{A}(k_1, \ldots, k_s)$. Наконец, очевидно, что сумма $\sum\limits_{k_1 \ldots k_s} \prod\limits_q \pi_q(k_1, \ldots, k_s)$ по всем возможным попарно взаимно простым $k_1, \ldots, k_s$ равна

$$\prod_q \left\{1 - \frac{\vartheta^*(q)}{q} + \frac{\vartheta^*(q)}{q}\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \ldots + \frac{\vartheta^*(q)}{q^{\gamma_q - 1}}\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{\vartheta^*(q)}{q^{\gamma_q}}\right\} = 1.$$

Теперь после произведенной выше подготовки зададим для всех множеств $\mathfrak{A}\in\mathfrak{F}$ новую вероятностную меру $P(\mathfrak{A})$ посредством равенств

$$P\left(\mathfrak{M}_q(\delta_1^{(q)}, \ldots, \delta_s^{(q)})\right)=\begin{cases} 1-\dfrac{\vartheta^*(q)}{q}, & \text{если все } \delta_1^{(q)}, \ldots, \delta_s^{(q)} \text{ равны } 0, \\ \pi^{(j)}(q^\alpha)\ (j=1, \ldots, s;\ 1\leqslant\alpha\leqslant\gamma_q), & \text{если } \delta_j^{(q)}=\alpha, \\ \text{а все остальные } \delta_j^{(q)} \text{ равны } 0, & \end{cases}$$

где

$$\pi^{(j)}(q^\alpha)=\begin{cases} 1-\dfrac{\vartheta_j(q)}{q}, & \text{если } \alpha=0, \\ \dfrac{\vartheta_j(q)}{q^\alpha}\left(1-\dfrac{1}{q}\right), & \text{если } 1\leqslant\alpha<\gamma_q, \\ \dfrac{\vartheta_j(q)}{q^{\gamma_q}}, & \text{если } \alpha=\gamma_q. \end{cases}$$

Очевидно, равномерно по всем $\mathfrak{A}\in\mathfrak{F}$

$$\nu_n\{m\in\mathfrak{A}\}-P(\mathfrak{A})=O(\mu_n^2).$$

Введем относительно новой меры P случайные величины $\xi_q=\xi_q(m)$, полагая, что

$$\xi_q(m)=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}F_j^{(q)}\left(|g_j(m)|\right).$$

Тогда случайная величина ξ_q принимает значения

$$0 \text{ с вероятностью } 1-\frac{\vartheta^*(q)}{q},$$

$$\frac{F_j(q^\alpha)}{a_j B_{jj}(n)} \quad (j=1, \ldots, s;\ 1\leqslant\alpha\leqslant\gamma_q) \text{ с вероятностью } \pi^{(j)}(q^\alpha).$$

Если при этом принять во внимание, что совместное распределение случайных величин ξ_q равно произведению по q одномерных случайных величин ξ_q, то функция распределения $\nu_r\left\{\sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{q}F^{(q)}\left(|g_j(m)|\right)<x\right\}$ лишь на величину $O(\mu_n^2)$ (оценка равномерна относительно x) отличается от функции распределения $F_n(x)$ суммы независимых случайных величин $\sum\limits_q\xi_q$.

Прямым вычислением находим, что среднее значение, дисперсия случайной величины $\sum\limits_q\xi_q$ и сумма третьих абсолютных центральных моментов случайных величин ξ_q соответственно равны:

$$M\sum_q\xi_q=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}\sum_{q^\alpha\leqslant r}F_j(q^\alpha)\pi^{(j)}(q^\alpha),$$

$$D\sum_q\xi_q=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}\sum_{p\leqslant r}\frac{F_j^2(p)\vartheta_j(p)}{p}+O(\mu_n^2),$$

$$\sum_q M|\xi_q-M\xi_q|^3\leqslant\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j^3 B_{jj}^3(n)}\sum_{j\leqslant r}\frac{|F_j(p)|^3\vartheta_j(p)}{p}+O(\mu_n^3).$$

Но так как

$$B_{jj}^2(n)-B_{jj}^2(r)=\sum_{r<p\leqslant n}\frac{F_j^2(p)\,\vartheta_j(p)}{p}\ll B_{jj}^2(n)\,\mu_n^2\ln\ln\frac{1}{\mu_n},$$

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j^2B_{jj}^2(n)}\sum_{p\leqslant r}\frac{F_j^2(p)\,\vartheta_j(p)}{p}=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j^2B_{jj}^2(n)}\left\{B_{jj}^2(n)-\left(B_{jj}^2(n)-B_{jj}^2(r)\right)\right\}=$$

$$=a(s)+O\left(\mu_n^2\ln\ln\frac{1}{\mu_n}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j^3B_j^3(n)}\sum_{p\leqslant r}\frac{|F_j(p)|^3\,\vartheta_j(p)}{p}<\mu_n\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j^2B_{jj}^2(n)}\sum_{p\leqslant n}\frac{F_j^2(p)\,\vartheta_j(p)}{p}\ll\mu_n,$$

то

$$D\sum_q\xi_q=a(s)+O\left(\mu_n^2\ln\ln\frac{1}{\mu_n}\right),\qquad \sum_q M\,|\xi_q-M\,\xi_q|^3\ll\mu_n.$$

Отсюда, воспользовавшись известной теоремой К. Г. Эссена (см. [10], стр. 43), получаем:

$$F_n\left(\sqrt{a(s)}\,x+\sqrt{a(s)}\,M\sum_q\xi_q\right)-G(x)\ll\mu_n,$$

причем оценка равномерна относительно x. Следовательно, равномерно по $n>n_1$ и x

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_jB_{jj}(n)}\left(\sum_q F_j^{(q)}\left(|g_j(m)|\right)-\sum_{q^\alpha\leqslant r}F_j(q^\alpha)\,\pi^{(j)}(q^\alpha)\right)<x\right\}-$$

$$-G(x)\ll\mu_n. \tag{4.1}$$

Очевидно, для завершения доказательства теоремы необходимо в (4.1) заменить

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_jB_{jj}(n)}\sum_q F_j^{(q)}\left(|g_j(m)|\right)\quad\text{на}\quad\sum_{j=1}^{s}\frac{F_j\left(|g_j(m)|\right)}{a_jB_{jj}(n)}$$

и

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_jB_{jj}(n)}\sum_{q^\alpha\leqslant r}F_j(q^\alpha)\,\pi^{(j)}(q^\alpha)\quad\text{на}\quad\sum_{j=1}^{s}\frac{A_{jj}(n)}{a_jB_{jj}(n)}.$$

Имеем:

$$\left|\sum_{q^\alpha\leqslant r}F_j(q^\alpha)\,\pi^{(j)}(q^\alpha)-A_{jj}\right|\leqslant\sum_{r<p\leqslant n}\frac{|F_j(p)|\,\vartheta_j(p)}{p}+O\left(\mu_nB_{jj}(n)\right)<$$

$$<c_{10}B_{jj}(n)\,\mu_n\ln\ln\frac{1}{\mu_n}\qquad(j=1,\ \ldots,\ s). \tag{4.2}$$

Далее, рассмотрим суммы

$$S_j=\sum_{m=1}^{n}\left(F_j\left(|g_j(m)|\right)-\sum_q F_j^{(q)}\left(|g_j(m)|\right)\right)^l\qquad(j=1,\ \ldots,\ s),$$

где $l=2\left[c_9\ln\frac{1}{\mu_n}\right]$. Замечая, что $n^{1/l}=r(n)$ вследствие элементарного неравенства $(a+b+c)^l\leqslant 3^l(|a|^l+|b|^l+|c|^l)$, выводим, что

$$S_j\leqslant 3^l\left\{\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant n_0\\ p^\alpha\leqslant n^{1/l}\\ p^\alpha\|g_j(m)}}|F_j(p^\alpha)|\Bigg)^l+\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant n^{1/l}\\ p^\alpha>n^{1/l}\\ p^\alpha\|g_j(m)}}|F_j(p^\alpha)|\Bigg)^l+\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{p>n^{1/l}\\ p^\alpha>n^{1/l}\\ p^\alpha\|g(m)}}|F_j(p^\alpha)|\Bigg)^l\right\}.$$

Оценим каждое слагаемое, обозначая их соответственно через $S_j^{(1)}$, $S_j^{(2)}$, $S_j^{(3)}$. Для краткости записи далее везде индекс j при $F_j(m)$, $g_j(m)$, $A_{jj}(n)$, $B_{jj}(n)$, S_j будем опускать. Кроме того, положим, что полином $g(m)$ степени v.

Оценим $S^{(1)}$. По формуле мультинома имеем:

$$S^{(1)} \leqslant \left(c_{11} B(n) \mu_n\right)^l \sum_{m=1}^{n} \Bigg(\sum_{p \leqslant n_0} \sum_{\alpha \geqslant 1}^{\left[\frac{\ln n}{l \ln p}\right]} \alpha^k \eta^{(p^\alpha)}\left(g(m)\right)\Bigg)^l = \left(c_{11} B(n) \mu_n\right)^l \sum_{m=1}^{n} \times$$

$$\times \sum_{l_1+\ldots+l_t=l} \frac{l!}{l_1!\ldots l_t!} \Bigg(\sum_{\alpha \geqslant 1}^{\left[\frac{\ln n}{l \ln p}\right]} \alpha^k \eta^{(p_1^\alpha)}\left(g(m)\right)\Bigg)^{l_1} \ldots \Bigg(\sum_{\alpha \geqslant 1}^{\left[\frac{\ln n}{l \ln p}\right]} \alpha^k \eta^{(p_t^\alpha)}\left(g(m)\right)\Bigg)^{l_t},$$

где p_t — наибольшее простое число, не провосходящее n_0. Так как $\eta^{(p^{\alpha_1})}\left(g(m)\right) \times \eta^{(p^{\alpha_2})}\left(g(m)\right) = 0$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то по лемме 4 и неравенству $\frac{n}{p_1^{\alpha_1}\ldots p_t^{\alpha_t}} \geqslant 1$ получаем:

$$S^{(1)} \leqslant \left(c_{11} B(n) \mu_n\right)^l \sum_{l_1+\ldots+l_t=l} \frac{l!}{l_1!\ldots l_t!} \sum_{\alpha_1 \geqslant 1}^{\left[\frac{\ln n}{l \ln p_1}\right]} \ldots \sum_{\alpha_t \geqslant 1}^{\left[\frac{\ln n}{l \ln p_t}\right]} \alpha_1^{kl_1} \ldots \alpha_t^{kl_t} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{n} \eta^{(p_1^{\alpha_1})}\left(g(m)\right) \ldots \eta^{(p_t^{\alpha_t})}\left(g(m)\right) \leqslant 2n \left(c_{11} B(n) \mu_n\right)^l (vD^2)^t \sum_{l_1+\ldots+l_t=l} \frac{l!}{l_1!\ldots l_t!} \times$$

$$\times \sum_{\alpha \geqslant 1} \frac{\alpha^{kl_1}}{p^\alpha} \ldots \sum_{\alpha \geqslant 1} \frac{\alpha^{kl_t}}{p^\alpha}.$$

Далее, вследствие оценки $\sum_{\alpha \geqslant 1} \frac{\alpha^{l_u}}{p^\alpha} < (2l_u)^{l_u}$ $(u=1, \ldots, t)$, окончательно следует, что

$$S^{(1)} \leqslant 2n \left(c_{12} B(n) \mu_n\right)^l (vD^2)^t \sum_{l_1+\ldots+l_t=l} \frac{l!}{l_1!\ldots l_t!} l_1^{kl_1} \ldots l_t^{kl_t} <$$

$$< 2n (vD^2)^{n_0} \left(c_{12} l^k t B(n) \mu_n\right)^l < n \left(c_{13} B(n) \mu_n \ln^k \frac{1}{\mu_n}\right)^l. \qquad (4.3)$$

Теперь обратимся к $S^{(2)}$. Как и при оценке $S^{(1)}$, согласно формуле мультинома

$$S^{(2)} \leqslant \left(c_{14} B(n) \mu_n\right)^l \sum_{u=1}^{l} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_u=l \\ l_1 \geqslant \ldots \geqslant l_u \geqslant 1}} \frac{l!}{l_1!\ldots l_u!} \sum_{p_1,\ldots,p_u}{}' \times$$

$$\times \sum_{\alpha_1=\left[\frac{\ln n}{l \ln p_1}\right]+1}^{\left[\frac{\ln |g(n)|}{l \ln p_1}\right]} \ldots \sum_{\alpha_u=\left[\frac{\ln n}{l \ln p_u}\right]+1}^{\left[\frac{\ln g(n)|}{l \ln p_u}\right]} \alpha_1^{kl_1} \ldots \alpha_u^{kl_u} \sum_{m=1}^{n} \eta^{(p_1^{\alpha_1})}\left(g(m)\right) \ldots \eta^{(p_u^{\alpha_u})}\left(g(m)\right),$$

где штрих указывает, что простые $p_1, \ldots, p_t$ являются различными, каждый из которых не больше $n^{1/l}$, и что суммирование ведётся по всем возможным перестановкам $p_1, \ldots, p_t$. Обращаясь к лемме 4, выводим:

$$S^{(2)} \leqslant n \left(c_{15} B(n) \mu_n\right)^l \sum_{u=1}^{l} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_u=l \\ l_1 \geqslant \ldots \geqslant l_u \geqslant 1}} \frac{l!}{l_1!\ldots l_u!} \times$$

$$\times \sum_{\substack{\alpha > \frac{\ln n}{l \ln p} \\ p \leqslant n^{1/l}}} \frac{\alpha^{kl_1}}{p^\alpha} \ldots \sum_{\substack{\alpha > \frac{\ln n}{l \ln p} \\ p \leqslant n^{1/l}}} \frac{\alpha^{kl_u}}{p^\alpha} + \left(c_{16} B(n) \mu_n\right)^l \Bigg(\sum_{\substack{p \leqslant n^{1/l} \\ p^\alpha \leqslant |g(n)|}} \alpha^k \Bigg)^l. \qquad (4.4)$$

Частным суммированием находим, что

$$\sum_{\alpha>\frac{\ln n}{l\ln p}}\frac{\alpha^{l_t}}{p^\alpha}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{1}{l}}}\left\{\left(\frac{\ln n}{l\ln p}\right)^{l_t+1}+\frac{2l_t}{\ln p}\left(\frac{\ln n}{l\ln p}\right)^{l_t}\left(1+\frac{ll_t}{\ln n}+\ldots+\left(\frac{ll_t}{\ln n}\right)^{l_t}\right)+\frac{l_t^{l_t}}{(\ln p)^{l_t+1}}\right\}.$$

Так как $\frac{ll_t}{\ln n}<\frac{kl^2}{\ln n}<\frac{1}{2}$, то

$$\sum_{\alpha>\frac{\ln n}{l\ln n}}\frac{\alpha^{l_t}}{p^\alpha}<\frac{4}{n^{1/l}}\left(\frac{\ln n}{l\ln p}\right)^{l_t+1},$$

откуда при $l_t+1\leqslant\ln\ln\ln n$

$$\sum_{p\leqslant n^{1/l},\ \alpha>\frac{\ln n}{l\ln p}}\frac{\alpha^{l_t}}{p^\alpha}\leqslant\frac{1}{n^{1/l}}\left(\frac{\ln n}{l}\right)^{l_t+1}\sum_{p\leqslant n^{1/l}}\frac{1}{\ln^{l_t+1}p}\leqslant\frac{l^{l_t+3}\ln^{l_t+1}n}{(l\ln n)^{l_t+3}}<1. \tag{4.5}$$

Далее,

$$\sum_{\substack{p\leqslant n^{1/l}\\ p^\alpha<|g(n)|}}\alpha^k<\ln^{k+1}|g(n)|\sum_{p\leqslant n^{1/l}}\frac{1}{\ln^{k+1}p}\leqslant\frac{n^{1/l}\ln^{k+1}|g(n)|\,l^{k+1}}{(\ln n)^{k+2}}\leqslant n^{1/l}. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.5) и (4.6) в (4.4), получаем:

$$S^{(2)}<n\left(c_{17}B(n)\mu_n\ln\frac{1}{\mu_n}\right)^l. \tag{4.7}$$

Остается оценить последнюю сумму. Имеем:

$$S^{(3)}\leqslant\left(c_{18}B\left(|g(n)|\right)\mu_{|g(n)|}\right)^l\sum_{m=1}^{n}\Bigl(\sum_{\substack{p>n^{1/l},\ p^\alpha>n^{1/l}\\ p^\alpha\| g(m)}}\alpha^k\Bigr)^l.$$

Пусть $\sum\limits_{\substack{p>n^{1/l},\ p^\alpha>n^{1/l}\\ p^\alpha\| g(m)}}\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_k$, тогда $p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}\leqslant|g(n)|<c_0n^v$. Отсюда $n^{1/l(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)}\leqslant c_0n^v$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_k<2lv$. Таким образом,

$$S^{(3)}\leqslant n\left(c_{19}B\left(|g(n)|\right)\mu_{|g(n)|}\ln^k\frac{1}{\mu_n}\right)^l.$$

Но

$$\mu_{|g(n)|}\leqslant\mu_n,\qquad B^2\left(|g(n)|\right)\ll B^2(n)+\mu^2_{|g(n)|}B^2\left(|g(n)|\right),$$

следовательно,

$$S^{(3)}<n\left(c_{20}B(n)\mu_n\ln^k\frac{1}{\mu_n}\right)^l. \tag{4.8}$$

Собирая оценки (4.3), (4.7) и (4.8) и подставляя в неравенство для S_j, находим, что

$$S_j<n\left(c_{21}B(n)\mu_n\ln^k\frac{1}{\mu_n}\right)^l\qquad(j=1,\ \ldots,\ s). \tag{4.9}$$

Благодаря оценке (4.9), выводим, что при $\varkappa=3c_{21}B(n)\mu_n\ln^k\frac{1}{\mu_n}$ имеет место оценка

$$\nu_n\left\{\left|F\left(|g(m)|\right)-\sum_q F^{(q)}\left(|g(m)|\right)\right|>\varkappa\right\}\ll 3^{-l}\ll\mu_n^2. \tag{4.10}$$

Из (4.2) и (4.10) легко получаем:

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}\left(\sum_q F_j^{(q)}\left(|g_j(m)|\right)-\sum_{q^\alpha\leqslant r}F_j(q^\alpha)\pi^{(j)}(q^\alpha)\right)<x-\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}\left(F_j\left(|g_j(m)|\right)-A_{jj}\right)<x\right\}+O(\mu_n^2)\leqslant$$

$$\leqslant\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}\left(\sum_q F_j^{(q)}\left(|g_j(m)|\right)-\sum_{q^\alpha\leqslant r}F_j(q^\alpha)\pi^{(j)}(q^\alpha)\right)<x+\varepsilon\right\},$$

где

$$\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j}\left(3c_{21}\mu_n\ln^k\frac{1}{\mu_n}+c_{10}\mu_n\ln\ln\frac{1}{\mu_n}\right)=o(1).$$

При $|x|<\mu_n^{-\frac{1}{2}}$ имеем:

$$|G(x\pm\varepsilon)-G(x)|=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x+\Theta\varepsilon)^2\right\}\ll\varepsilon\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}\qquad\left(|\Theta|\leqslant 1\right).$$

Тогда вследствие оценки (4.1) находим, что

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}\left(F_j\left(|g_j(m)|\right)-A_{jj}\right)<x\right\}=$$

$$=G(x)+O\left(\varepsilon e^{-\frac{1}{2}x^2}+\mu_n^2+\mu_n\right)=G(x)+O\left(\mu_n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\ln^k\frac{1}{\mu_n}+1_n\right)\right).$$

Теорема доказана для $|x|\geqslant\mu_n^{-\frac{1}{2}}$.

Наконец, рассмотрим случай $|x|<\mu_n^{-\frac{1}{2}}$. Как и в доказательстве теоремы 1 показываем, что

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{s}\frac{F_j\left(|g_j(m)|\right)-A_{jj}(n)}{\sqrt{a(s)}\,a_j B_{jj}(n)}\right\}^2\ll n,$$

откуда

$$\nu_n\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}\left(F_j\left(|g_j(m)|\right)-A_{jj}\right)\right|\geqslant|x|\right\}\ll\frac{1}{x^2}\leqslant\mu_n$$

и, следовательно,

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}\left(F_j\left(|g_j(m)|\right)-A_{jj}\right)<-|x|\right\}\ll\mu_n,$$

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j B_{jj}(n)}\left(F_j\left(|g_j(m)|\right)-A_{jj}\right)<|x|\right\}=1+O(\mu_n).$$

Так как

$$G(-|x|)=1-G(|x|)\ll\frac{1}{|x|}e^{-\frac{x^2}{2}}\leqslant\sqrt{\mu_n}\,e^{-\frac{1}{2\mu_n}}\ll\mu_n,$$

то теорема доказана и в том случае.

§ 5. Доказательство теоремы 3

В начале определим функцию, удовлетворяющую условиям:

$$\ln^3 r(n) \geqslant \ln^2 n, \quad \frac{\ln r(n)}{\ln n} \to 0, \quad \frac{B_{j1}\left(r(n)\right)}{B_{j1}(n)} \to 1 \qquad (j=1, \ldots, s), \tag{5.1}$$

при $n \to \infty$. Пусть $\Lambda_{j1}(n) = \max\limits_{p \leqslant n} |F_j(p)|$. Беря

$$r_j = r_j(n) = \exp\left\{ \frac{\Lambda_{j1}(n)}{B_{j1}(n)} \ln n \right\} \qquad (j=1, \ldots, s),$$

согласно лемме 5 имеем:

$$B_{j1}^2(n) - B_{j1}^2\left(r_j(n)\right) = \sum_{r_j < p \leqslant n} \frac{F_j^2(p)\,\vartheta_1(p)}{p} \ll \Lambda_{j1}^2(n) \ln \frac{\ln n}{\ln r_j},$$

откуда

$$B_{j1}(n) - B_{j1}(r_j) \ll B_{j1} \frac{\Lambda_{j1}^2(n)}{B_{j1}^2(n)} \ln \frac{B_{j1}(n)}{\Lambda_{j1}(n)} = o\left(B_{j1}(n)\right).$$

Положим $r = r(n) = \max\left(n^{\frac{1}{\ln^{1/3} n}}, r_1(n), \ldots, r_s(n)\right)$. Тогда, очевидно, функция $r(n)$ удовлетворяет условиям (5.1).

Пусть, далее, q обозначает те же простые числа, что и в предыдущем доказательстве. Кроме того, пусть

$$L_n^{(1)}(q^\alpha) = \left(\frac{F_1(q^\alpha)}{B_{11}(n)}, \ldots, \frac{F_s(q^\alpha)}{B_{s1}(n)} \right) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots).$$

Проведя аналогичную теоретико-вероятностную интерпретацию „урезанных" а. а. функций как в § 4 в случае одного полинома $g_1(m)$, получаем, что совместная функция распределения

$$\nu_n \left\{ \frac{F_1\left(|g_1(m)|\right)_r - A_{11}(r)}{B_{11}(n)} < x_1, \ldots, \frac{F_s\left(|g_1(m)|\right)_r - A_{s1}(n)}{B_{s1}(n)} < x_s \right\} \tag{5.2}$$

лишь на величину $o(1)$, где оценка равномерна по $x_1, \ldots, x_s$, отличается от функции распределения суммы независимых случайных векторов

$$\sum_q \left(\Xi_{ng} - \sum_{\alpha=0}^{\gamma_q} L_n^{(1)}(q^\alpha)\, \pi^{(1)}(q^\alpha) \right), \tag{5.3}$$

где Ξ_{nq} принимает значения $L_n^{(1)}(q^\alpha)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \gamma_q)$ с вероятностями $\pi^{(1)}(q^\alpha)$.

Характеристическая функция $\varphi_n(T)$ суммы (5.3) равна

$$\varphi_n(T) = \prod_q \sum_{\alpha=0}^{\gamma_q} \exp\left\{ iT\left(L_n^{(1)}(q^\alpha) - \sum_{\alpha=0}^{\gamma_q} L_n^{(1)}(q^\alpha)\, \pi^{(1)}(q^\alpha) \right) \right\} \pi^{(1)}(q^\alpha).$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие элементарные неравенства:

$$\left| \exp\left\{ iT\left(L_n^{(1)}(q^\alpha) - \sum_{\alpha=0}^{\gamma_q} L_n^{(1)}(q^\alpha)\, \pi^{(1)}(q^\alpha) \right) \right\} - 1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant |T| \left(|L_n^{(1)}(q^\alpha)| + \sum_{\alpha=0}^{\gamma_q} |L_n^{(1)}(q^\alpha)|\, \pi^{(1)}(q^\alpha) \right), \tag{5.4}$$

$$\Big|\exp\Big\{iT\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-\sum_{\alpha\times 0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)\Big\}-1-iT\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-$$
$$-\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)+\frac{1}{2}\Big(T\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)\Big)^2\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4}{3}|T|^3\Big\{|L_n^{(1)}(q^\alpha)|^3+\Big(\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}|L_n^{(1)}(q^\alpha)|\,\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)^3\Big\}. \tag{5.5}$$

Теперь докажем, что

$$h_n=\max_q\Big|\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}\Big(\exp\Big\{iT\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)\Big\}-1\Big)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big|$$

стремится к нулю при неограниченном возрастании n равномерно относительно $|T|<t$ для всякого фиксированного $t>0$. Откуда будет следовать бесконечная малость слагаемых векторов суммы (5.3).

Действительно, согласно (5.4)

$$h_n\leqslant 2|T|\max_q\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}|L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)|=o\Big(\sum_{\alpha\geqslant 1}\frac{\alpha^k}{q^\alpha}\Big)=o(1).$$

Тогда равномерно по $|T|<t$

$$\ln\varphi_n(T)-\sum_q\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}\Big(\exp\Big\{iT\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)\Big\}-1\Big)\pi^{(1)}(q^\alpha)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_q\Big(\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}\Big|T\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)\Big|\,\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)^2\leqslant$$
$$\leqslant 4|T|^2\sum_q\Big(\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}|L_n^{(1)}(q^\alpha)|\,\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)^2=o\Big(\sum_q\Big(\sum_{\alpha\geqslant 1}\frac{\alpha^k}{q^\alpha}\Big)^2\Big)=o(1).$$

Следовательно,

$$\ln\varphi_n(T)=\sum_q\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}\Big(\exp\Big\{iT\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)\Big\}-1-$$
$$-iT\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)\Big)\pi^{(1)}(q^\alpha)+o(1)\qquad(|T|<t), \tag{5.6}$$

так как $\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)\pi^{(1)}(q^\alpha)=0$. Из (5.6) теперь, применяя неравенство (5.5), выходим:

$$\Big|\ln\varphi_n(T)+\frac{1}{2}\sum_q\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}\Big(T\Big(L_n^{(1)}(q^\alpha)-\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}L_n^{(1)}(q^\alpha)\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)\Big)^2\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4}{3}|T|^3\sum_q\Big\{\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}|L_n^{(1)}(q^\alpha)|^3\pi^{(1)}(q^\alpha)+\Big(\sum_{\alpha=0}^{\Upsilon_q}|L_n^{(1)}(q^\alpha)|\,\pi^{(1)}(q^\alpha)\Big)^3\Big\}+o(1)=$$
$$=o\Big(1+\sum_p\sum_{\alpha>1}\frac{\alpha^{2k}}{p^\alpha}+\sum_p\Big(\sum_{\alpha\geqslant 1}\frac{\alpha^k}{p^\alpha}\Big)^3\Big)=o(1).$$

Таким образом,

$$\ln \varphi_n(T) = -\frac{1}{2}\sum_q \sum_{\alpha=0}^{\gamma_q}\Bigl(T\Bigl(L_n^{(1)}(q^\alpha) - \sum_{\alpha=0}^{\gamma_q} L_n^{(1)}(q^\alpha)\,\pi^{(1)}(q^\alpha)\Bigr)\Bigr)^2 \pi^{(1)}(q^\alpha) + o(1)\ (|T| < t).$$

С другой стороны,

$$\Bigl|\sum_q \sum_{\alpha=0}^{\gamma_q}\Bigl(T\Bigl(L_n^{(1)}(q^\alpha) - \sum_{\alpha=0}^{\gamma_q} L_n^{(1)}(q^\alpha)\,\pi^{(1)}(q^\alpha)\Bigr)\Bigr)^2 \pi^{(1)}(q^\alpha) - \sum_{p\le n}\Bigl(TL_n^{(1)}(p)\Bigr)^2\frac{\vartheta_1(p)}{p}\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_q \Bigl(\sum_{\alpha=0}^{\gamma_q} TL_n^{(1)}(q^\alpha)\,\pi^{(1)}(q^\alpha)\Bigr)^2 + |T|^2\Bigl\{\sum_{p\le n_0}|L_n^{(1)}(p)|^2\frac{\vartheta_1(p)}{p} +$$

$$+\sum_{r<p\le n}|L_n^{(1)}(p)|^2\frac{\vartheta_1(p)}{p} + \sum_q |L_n^{(1)}(q)|^2\frac{\vartheta_1(p)}{q^2} + \sum_q\sum_{\alpha=2}^{\gamma_q}|L_n^{(1)}(q^\alpha)|^2\frac{\vartheta_1(p)}{q^\alpha}\Bigr\} =$$

$$= o\Bigl(1 + \sum_p\Bigl(\sum_{\alpha\ge 1}\frac{\alpha^k}{p^\alpha}\Bigr)^2 + \sum_q\frac{1}{q^2} + \sum_q\sum_{\alpha>1}\frac{\alpha^k}{q^\alpha}\Bigr) = o(1).$$

Следовательно,

$$\ln \varphi_n(T) = -\frac{1}{2}\sum_{p\le n}\Bigl(TL_n^{(1)}(p)\Bigr)^2\frac{\vartheta_1(p)}{p} + o(1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\frac{t_i t_j}{B_{i1}(n)B_{j1}(n)}\sum_{p\le n}\frac{F_i(p)F_j(p)\vartheta_1(p)}{p} + o(1) \qquad (|T| < t).$$

Отсюда и из (1.4) на основании теоремы (см. [11], стр. 237), устанавливающей взаимно однозначное и непрерывное соответствие между s-мерными функциями распределения и их характеристическими функциями, заключаем, что законы распределения сумм (5.3) сходятся к нормальному закону (1.3). Из всего сказанного выше тогда следует, что и совместные функции распределения (5.2) при $n\to\infty$ также сходятся к нормальному закону (1.3).

Теперь осуществим переход от „урезанных" функций $F_j\bigl(|g_1(m)|\bigr)_r$ к функциям $F_j\bigl(|g_1(m)|\bigr)$, определенным в теореме. Для этой цели оценим суммы

$$S_j = \sum_{m=1}^{n}\Bigl\{\Bigl(F_j\bigl(|g_1(m)|\bigr) - A_{j1}(n)\Bigr) - \Bigl(F_j\bigl(|g_1(m)|\bigr)_r - A_{j1}(r)\Bigr)\Bigr\}^2 \quad (j=1,\ \ldots,\ s).$$

Поступая совершенно так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем:

$$S_j = nB_{j1}^2(n)\,\delta_{j1}^2(n) \qquad (j=1,\ \ldots,\ s), \tag{5.7}$$

где $\delta_{j1}(n) = o(1)$. Тогда непосредственно из (5.7) для любого $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$\nu_n\Bigl\{\Bigl|\Bigl(F_j\bigl(|g_1(m)|\bigr) - A_{j1}(n)\Bigr) - \Bigl(F_j\bigl(|g_1(m)|\bigr)_r - A_{j1}(r)\Bigr)\Bigr| \ge \varepsilon B_{j1}(n)\Bigr\} \leqslant \frac{\delta_{j1}^2(n)}{\varepsilon^2}.$$

Отсюда, если обозначим для краткости (1.5) через $\Phi_n(x_1, \ldots, x_s)$, а (5.2) через $\Phi_n^{(r)}(x_1, \ldots, x_s)$, следует, что

$$\Phi_n^{(r)}(x_1-\varepsilon, \ldots, x_s-\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{s}\delta_{jl}^2(n)\leqslant\Phi_n(x_1, \ldots, x_s)\leqslant$$

$$\leqslant\Phi_n^{(r)}(x_1+\varepsilon, \ldots, x_s+\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{s}\delta_{jl}^2(n).$$

Поэтому, если предельный закон $G(x_1, \ldots, x_s)$ для (5.2) существует и равен нормальному закону (1.3), то

$$G(x_1-\varepsilon, \ldots, x_s-\varepsilon)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\Phi_n(x_1, \ldots, x_s)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\Phi_n(x_1, \ldots, x_s)\leqslant$$

$$\leqslant G(\alpha_1+\varepsilon, \ldots, x_s+\varepsilon).$$

Следовательно, во всех точках $(x_1, \ldots, x_s)$ распределения $G(x_1, \ldots, x_s)$

$$\Phi_n(x_1, \ldots, x_s)\to G(x_1, \ldots, x_s),$$

при $n\to\infty$. Совершенно аналогично из существования предельного распределения для (1.5) следует существование предельного распределения для (5.2) и совпадение обоих распределений.

Теорема доказана.

§ 6. Примеры

В качестве примеров рассмотрим следущие арифметические функции:

$\omega(m)$ — количество различных простых делителей числа m;

$\Omega(m)$ — количество простых делителей числа m, причем каждый из них считается столько раз, какова его кратность;

$\tau_k(m)$ — количество представлений числа m в виде произведений k множителей, причем порядок множителей учитывается;

$\lambda(m)=\sum_{p\backslash m}\ln\ln p.$

Пусть $g(m)=g_1^{\alpha_1}(m)\ldots g_s^{\alpha_s}(m)$, $h(m)=h_1^{\beta_1}(m)\ldots h_s^{\beta_s}(m)$ — целочисленные полиномы, где $g_1(m), \ldots, g_s(m)$ и, соответственно, $h_1(m), \ldots, h_s(m)$ — различные неприводимые примитивные полиномы. Далее, пусть $\Psi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. В силу леммы 1 для функций $\omega(m)$, $\Omega(m)$, $\log_k\tau_k(m)$ имеем:

$$\omega\left(|g(m)|\right)=\sum_{i=1}^{s}\omega\left(|g_i(m)|\right)+O(1),\quad \Omega\left(|g(m)|\right)=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\Omega\left(|g_i(m)|\right)+O(1),$$

$$\log_k\tau_k\left(|g_1(m)\ldots g_s(m)|\right)=\sum_{i=1}^{s}\log_k\tau_k\left(|g_i(m)|\right)+O(1). \tag{6.1}$$

Далее, из леммы 5 следует, что при любом неприводимом полиноме для функций $\omega(m)$, $\Omega(m)$

$$A(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{\vartheta(p)}{p}=\ln\ln n+O(1),\quad B^2(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{\vartheta(p)}{p}\sim\ln\ln n,$$

для функции

$$\log_k\tau_k(m)\qquad\left(\tau_k(p^\alpha)=\binom{k+\alpha-1}{k-1}\right)$$

$$A(n)=\sum_{p\leq n}\frac{\log_k \tau_k(p)\vartheta(p)}{p}=\sum_{p\leq n}\frac{\vartheta(p)}{p}=\ln\ln n+O(1),$$

$$B^2(n)\sim\ln\ln n,$$

и для функции $\lambda(m)$ ещё частным суммированием получаем

$$A(n)=\sum_{p\leq n}\frac{\ln\ln p\,\vartheta(p)}{p}\sim\frac{1}{2}\ln^2\ln n,\quad B^2(n)=\sum_{p\leq n}\frac{\ln^2\ln p\,\vartheta(p)}{p}\sim\frac{1}{3}\ln^3\ln n.$$

Из (6.1) и теоремы 1 следует, что при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{\left|\omega\left(|g(m)|\right)-s\ln\ln n\right|<\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{\left|\Omega\left(|g(m)|\right)-\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\ln\ln n\right|<\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{k^{s\ln\ln n-\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}<\tau_k\left(|g_1(m)\ldots g_s(m)|\right)<k^{s\ln\ln n+\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}\right\}\to 1.$$

Точно так же следует, что при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{\left|\omega\left(|g(m)|\right)-\omega\left(|h(m)|\right)\right|<\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{\left|\Omega\left(|g(m)|\right)-\Omega\left(|h(m)|\right)-\sum_{i=1}^{s}(\alpha_i-\beta_i)\ln\ln n\right|<\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{\left|k^{-\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}\tau_k\left(|g_1(m)\ldots g_s(m)|\right)<\tau_k\left(|h_1(m)\ldots h_s(m)|\right)<\right.\right.$$
$$\left.<k^{\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}\tau_k\left(|g_1(m)\ldots g_s(m)|\right)\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{k^{2s\ln\ln n-\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}<\tau_k\left(|g_1(m)\ldots g_s(m)|\right)\tau_k\left(|h_1(m)\ldots h_s(m)|\right)<\right.$$
$$\left.<k^{2s\ln\ln n+\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{k^{\omega\left(|g(m)|\right)-\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}<\tau_k\left(|g_1(m)\ldots g_s(m)|\right)<k^{\omega\left(|g(m)|\right)+\Psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}\right\}\to 1.$$

Далее, из (6.1) и теоремы 2 выводим:

$$\nu_n\left\{\frac{\omega\left(|g(m)|\right)-s\ln\ln n}{\sqrt{s\ln\ln n}}<x\right\}=G(x)+O\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\ln\ln\ln n+1\right)\right\},$$

$$\nu_n\left\{\frac{\Omega\left(|g(m)|\right)-\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\ln\ln n}{\sqrt{\sum_{j=1}^{s}\alpha_j^2\ln\ln n}}<x\right\}=G(x)+O\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\ln\ln\ln n+1\right)\right\},$$

$$\nu_n\left\{\tau_k\left(|g_1(m)|\ldots g_s(m)|\right)<k^{s\ln\ln n+x\sqrt{s\ln\ln n}}\right\}=$$
$$=G(x)+O\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\ln\ln\ln n+1\right)\right\}.$$

В заключение из теоремы 3 получаем, что при $n \to \infty$

$$\nu_n \left\{ \frac{\Omega\left(|g_1(m)\ldots g_s(m)|\right) - s \ln\ln n}{\sqrt{s \ln\ln n}} < x_1, \quad \frac{\lambda\left(|g_1(m)\ldots g_s(m)|\right) - \frac{s}{2}\ln^2 \ln n}{\sqrt{\frac{s \ln^3 \ln n}{3}}} < x_2 \right\} \to$$

$$\to \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \exp\left\{ -2\left(u^2 + v^2 + \sqrt{3}\, uv\right) \right\} du\, dv.$$

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Поступила в редакцию
22.VI.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Уждавинис. О распределении значений аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов. Тр. АН Лит. ССР, сер. Б, 1959, № 2 (18), 9—29.
2. Р. Уждавинис. О совместном распределении значений аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов. Тр. АН Лит. ССР. Б, 1960, № 1, (21), 5—29.
3. Р. Уждавинис. Некоторые предельные теоремы для аддитивных арифметрических функций. Лит. матем. сб., 1961, **1**, № 1—2, 355—364.
4. M. Tanaka. On the number of prime faktors of integers I. Japan. J. Math., 1955, **25**, 1—20.
5. T. Nagel. Généralisation d'un théorème de Tschebycheff. J. de Math., 1921, **4**, 343—356.
6. P. Erdös. On the sum $\sum_{k=1}^{x} d\left(f(k)\right)$. J. London Math. Soc., 1952, **27**, 7—15.
7. А. Бухштаб. Об асимптотической оценке числа чисел арифметической прогрессии, не делящихся на „относительно" малые простые числа. Матем. сб., 1951, **28**, 165—184.
8. А. Бухштаб. Об одном аддитивном представлении целых чисел. Уч. зап. Московск. гос. пед. ин-та, 1953, **71**, 45—62.
9. М. Барбан. Об одной теореме И. П. Кубилюса. Изв. АН УзССР, сер. матем., 1961, № 5, 3—9.
10. C. G. Essen. Fourier analysis of distribution functions. Acta math., **77**, 1—125.
11. Б. Гнеденко. Элементы теории функций распределения случайных векторов. Успехи матем. наук, 1944, вып. 10, 230—244.

ARITMETINĖS FUNKCIJOS POLINOMŲ SU SVEIKAIS KOEFICIENTAIS REIKŠMIŲ AIBĖSE

R. UŽDAVINYS

(Reziumė)

Funkcija $F(m)$, definuota natūrinių skaičių aibėje, yra vadinama adityvine, jei kiekvienai reliatyviai pirminių skaičių porai m, n

$$F(mn) = F(m) + F(n).$$

Straipsnyje, naudojantis A. Buchštabo rėčio metodu ir kai kuriomis nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumavimo teorijos ribinėmis teoremomis, yra įrodoma keletas ribinių teoremų funkcijų $F(m)$, kurių argumentai polinomai su sveikais koeficientais, reikšmių pasiskirstymo klausimu.

ARITHMETISCHE FUNKTIONEN IN MENGEN DER WERTE VON POLYNOME MIT GANZZAHLIGEN KOEFFICIENTEN

R. USHDAWINIS

(Zusammenfassung)

Eine additive Funktion $F(m)$ ist durch die Eigenschaft

$$F(mn)=F(m)+F(n), \qquad (m, n)=1,$$

definiert.

Mit Hilfe der Buchstabschen Siebmethode und der Theorie der Summierung der unabhängigen Zufallsgrossen werden einige Grenzwertsätze über die Verteilung der Werte von Funktionen $F(m)$, deren Argumente die Polynome mit ganzzahligen Koefficienten sind, abgeleitet.