II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ

П. СУРВИЛА

1. Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_k, \ k=1, \ 2, \ \ldots \tag{1}$$

с функциями распределения $F_k(x)$, характеристическими функциями $f_k(t)$, нулевыми математическими средними $M\xi_k=0$ и конечными абсолютными моментами $\beta_{\nu k}<\infty$ до s-ого порядка включительно $(s\geqslant 3)$. В дальнейшем такую последовательность будем обозначать (1).

Пусть дисперсия суммы $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\neq 0.$$

Положим

$$\bar{S}_n=\frac{S_n}{B_n}, \ \bar{F}_n(x)=P\{\bar{S}_n<x\},$$

$$\bar{f}_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,d\bar{F}_n(x), \ \bar{p}_n(x)=\bar{F}_n'(x),$$

если $\bar{F}_n'(x)$ существует,

$$\alpha_{\nu k}=M\xi_k^{\nu}, \ \varkappa_{\nu k}=\frac{1}{i^{\nu}}\ln^{(\nu)}f_k(t)\Big|_{t=0},$$

$$B_{\nu n}=\sum_{k=1}^{n}\beta_{\nu k}, \ L_{\nu n}=\frac{B_{\nu n}}{B_n^{\nu}}$$

для $\nu=3, \ \ldots, \ s$ и

$$T_{sn}=L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}.$$

(В случае одинаково распределенных случайных величин $\sigma_k^2=\sigma^2$, $f_k(t)=f(t)$, а второй индекс при $\alpha_{\nu k}$, $\beta_{\nu k}$ и $\chi_{\nu k}$ будем пропускать.)

2. Сходимость плотностей нормированных сумм $\bar{p}_n(x)$ к плотности нормального закона распределения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

изучалась рядом авторов. Для случая одинаково распределенных слагаемых Б. В. Гнеденко [2] получены необходимые и достаточные условия для сходимости $\bar{p}_n(x)$ к $\varphi(x)$ в каждой точке, а Ю. В. Прохоровым [8] — необходимые и достаточные условия для сходимости вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\bar{p}_n(x) - \varphi(x)\right| dx \to 0, \text{ при } n \to \infty. \tag{2}$$

С. Х. Сираждинов [9] оценил скорость сходимости (2) при $\beta_3 < \infty$ и некоторых дополнительных условиях. В известной монографии Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1] получено также асимптотическое разложение для $\bar{p}_n(x)$ по степеням $n^{-\frac{1}{2}}$. В. В. Петров [4] — [7] получил несколько теорем о сходимости $\bar{p}_n(x)$ к $\varphi(x)$ и о сходимости вида (2), а также асимптотическое разложение для $\bar{p}_n(x)$ в случае неодинаково распределенных слагаемых.

Как в монографии (1), так и в работах В. В. Петрова [4] и [5] остаточный член асимптотического разложения для $\bar{p}_n(x)$ оценивается только по отношению к числу слагаемых n. Для таких оценок используется асимптотическое разложение для $\bar{f}_n(t)$, которое имеется в [3], [5] и [10], а в случае одинаково распределённых слагаемых — в [1].

Целью настоящей работы является получение асимптотических разложений для производных $\bar{f}_n(t)$. Имея асимптотические разложения для производных $\bar{f}_n(t)$, можно получить асимптотическое разложение для плотности $\bar{p}_n(x)$ и функции разпределения $\bar{F}_n(x)$ с оценкой остаточного члена не только по отношению к n, но и по отношению к x.

3. Содержание настоящей работы составляют доказательства следующих трех теорем.

Теорема 1. *Если последовательность* (1) *удовлетворяет условию* $L_{sn} \to 0$, *когда* $n \to \infty$, *то при* $|t| \leqslant T_{sn}$ *имеют место соотношения*

$$\left|\bar{f}_n^{(l)}(t) - h_{s-1,\,n}^{(l)}(t)\right| \leqslant \Theta_l(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}} L_{sn}\left\{|t|^{s-l} + |t|^{3(s-2)+l}\right\}, \tag{3}$$

а в случае одинаково распределенных слагаемых

$$\left|\bar{f}_n^{(l)}(t) - h_{s,\,n}^{(l)}(t)\right| \leqslant \delta_l(s,\, n)\, \frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}}\, e^{-\frac{t^2}{3}} \left\{|t|^{s-l} + |t|^{3(s-2)+l}\right\} \tag{4}$$

при $(t) \leqslant T_{sn}^{1-\gamma}$, *где* $0 < \gamma < 1$ *любое. Здесь* $l = 0, 1, \ldots, s$,

$$h_{m,n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1 + \sum_{k=3}^{m} Q_{kn}(it)\, L_{kn}\right],\quad m = s-1,\ s, \tag{5}$$

$Q_{kn}(it)$, $k = 3, \ldots, s$ — *многочлены степени* $3(k-2)$ *с равномерно относительно* n *ограниченными коэффициентами. Константы* $\Theta_l(s)$ *равномерно ограничены относительно* n,

$$L_{3n} \leqslant L_{4n}^{\frac{1}{2}} \leqslant \cdots \leqslant L_{kn}^{\frac{1}{k-2}} \leqslant \cdots \leqslant L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}, \tag{6}$$

и $\delta_l(s,\, n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

В случае одинаково распределенных слагаемых имеем

$$L_{kn}=\frac{\beta_k}{\sigma^k(\sqrt{n})^{k-2}};$$

$Q_{kn}(it)$ не зависит от n, и

$$Q_{kn}(it)\cdot\frac{\beta_k}{\sigma^k}=P_{k-2}(it),\quad k=3,\ \ldots,\ s.$$

Поэтому в этом случае

$$h_{m,n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{k=1}^{m-2}P_k(it)\frac{1}{(\sqrt{n})^k}\right],\quad m=s-1,\ s.$$

(Определение $P_k(it)$ можно найти в [1].)

Теорема 2. *Если случайные величины последовательности* (1) *одинаково распределены и какому-нибудь конечному* n_0 *функция распределения суммы* $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n_0}$ *имеет ограниченую производную, то при достаточно больших* n *и всех* $x\left(x\in(-\infty,\ \infty)\right)$

$$\left|\overline{p}_n(x)-\varphi_{s-1,n}(x)\right|\leqslant A(s)\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}(1+|x|^s)},\tag{7}$$

и

$$\left|\overline{p}_n(x)-\varphi_{s,n}(x)\right|\leqslant\delta(s,\ n)\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}(1+|x|^s)}.\tag{8}$$

Здесь

$$\varphi_{m,n}(x)=\varphi(x)+\sum_{k=1}^{m-2}P_k(-\varphi)\frac{1}{(\sqrt{n})^k},\quad m=s-1,\ s,$$

$$P_k(-\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx-\frac{t^2}{2}}P_k(it)\,dt,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

константа $A(s)$ *равномерно ограничена относительно* n, *и* $\delta(s,\ n)\to 0$, *когда* $n\to\infty$.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\overline{p}_n(x)-\varphi_{s-1,n}(x)\right|^p\left(1+|x|^s\right)^{p-\frac{1+\gamma_1}{s}}dx=O\left(\frac{1}{(\sqrt{u})^{p(s-2)}}\right),$$

а

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\overline{p}_n(x)-\varphi_{s,n}(x)\right|^p\left(1+|x|^s\right)^{p-\frac{1+\gamma_1}{s}}dx=o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{p(s-2)}}\right)\tag{9}$$

для любых $p>\frac{1}{s}$ *и* $\gamma_1>0$.

Из теоремы 2 непосредственным интегрированием можно получить асимптотическое разложение по степеням $n^{-\frac{1}{2}}$ для $\overline{F}_n(x)$, а из теоремы 3 при $s=3$ и $\gamma_1=ps-1$ следует результат С. Х. Сираждинова [9].

4. Доказательство теоремы 1.

При $l=0$ неравенство (3) следует из теоремы 5 [10].

Пусть на протяжении доказательства $|t|\leqslant T_{sn}$. Оценим модуль функции $f_n(t)$ и ее производных до s-ой включительно.

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то при* $|t| \leqslant T_{sn}$ *имеют место следующие неравенства*

$$\left|\bar{f}_n^{(l)}(t)\right| \leqslant c_l(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}} \left\{|t|^l + 1\right\} \text{ для } l=0,\ 1,\ \ldots,\ s, \tag{11}$$

где $c_l(s)$ — *равномерно относительно* n *ограниченные константы.*

Доказательство.

При $l=0$, неравенство (11) доказано Крамером [3] для интервала несколько большего чем наш с $c_0(s)=\frac{1}{2}$.

При доказательстве неравенств (11) для $l=1,\ 2,\ \ldots,\ s$ мы воспользуемся разложениями для логарифмических производных характеристических функций $f_k(t)$.

Так как $\beta_{sk} < \infty$, то $f_k(t)$ имеет ограниченные и непрерывные производные до s-го порядка включительно, и

$$f_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right) = \sum_{\nu=l}^{s-1} \frac{\alpha_{\nu k}\, i^\nu\, t^{\nu-l}}{(\nu-l)!\, B_n^\nu} + r_{lk}\left(\frac{t}{B_n}\right) \text{ для } l=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1, \tag{12}$$

$$\left|f_k^{(s)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| = \left|\frac{i^s}{B_n^s} \int_{-\infty}^{\infty} x^s e^{i\frac{t}{B_n}x}\, dF_k(x)\right| \leqslant \frac{\beta_{sk}}{B_n^s}. \tag{13}$$

Здесь

$$\alpha_{1k}=0, \quad \left|r_{lk}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \frac{\beta_{sk}\,|t|^{s-l}}{(s-l)!\, B_n^s}, \text{ и } f_k^{(0)}(t)=f_k(t).$$

Оценку остаточного члена $r_{lk}(t)$ получаем из выражения

$$f_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right) = \frac{i^l}{B_u^l} \int_{-\infty}^{\infty} x^l e^{i\frac{t}{B_n}x}\, dF_k(x),$$

разлагая $e^{i\frac{t}{B_n}x}$ в ряд Тейлора.

Известно [1], что

$$\ln f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) = \sum_{\nu=2}^{s-1} \frac{\varkappa_{\nu k}\, i^\nu t^\nu}{\nu!\, B_n^\nu} + r_k^{(0)}\left(\frac{t}{B_n}\right), \tag{14}$$

где

$$\left|r_k^0\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \frac{\vartheta(s)\, s^s\, \beta_{sk}}{s!\, B_n^s}\, |t|^s.$$

Из соотношений (12) при $l=0$, используя неравенства (6), которые доказаны в [10], легко получим, что при $|t| \leqslant T_{sn}$

$$\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| > \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Логарифмическая производная порядка l функции $f_k(t)$ рационально выражается через $f_k^{(\nu)}(t)$, $0 \leqslant \nu \leqslant l$, причем в знаменатель входит только $f_k(t)$ в степени не выше l. Следовательно, согласно неравенству (15) и тому, что $f_k^{(\nu)}(t)$, $\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ s$ являются функциями ограниченными и непрерывными, в нашем интервале $\ln^{(l)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)$ будет функцией непрерывной и ограниченной с ограниченными и непрерывными производными до порядка $s-1$ включительно. Используя известную теорему о разложении функции в ряд Тейлора, получим, что

$$\ln^{(l)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=\sum_{\nu=l}^{s-1}\frac{\varkappa_{\nu k}\, i^\nu t^{\nu-l}}{(\nu-l)!\, B_n^\nu}+r_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right) \quad \text{для } l=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1, \tag{16}$$

и

$$\left|\ln^{(s)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|=\left|\frac{1}{B_n^s}\,\frac{d^s \ln f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{d\left(\frac{t}{B_n}\right)^s}\right|\leqslant \vartheta(s)\,\frac{s^s \beta_{sk}}{B_n^s}. \tag{17}$$

Здесь

$$\varkappa_{1k}=0,\left|r_k^{(l)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant \vartheta_{kl}\,\frac{s^s \beta_{sk}\,|t|^{s-l}}{(s-l)!\, B_n^s}, \text{ и } \vartheta_{kl}\,(l=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$$

меньше некоторой константы $\vartheta(s)$, зависящей только от s и не зависящей от k.

Проведенные разсуждения верны для любой случайной величины ξ_k последовательности (1), если только условия леммы удовлетворены. Поэтому соотношения (12) — (17) верны для $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Имеем

$$\bar{f}_n(t)=\prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=e^{\ln \prod\limits_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}. \tag{18}$$

Тогда

$$\bar{f}_n^{(1)}(t)=\bar{f}_n(t)\sum_{k=1}^{n}\ln^{(1)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right). \tag{19}$$

Из соотношений (16) получаем, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\ln^{(1)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|=\left|\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{\nu k}\, i^\nu t^{\nu-1}}{(\nu-1)!\, B_n^\nu}+\sum_{k=1}^{n} r_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant |t|\left\{\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\nu^\nu B_{\nu n}\,|t|^{\nu-2}}{(\nu-1)!\, B_n^\nu}+\vartheta(s)\,\frac{s^s B_{sn}\,|t|^{s-2}}{(s-1)!\, B_n^s}\right\}=$$

$$=|t|\left\{4+\sum_{\nu=3}^{s-1}\frac{\nu^\nu}{(\nu-1)!}\, L_{\nu n}\,|t|^{\nu-2}+\vartheta(s)\,\frac{s^s}{(s-1)!}\, L_{sn}\,|t|^{s-2}\right\}\leqslant c^{(1)}(s)\,|t|.$$

Следовательно,

$$|\bar{f}_n^{(1)}(t)|\leqslant c_1(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}}\,|t|\leqslant c_1(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}}\,\{(t)+1\}.$$

Действуя аналогично, получаем

$$|\bar{f}_n^{(2)}(t)|\leqslant c_2(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}}\,\{|t|^2+1\}.$$

Пусть уже доказано, что

$$|\bar{f}_n^{(l)}(t)|\leqslant c_l(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}}\,\{(t)^l+1\} \quad \text{для } l=1,\ 2,\ \ldots,\ r<s. \tag{20}$$

Докажем, что тогда и

$$|\bar{f}_n^{(r+1)}(t)| \leqslant c_{r+1}(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}} \{|t|^{r+1}+1\}. \tag{21}$$

Действительно, применяя формулу n-кратного дифференцирования произведения из соотношения (19) получаем

$$\bar{f}_n^{(r+1)}(t) = \sum_{m=0}^{r} C_r^m \bar{f}_n^{(m)}(t) \sum_{k=1}^{n} \ln^{(r+1-m)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right), \tag{22}$$

или

$$|\bar{f}_n^{(r+1)}(t)| \leqslant \sum_{m=0}^{r} C_r^m |\bar{f}_n^{(m)}(t)| \left|\sum_{k=1}^{n} \ln^{(r+1-m)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|. \tag{23}$$

Но из (16), с учетом (6), легко следует, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \ln^{(r+1-m)} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \begin{cases} c^{(r+1-m)}(s) & \text{для } m=0,\ 1,\ \ldots\ r-1 \\ c^{(n)}(s)\,|t| & \text{для } m=r. \end{cases}$$

Используя эти и (20) неравенства, получаем из (23), что

$$|\bar{f}_n^{(r+1)}(t)| \leqslant \sum_{m=0}^{r} C_r^m c_m(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}} \{|t|^m+1\}\, c^{(r+1-m)}(s) +$$

$$+ c_r(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}} \{|t|^r+1\}\, c^{(1)}(s)\,|t|\} \leqslant c_{r+1}(s)\, e^{-\frac{t^2}{3}} \{|t|^{r+1}+1\}.$$

Неравенство (21) имеет место, если верны (20). Тем лемма доказана.

Подставляя в соотношение (18) выражения для $\ln f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)$ по (14) находим

$$\bar{f}_n(t) = e^{\sum\limits_{\nu=2}^{s-1} \frac{\Gamma_{\nu n} i^\nu t^\nu}{\nu!\, B_n^\nu} + \sum\limits_{k=1}^{n} r_k^{(0)}\left(\frac{t}{B_n}\right)}, \tag{24}$$

где

$$\Gamma_{\nu n} = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_{\nu k}, \quad \nu=2,\ 3,\ \ldots,\ s.$$

Обозначим

$$\tilde{h}_{m,n}(t) = e^{\sum\limits_{\nu=2}^{s-1} \frac{\Gamma_{\nu n} i^\nu t^\nu}{\nu!\, B_n^\nu}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{\rho_{m,n}(t)}, \tag{25}$$

где

$$\rho_{m,n}(t) = \sum_{\nu=3}^{m} \frac{\Gamma_{\nu n} i^\nu t^\nu}{\nu!\, B_n^\nu}, \quad m=s-1,\ s.$$

Лемма 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то при* $|t| \leqslant T_{sn}$ *имеют место следующие неравенства:*

$$|\bar{f}_n^{(l)}(t) - \tilde{h}_{s-1,n}^{(l)}(t)| \leqslant a_l(s)\, L_{sn}\, e^{-\frac{t^2}{3}} \{|t|^{s-l} + |t|^{s+l}\} \tag{26}$$

для $l=0,\ 1,\ \ldots,\ s$. *Константы* $a_l(s)$ *равномерно ограничены относительно* n.

Справедливость соотношения (26) в случае $l=0$ следует из [10].

Согласно (6) имеем

$$L_{\nu n} \leqslant L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}}, \quad \nu \leqslant s. \tag{27}$$

Из соотношений (24) и (25) получаем, что

$$\left|\bar{f}_n(t)-\tilde{h}_{s-1,n}(t)\right|=\left|e^{\sum\limits_{\nu=2}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^\nu t^\nu}{\nu!\,B_n^\nu}}\left[e^{\sum\limits_{k=1}^{n}r_k^{(0)}\left(\frac{t}{B_n}\right)}-1\right]\right|. \tag{28}$$

Имеем

$$\left|e^{\sum\limits_{\nu=2}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^\nu t^\nu}{\nu!\,B_n^\nu}}\right|\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot e^{\left|\sum\limits_{\nu=3}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^\nu t^\nu}{\nu!\,B_n^\nu}\right|}.$$

Используя неравенство (27) и условие $L_{sn}\to 0$ при $n\to\infty$, находим

$$\left|\sum_{\nu=3}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^\nu t^\nu}{\nu!\,B_n^\nu}\right|\leqslant\sum_{\nu=3}^{s-1}\frac{\nu^\nu}{\nu!}L_{\nu n}|t|^\nu\leqslant\sum_{\nu=3}^{s-1}\frac{\nu^\nu}{\nu!}L_{sn}^{\frac{2(\nu-3)}{3(s-2)}}\leqslant b_1,$$

где b_1 некоторая абсолютная константа, или

$$\left|e^{\sum\limits_{\nu=2}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^\nu t^\nu}{\nu!\,B_n^\nu}}\right|\leqslant e^{b_1}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}=b_2\,e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{29}$$

Согласно соотношению (14)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}r_k^{(0)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\vartheta(s)\,\frac{s^s}{s!}\,L_{sn}|t|^s\leqslant\vartheta(s)\,\frac{s^s}{s!}\,L_{sn}^{\frac{2(s-3)}{3(s-2)}}\leqslant b_3, \tag{30}$$

где b_3 — абсолютная константа.

Теперь из соотношения (28), используя неравенства (29) и (30), а также соотношение

$$|e^x-1|\leqslant|x|\,e^{|x|},$$

получаем

$$\left|\bar{f}_n(t)-\tilde{h}_{s-1,n}(t)\right|\leqslant a\cdot(s)\,e^{-\frac{t^2}{2}}L_{sn}|t|^s. \tag{31}$$

Пусть теперь $l=1$.

Из соотношения (19), используя (16) при $l=1$, получаем

$$\bar{f}_n^{(1)}(t)=\bar{f}_n(t)\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^\nu t^{\nu-1}}{(\nu-1)!\,B_n^\nu}+\bar{f}_n(t)\sum_{k=1}^{n}r_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right),$$

и

$$\tilde{h}_{s-1,n}^{(1)}(t)=\tilde{h}_{s-1,n}(t)\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^\nu t^{\nu-1}}{(\nu-1)!\,B_n^\nu}. \tag{32}$$

Поэтому

$$\left|\bar{f}_n^{(1)}(t)-\tilde{h}_{s-1,n}^{(1)}(t)\right|\leqslant\left|\bar{f}_n(t)-\tilde{h}_{s-1,n}(t)\right|\left|\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^\nu t^{\nu-1}}{(\nu-1)!\,B_n^\nu}\right|+$$

$$+\left|\bar{f}_n(t)\right|\left|\sum_{k=1}^{n}r_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|.$$

Согласно (16)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}r_k^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\vartheta(s)\,\frac{s^s}{(s-1)!}\,|t|^{s-1}L_{sn},$$

и

$$\left|\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^\nu t^{\nu-1}}{(\nu-1)!\,B_n^\nu}\right|\leqslant c^{(1)}(s)\,|t|, \tag{33}$$

поэтому, используя лемму 1 и неравенство (31) находим

$$\left|\bar{f}_n^{(1)}(t)-\tilde{h}_{s-1,\,n}^{(1)}(t)\right|\leqslant a_1(s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}L_{sn}\left\{|t|^{s+1}+|t|^{s-1}\right\}.$$

Аналогичные подсчеты показывают, что

$$\left|\bar{f}_n^{(2)}(t)-\tilde{h}_{s-1,\,n}^{(2)}(t)\right|\leqslant a_2(s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}L_{sn}\left\{|t|^{s+2}+|t|^{s-2}\right\}.$$

Пусть уже доказано, что

$$\left|\bar{f}_n^{(l)}(t)-\tilde{h}_{s-1,\,n}^{(l)}(t)\right|\leqslant a_l(s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}L_{sn}\left\{|t|^{s+l}+|t|^{s-l}\right\} \tag{34}$$

для $l=0,\ 1,\ \ldots,\ r<s$. Докажем, что тогда и

$$\left|\bar{f}_n^{(r+1)}(t)-\tilde{h}_{s-1,\,n}^{(r+1)}(t)\right|\leqslant a_{r+1}(s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}L_{sn}\left\{(t)^{s-r-1}+|t|^{s+r+1}\right\}. \tag{35}$$

Из формулы (22), используя соотношения (14), (16) и (17), имеем, что

$$\bar{f}_n^{(r+1)}(t)=\sum_{m=0}^{r}C_r^m\bar{f}_n^{(m)}(t)\sum_{\nu=r+1-m}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^{\nu}t^{\nu-(r+1-m)}}{[\nu-(r+1-m)]!\;B_n^{\nu}}+$$

$$+\sum_{m=0}^{r}C_r^m f_n^{(m)}(t)\sum_{k=1}^{n}r_k^{(r+1-m)}\left(\frac{t}{B_n}\right). \tag{36}$$

Применяя формулу n-кратного дифференцирования произведения, получаем из соотношений (32), что

$$\tilde{h}_{s-1,\,n}^{(r+1)}(t)=\sum_{m-0}^{r}C_r^m\tilde{h}_{s-1,\,n}^{(m)}(t)\sum_{\nu=r+1-m}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^{\nu}t^{\nu-(r+1-m)}}{[\nu-(r+1-m)]!\;B_n^{\nu}}. \tag{37}$$

Теперь из (36) и (37) следует

$$\left|\bar{f}_n^{(r+1)}(t)-\tilde{h}_{s-1,\,n}^{(r+1)}(t)\right|\leqslant\sum_{m=0}^{r}C_r^m\left|\bar{f}_n^{(m)}(t)-\tilde{h}_{s-1,\,n}^{(m)}(t)\right|\left|\sum_{\nu=r+1-m}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^{\nu}t^{\nu-(r+1-m)}}{[\nu-(r+1-m)]!\;B_n^{\nu}}\right|+$$

$$+\sum_{m=0}^{r}C_r^m\left|f_n^{(m)}(t)\right|\left|\sum_{k=1}^{n}r_k^{(r+1-m)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|. \tag{38}$$

Согласно (14), (16) и (17)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}r_k^{(r+1-m)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\vartheta(s)\,\frac{s^s|t|^{s-(r+1-m)}}{[s-(r+1-m)]!}\,L_{sn},\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ r \tag{39}$$

и

$$\left|\sum_{\nu=r+1-m}^{s-1}\frac{\Gamma_{\nu n}i^{\nu}t^{\nu-(r+1-m)}}{[\nu-(r+1-m)]!\;B_n^{\nu}}\right|\leqslant\begin{cases}c^{(r+1-m)}|s|\ \text{для}\ m=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1\\ c^{(1)}(s)\,|t|\ \text{для}\ m=r,\end{cases} \tag{40}$$

для $r=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1$,

а

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\ln^{(s)}f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\vartheta(s)\,s^sL_{sn}. \tag{41}$$

Согласно лемме 1 и неравенствам (34), (39)–(41), из (38) следует, что

$$\left|\bar{f}_n^{(r+1)}(t)-\tilde{h}_{s-1,\,n}^{(r+1)}(t)\right|\leqslant a_{r+1}(s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}L_{sn}\left\{|t|^{s-(r+1)}+|t|^{s+r+1}\right\}.$$

Тем самым лемма 2 доказана.

Лемма 3. *В условиях теоремы* 1 *при* $|t| \leqslant T_{sn}$

$$\left|\tilde{h}^{(l)}_{s-1,\,n}(t)-h^{(l)}_{s-1,\,n}(t)\right| \leqslant b_l(s)\, e^{-\frac{t^2}{2}} L_{sn}\left\{|t|^{s-l}+|t|^{3(s-2)+l}\right\}$$

для $l=0,\ 1,\ \ldots,\ s$. *Константы* $b_l(s)$ *ограниченные равномерно относительно* n.

Доказательство.

Согласно определению

$$\tilde{h}_{s-1,\,n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,\,n}(t)]^k}{k!}=h_{s-1,\,n}(t)+V_{sn}(t)+R_{sn}(t), \tag{42}$$

где

$$V_{sn}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{s-3}\frac{[\rho_{s-1,\,n}(t)]^k}{k!}-1-\sum_{k=3}^{s-1}Q_{kn}(it)\,L_{kn}\right\}=e^{-\frac{t^2}{2}}\,\tilde{V}_{sn}(t), \tag{43}$$

а

$$R_{sn}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{k=s-2}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,\,n}(t)]^k}{k!}. \tag{44}$$

Из (42) получаем, что

$$\left|\tilde{h}^{(l)}_{s-1,\,n}(t)-h^{(l)}_{s-1,\,n}(t)\right| \leqslant \left|V^{(l)}_{sn}(t)\right|+\left|R^{(l)}_{sn}(t)\right|, \quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{45}$$

Для доказательства леммы достаточно оценить $|V^{(l)}_{sn}(t)|$ и $|R^{(l)}_{sn}(t)|$.

Очевидно

$$\tilde{V}_{sn}(t)=\sum_{\substack{m_3+\cdots+m_{s-1}=m\\ 2\leqslant m\leqslant s-3\\ (3-2)m_3+\cdots+[(s-1)-2]\,m_{s-1}\geqslant s-2}}\frac{1}{m_3!\ldots m_{s-1}!}\left(\frac{\Gamma_{3,\,n}\,i^3t^3}{3!\,B_n^3}\right)^{m_3}\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{\Gamma_{s-1,\,n}\,i^{s-1}t^{s-1}}{(s-1)!\,B_n^{s-1}}\right)^{m_{s-1}}. \tag{46}$$

Отсюда, используя неравенства для семиинвариантов и неравенства (27), получаем

$$\left|\tilde{V}_{sn}(t)\right| \leqslant \sum{}^{*}\frac{3^{3m_3}\ldots(s-1)^{(s-1)\,m_{s-1}}}{(m_3!)\ldots m_{s-1}!\,(3!)^{m_3}\ldots[(s-1)!]^{m_{s-1}}}\times$$

$$\times L_{sn}^{\frac{1}{s-2}[m_3+\cdots+(s-3)m_{s-1}]}\,|t|^{3m_3+\cdots+(s-1)\,m_{s-1}}.$$

Так как

$$L_{sn}^{\frac{1}{s-2}[m_3+\cdots+(s-3)\,m_{s-1}]}=L_{sn}\cdot L_{sn}^{\frac{1}{s-2}\{m_3+\cdots+(s-3)\,m_{s-1}-s+2\}},$$

и

$$m_3+\cdots+(s-3)\,m_{s-1}\geqslant s-2, \quad \text{а} \quad |t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}},$$

то, выделяя в каждом члене суммы Σ^* множитель L_{sk} $\Big($* обозначает, что суммирование здесь производится по тем самым $m_3,\ \ldots,\ m_{s-1}$, что и в (46)$\Big)$, степень t в каждом члене можно будет уменьшить на $3\{m_3+\cdots+(s-$ $-3)\,m_{s-1}\}-3(s-2)$. Но

$$3m_3+\cdots+(s-1)\,m_{s-1}-3\left\{m_3+\cdots+(s-3)m_{s-1}\right\}+3\,(s-2)=$$
$$=3\,(s-2)-2m_4-\cdots-\left[3\,(s-3)-(s-1)\right]m_{s-1}\leqslant 3\,(s-2),$$

и, следовательно, степень t будет $\leqslant 3\,(s-2)$. Кроме того, степень t в сумме (46) будет $\geqslant s$, так как

$$3m_3+\cdots+(s-1)\,m_{s-1}=2\,(m_3+\cdots+m_{s-1})+m_3+\cdots+\left[(s-1)-2\right]m_{s-1}\geqslant$$
$$\geqslant s-2+2m>s.$$

Поэтому будем иметь

$$\left|\tilde{V}_{sn}(t)\right|\leqslant A^{(0)}(s)\,L_{sn}\left\{|\,t\,|^{s}+|\,t\,|^{3(s-2)}\right\}.$$

Как видно из (46), $\tilde{V}_{sn}(t)$ есть многочлен. Поэтому

$$\left|\tilde{V}^{(l)}_{sn}(t)\right|\leqslant A^{(l)}(s)\,L_{sn}\left\{|\,t\,|^{s-l}+|\,t\,|^{3(s-2)-l}\right\} \tag{47}$$

для

$$l=0,1,\ \ldots,\ s,\ \left(\tilde{V}^{(0)}_{sn}(t)=\tilde{V}_{sn}(t)\right).$$

Очевидно,

$$V^{(l)}_{sn}(t)=\sum_{m=0}^{l}C_l^m\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]^{(m)}\tilde{V}^{(l-m)}_{sn}(t),\quad l=0,1,\ \ldots,\ s,$$

и

$$\left|V^{(l)}_{sn}(t)\right|\leqslant\sum_{m=0}^{l}C_l^m\left|\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]^{(m)}\right|\left|\tilde{V}^{(l-m)}_{sn}(t)\right|.$$

Очевидно, что при $-\infty<t<\infty$

$$\left|\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]^{(m)}\right|\leqslant a_m\,e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{|\,t\,|^{m}+1\right\}, \tag{48}$$

поэтому, согласно неравенству (47), имеем

$$\left|V^{(l)}_{sn}(t)\right|\leqslant\sum_{m=0}^{l}C_l^m\,a_m\,e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{|\,t\,|^{m}+1\right\}A^{(l-m)}(s)\,L_{sn}\left\{|\,t\,|^{s-(l-m)}+|\,t\,|^{3(s-2)-(l-m)}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant A_l(s)\,e^{-\frac{t^2}{2}}L_{sn}\left\{|\,t\,|^{s-l}+|\,t\,|^{3(s-2)+l}\right\},\quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{49}$$

Оценим

$$\left|R^{(l)}_{sn}(t)\right|.$$

Используя неравенства (27) и верхний предел для $|t|$ легко получаем, что

$$\left|\rho_{s-1,\,n}(t)\right|\leqslant b_0(s)\,|\,t\,|^3\,L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\leqslant b_0(s). \tag{50}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,\,n}(t)]^k}{k!}$ мажорируется рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[b_0(s)\,|\,t\,|^3\,L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right]^k}{k!}.$$

Продифференцировав ряд для $e^{\rho_{s-1,n}(t)}$ почленно l-раз, получаем следующее выражение

$$P_l\left(\rho^{(l)}_{s-1,n}(t),\ \ldots,\ \rho^{(1)}_{s-1,n}(t)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^k}{k!},$$

где $P_l\left(\rho^{(l)}_{s-1,n}(t),\ \ldots,\ \rho^{(1)}_{s-1,n}(t)\right)$ – многочлен. Ясно, что это выражение мажорируется выражением

$$\left|P_l\left(\rho^{(l)}_{s-1,n}(t),\ \ldots,\ \rho^{(1)}_{s-1,n}(t)\right)\right|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[b_0(s)\,|\,t\,|^3 L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right]^k}{k!}.$$

Следовательно, ряды, полученные дифференцированием почленно, сходятся. Поэтому почленное дифференцирование законно.

Согласно оценке (50)

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^k}{k!}\right|=\left|\rho_{s-1,n}(t)\right|^m\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^{k-m}}{k!}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\rho_{s-1,n}(t)\right|^m\frac{1}{m!}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^k}{k!}\right|\leqslant\frac{e^{b_0(s)}}{m!}\,|\,t\,|^{3m}L_{sn}^{\frac{m}{s-2}},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{50}$$

Далее

$$R^{(l)}_{sn}(t)=\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{k=s-2}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^k}{k!}\right]^{(l)}=$$

$$=\sum_{m=0}^{l}C_l^m\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]^{(l-m)}\left[\sum_{k=s-2}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^k}{k!}\right]^{(m)},$$

или

$$\left|R^{(l)}_{sn}(t)\right|\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}C_l^m\left|\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]^{(l-m)}\right|\left|\left[\sum_{k=s-2}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^k}{k!}\right]^{(m)}\right|,\quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{52}$$

Методом индукции легко доказывается, что

$$\left[\sum_{k=s-2}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^k}{k!}\right]^{(m)}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_j=m\\ l_r\leqslant m+1-j\\ l_r\neq 0,\ r=1,\ \ldots,\ j}}C^{(m)}_{(l_1\ldots l_j)}\rho^{(l_1)}_{s-1,n}(t)\ \ldots\ \rho^{(l_j)}_{s-1,n}(t)\times$$

$$\times\sum_{k=s-2-j}^{\infty}{}^{*}\ \frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^k}{k!}\quad\text{для}\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ s, \tag{53}$$

где $C^{(m)}_{(l_1\cdots l_j)}$ – конечные коэффициенты, зависящие только от m, а звездочка * при сумме означает, что при $j=s-1$, $j=s$ суммирование производится от нуля.

Тем же способом, каким получили неравенство (50), получаем

$$\left|\rho^{(l)}_{s-1,n}(t)\right|\leqslant\begin{cases}b_l(s)\,|\,t\,|^{3-l}L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}, & l=1,\ 2,\\ b_l(s)\,L_{sn}^{\frac{l-2}{s-2}}, & l=3,\ \ldots,\ s-1\\ =0, & l=s,\end{cases} \tag{54}$$

Согласно неравенствам (51) и (54) из соотношения (53) легко следует, что

$$\left|\left\{\sum_{k=s-2}^{\infty}\frac{[\rho_{s-1,n}(t)]^k}{k!}\right\}^{(m)}\right|\leqslant B^{(m)}(s)L_{sn}\left\{|t|^{s-m}+|t|^{3(s-2)}\right\},\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{55}$$

Далее, используя неравенства (48), (55) из соотношения (52) находим

$$\left|R_{sn}^{(l)}(t)\right|\leqslant\sum_{m=0}^{l}C_l^m a_{(l-m)}e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{|t|^{l-m}+1\right\}B^{(m)}(s)L_{sn}\left\{|t|^{-m}+|t|^{3(s-2)}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_l(s)e^{-\frac{t^2}{2}}L_{sn}\left\{|t|^{s-l}+|t|^{3(s-2)+l}\right\},\qquad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{56}$$

Из неравенства (45) согласно неравенствам (49) и (56) следует

$$\left|\tilde{h}_{s-1,n}^{(l)}(t)-h_{s-1,n}^{(l)}(t)\right|\leqslant b_l(s)e^{-\frac{t^2}{2}}L_{sn}\left\{|t|^{s-l}+|t|^{3(s-2)+l}\right\},\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{57}$$

Отсюда следует лемма. Так как

$$\left|\bar{f}_n^{(l)}(t)-h_{s-1,n}^{(l)}(t)\right|\leqslant\left|\bar{f}_n^{(l)}(t)-\tilde{h}_{s-1,n}^{(l)}(t)\right|+\left|\tilde{h}_{s-1,n}^{(l)}(t)-h_{s-1,n}^{(l)}(t)\right|$$

для $l=0,\ 1,\ \ldots,\ s$, то из доказанных лемм следует неравенства (3).

Доказательство неравенств (4) совершенно аналогично, поэтому не будем его приводить. Отметим лишь, что вместо разложений (14), (16) и (17) надо пользоваться следующими разложениями

$$\ln^{(l)}f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\sum_{\nu=l}^{s}\frac{\varkappa_\nu i^\nu t^{\nu-l}}{(\nu-l)!\,(\sigma\sqrt{n})^\nu}+o\left(\frac{t^{s-l}}{(\sigma\sqrt{n})^s}\right),\qquad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s, \tag{58}$$

где $\varkappa_0$, $\varkappa_1=0$. Эти соотношения верны в силу тех самых рассуждений, которые приводились при обосновании соотношений (16).

При $l=0$ соотношение (58) можно найти в [1].

5. Доказательство теоремы 2.

При доказательстве теоремы нам понадобится оценка $\left|\bar{f}_n^{(s)}(t)\right|$ для $|t|\leqslant$ $\leqslant\frac{\sigma^3\sqrt{n}}{8s\,\beta_s^{3/s}}$, получаемая из следующей леммы.

Лемма 4. *Если случайные величины последовательности* (1) *одинаково распределены, то при*

$$|t|\leqslant\frac{\sigma^3\sqrt{n}}{8s\,\beta_s^{3/s}}=\tilde{T}_{sn}$$

имеют место следующие неравенства:

$$\left|\bar{f}_n^{(l)}(t)\right|\leqslant a(l,\ s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{|t|^l+1\right\},\qquad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{59}$$

Константы $a(l,\ s)$ *равномерно ограничены относительно* n.

Доказательство.

Для $l=0$, как уже отмечалось, неравенство (59) доказано Крамером [3] для несколько болшего интервала, чем наш с $a(0,\ s)=\frac{1}{2}$.

При $l=1$ имеем

$$\bar{f}_n^{(1)}(t)=n\left[f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^{n-1}f^{(1)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\bar{f}_n(t)\,n\frac{f^{(1)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}.$$

Для нашего интервала

$$\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|\geqslant\frac{99}{100}\ \left(\text{см. [1]}\right). \tag{60}$$

Из (12) следует, что

$$\left|f^{(1)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant\sum_{\nu=2}^{s}\frac{B_\nu|t|^{\nu-1}}{(\nu-1)!\,(\sigma\sqrt{n})^\nu}\leqslant a_1(s)\,\frac{|t|}{n}\ \text{для}\ |t|\leqslant\tilde{T}_{sn}. \tag{61}$$

Согласно (59) при $l=0$ и неравенствам (60) и (61)

$$\left|\bar{f}_n^{(1)}(t)\right|\leqslant a(1,s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{|t|+1\right\}.$$

Допустим, что неравенства (59) верны для $l=0,\ 1,\ \ldots,\ r<s$. Докажем, что тогда будет верно и неравенство

$$\left|\bar{f}_n^{(r+1)}(t)\right|\leqslant a(r+1,\ s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{|t|^{r+1}+1\right\}. \tag{62}$$

Имеем, что

$$f^{(k)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\frac{i^k}{(\sigma\sqrt{n})^k}\int_{-\infty}^{\infty}x^k e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}}\,dF(x).$$

Поэтому

$$\left|f^{(k)}\left(\frac{t}{(\sigma\sqrt{n})}\right)\right|\leqslant\frac{\beta_k}{(\sigma\sqrt{n})^k},\qquad k=2,\ 3,\ \ldots,\ s. \tag{63}$$

Легко доказывается следующая формула

$$\bar{f}_n^{(k)}(t)=\frac{n}{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\sum_{m=1}^{k}\left(a_m(k)-\frac{b_m(k)}{n}\right)\bar{f}_n^{(k-m)}(t)\,f^{(m)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right), \tag{64}$$

где $a_m(k)$ и $b_m(k)$ — положительные конечные постоянные, самая большая из которых не превышает $C_{k-1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$.

Используя наше допущение и неравенства (60), (61) и (63), получаем из (64)

$$\left|\bar{f}_n^{(r+1)}(t)\right|\leqslant\frac{n\,100}{99}\left\{a_1(r+1)\cdot a(r,\ s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}\left(|t|^r+1\right)\cdot\frac{a_1(s)\,|t|}{n}+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=2}^{r+1}a_m(r+1)\,a(r+1-m,\ s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}\left(|t|^{r+1-m}+1\right)\frac{\beta_m}{(\sigma\sqrt{n})^m}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant a(r+1,\ s)\,e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{|t|^{r+1}+1\right\}.$$

Следовательно, неравенство (62) верно и тем лемма 3 доказана.

Так как функция распределения суммы $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n_0}$ имеет ограниченную производную, то $|f(t)|^{2n_0}$ интегрируемая (см. [2]). Отсюда следует, что при $n>2n_0$ существует плотность $\bar{p}_n(x)$. Поэтому при таких n имеем

$$\bar{f}_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\bar{p}_n(x)\,dx.$$

Дифференцируя это соотношение s-раз, что вполне законно, так как β_s существует, следовательно, существует s-ый момент и для $\bar{S}_n$, получаем

$$\bar{f}_n^{(s)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\left[i^s x^s \bar{p}_n(x)\right]dx. \tag{65}$$

Известно [1], что

$$h_{m,n}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_{m,n}(x)\,dx, \quad m=s-1,\ s.$$

Очевидно

$$h_{m,n}^{(s)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\left[i^s x^s \varphi_{m,n}(x)\right]dx. \tag{66}$$

Из (65) и (66) получаем

$$\bar{f}_n^{(s)}(t)-h_{m,n}^{(s)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\left\{i^s x^s\left[\bar{p}_n(x)-\varphi_{m,n}(x)\right]\right\}dx.$$

Отсюда формально

$$i^s x^s\left[\bar{p}_n(x)-\varphi_{m,n}(x)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left[\bar{f}_n^{(s)}(t)-h_{m,n}^{(s)}(t)\right]dt, \quad m=s-1,\ s. \tag{67}$$

Чтобы убедиться в правильности соотношения (67), достаточно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\bar{f}_n^{(s)}(t)-h_{m,n}^{(s)}(t)\right|dt<\infty,$$

а это как раз и выяснится в ходе доказательства.

Из соотношения (67) при $m=s-1$ имеем

$$2\pi|x|^s\left|\bar{p}_n(x)-\varphi_{s-1,n}(x)\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left|\bar{f}_n^{(s)}(t)-h_{s-1,n}^{(s)}(t)\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-T_{sn}}^{T_{sn}}\left|\bar{f}_n^{(s)}(t)-h_{s-1,n}^{(s)}(t)\right|dt+\int_{|t|>T_{sn}}\left|h_{s-1,n}^{(s)}(t)\right|dt+\int_{T_{sn}<|t|\leqslant\tilde{T}_{sn}}\left|\bar{f}_n^{(s)}(t)\right|dt+$$

$$+\int_{|t|>\tilde{T}_{sn}}\left|\bar{f}_n^{(s)}(t)\right|dt=I_1+I_2+I_3+I_4. \tag{68}$$

Используя теорему 1, получаем

$$I_1=\int\limits_{-T_{sn}}^{T_{sn}}\left|\bar{f}_n^{(s)}(t)-h_{s-1,\,n}^{(s)}(t)\right|dt\leqslant\Theta_s(s)\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}}\int\limits_{-T_{sn}}^{T_{sn}}e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{1+|t|^{4s-6}\right\}dt\leqslant$$

$$\leqslant\Theta_s(s)\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{1+|t|^{4s-6}\right\}dt\leqslant A_1(s)\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}}. \qquad (69)$$

Для оценки I_2 надо оценить $|h_{s-1,\,n}^{(s)}(t)|$. Имеем

$$h_{s-1,\,n}^{(s)}(t)=\sum_{r=0}^{s}C_s^r\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(s-r)}\left[1+\sum_{k=1}^{s-3}P_k(it)\frac{1}{(\sqrt{n})^k}\right]^{(r)}.$$

Известно, что $P_k(it)$ многочлен степени $3k$. А так как $T_{sn}\to\infty$ при $n\to\infty$, то

$$\left|\left[1+\sum_{k=1}^{s-3}P_k(it)\frac{1}{(\sqrt{n})^k}\right]^{(r)}\right|\leqslant C_r(s)\,|t|^{3(s-3)-r}\ \text{при}\ |t|\geqslant T_{sn}.$$

Поэтому, используя неравенства (48), находим

$$\left|h_{s-1,\,n}^{(s)}(t)\right|\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{r=0}^{s}C_s^r a_{s-r}\left\{|t|^{s-r}+1\right\}C_r(s)\,|t|^{3(s-3)-r}\leqslant$$

$$\leqslant c(s)\,e^{-\frac{t^2}{2}}|t|^{4s-9},\quad |t|>T_{sn}.$$

Согласно этому неравенству

$$I_2=\int\limits_{|t|>T_{sn}}\left|h_{s-1,\,n}^{(s)}(t)\right|dt\leqslant c(s)\int\limits_{|t|>T_{sn}}e^{-\frac{t^2}{2}}|t|^{4s-9}\,dt.$$

Очевидно

$$I_2=o\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}}\right). \qquad (70)$$

Согласно лемме 4

$$I_3=\int\limits_{T_{sn}<|t|\leqslant\tilde{T}_{sn}}\left|\bar{f}_n^{(s)}(t)\right|dt\leqslant a(s)\int\limits_{T_{sn}<|t|\leqslant\tilde{T}_{sn}}e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{|t|^s+1\right\}dt\leqslant$$

$$\leqslant 2a(s)\,e^{-\frac{T_{sn}^2}{3}}\left[\frac{1}{s+1}\tilde{T}_{sn}^{s+1}+\tilde{T}_{sn}\right]\leqslant\frac{2a(s)\,\tilde{T}_{sn}^{s+1}}{e^{\frac{T_{sn}^2}{3}}}.$$

Очевидно

$$I_3=o\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}}\right). \qquad (71)$$

Теперь оценим I_4. Имеем

$$\bar{f}_n^{(s)}(t)=\sum_{j=1}^{s}\left[f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^{n-j}n^j\prod_{k=0}^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_j=s\\ l_m\neq 0\\ l_m\leqslant s+1-j,\ m=1,\,\cdots,\,j}}C_{l_1\cdots l_j}^{(s)}f^{(l_1)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\cdots$$

$$\cdots f^{(l_j)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\left[f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^{n-s}\sum_{j=1}^{s}\left[f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^{s-j}n^j\prod_{k=0}^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\times$$

$$\times\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_j=s\\ l_m\neq 0\\ l_m\leqslant s+1-j,\ m=1,\ldots,j}} c^{(s)}_{l_1\ldots l_j} f^{(l_1)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\cdots f^{(l_j)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Но

$$f^{(l_m)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\leqslant\frac{\beta_{l_m}}{(\sigma\sqrt{n})^{l_m}},$$

поэтому

$$f^{(l_1)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\cdots f^{l_j}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\Bigg|\leqslant\frac{\beta_{l_1}\cdots\beta_{l_j}}{(\sigma\sqrt{n})^{l_1+\cdots+l_j}}\leqslant\frac{\beta_s}{(\sigma\sqrt{n})^s},\qquad l_1+l_2\cdots+l_j=s.$$

Согласно этим неравенствам

$$\left|f_n^{(s)}(t)\right|\leqslant\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^{n-s}\frac{\beta_s n^{\frac{s}{2}}}{\sigma^s}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{n^{s-j}}\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_j=s\\ l_m\neq 0,\\ l_m\leqslant s+1-j,\ m-1,\ldots,j}} c^{(s)}_{l_1\ldots l_j}\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{A}(s)\frac{\beta_s n^{\frac{s}{2}}}{\sigma^s}\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^{n-s}.$$

Следовательно,

$$I_4=\int\limits_{|t|>\tilde{T}_{sn}}\left|\bar{f}_n^{(s)}(t)\right|dt\leqslant\tilde{A}(s)\frac{\beta_s n^{\frac{s}{2}}}{\sigma^s}\int\limits_{|t|>\tilde{T}_{sn}}\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^{n-s}dt=$$

$$=\tilde{A}(s)\frac{\beta_s n^{\frac{s+1}{2}}}{\sigma^{s-1}}\int\limits_{|t|>\delta}\left|f(t)\right|^{n-s}dt,\quad \delta=\frac{\tilde{T}_{sn}}{\sigma\sqrt{n}}>0.$$

Из 2-го условия теоремы следует, что существует положительная константа >0, такая, что

$$\left|f(t)\right|^{n_0}<e^{-c}\ \text{при}\ |t|\geqslant\delta.$$

Поэтому при таких t

$$\left|f(t)\right|^{n-s-2n_0}=\left\{\left|f(t)\right|^{n_0}\right\}^{\frac{n-s}{n_0}-2}\leqslant e^{-\frac{c}{n_0}n}\cdot e^{c\left(\frac{s}{n_0}+2\right)}\leqslant B(s)\,e^{-c_1 n},$$

где $c_1=\frac{c}{n_0}$. Тогда

$$I_4\leqslant\tilde{A}(s)B(s)\frac{\beta_s n^{\frac{s+1}{2}}}{\sigma^{s-1}}e^{-c_1 n}\int\limits_{|t|\geqslant\delta}\left|f(t)\right|^{2n_0}dt\leqslant B_2(s)\frac{\beta_s^s}{\sigma^s}\left(\sigma n^{\frac{s+1}{2}}e^{-c_1 n}\right).$$

Очевидно

$$I_y=o\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s\sqrt{n}^{s-2}}\right).\tag{72}$$

Согласно неравенствам (69) — (72) из соотношения (68) следует, что

$$|x|^s \left| \bar{p}_n(x) - \varphi_{s-1,n}(x) \right| \leqslant A_2(s) \frac{\beta_s}{\sigma^s (\sqrt{n})^{s-2}}. \tag{73}$$

Но таким же способом можно получить, что и

$$|x|^l \left| \bar{p}_n(x) - \varphi_{s-1,n}(x) \right| \leqslant A_l(s) \frac{\beta_s}{\sigma^s (\sqrt{n})^{s-2}}$$

для $l=0, 1, \ldots, s-1$.

Отсюда при $l=0$ имеем

$$\left| \bar{p}_n(x) - \varphi_{s-1,n}(x) \right| \leqslant A_0(s) \frac{\beta_s}{\sigma^s (\sqrt{n})^{s-2}}. \tag{74}$$

Из неравенств (73) и (74) следует, что

$$\left(1+|x|^s\right) \left| \bar{p}_n(x) - \varphi_{s-1,n}(x) \right| \leqslant A(s) \frac{\beta_s}{\sigma^s (\sqrt{n})^{s-2}},$$

а это равносильно (7).

Для доказательства соотношения (8) из соотношения (67) при $m=s$ имеем

$$2\pi |x|^s \left| \bar{p}_n(x) - \varphi_{s,n}(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| \bar{f}_n^{(s)}(t) - h_{s,n}^{(s)}(t) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-T_{sn}^{1-\gamma}}^{T_{sn}^{1-\gamma}} \left| \bar{f}_n^{(s)}(t) - h_{s,n}^{(s)}(t) \right| dt + \int_{|t|>T_{sn}^{1-\gamma}} \left| h_{sn}^{(s)}(t) \right| dt +$$

$$+ \int_{T_{sn}^{1-\gamma}<|t|\leqslant \tilde{T}_{sn}} \left| \bar{f}_n^{(s)}(t) \right| dt + \int_{|t|>\tilde{T}_{sn}} \left| \bar{f}_n^{(s)}(t) \right| dt.$$

Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны.

6. Теорема 3 доказывается непосредственным интегрированием.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность В. А. Статулявичюсу за внимание к настоящей работе и советы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
10.VI.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
2. Б. В. Гнеденко. Локальная предельная теорема для плотностей. ДАН, 95 (1954), 5—6.
3. Г. Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей. М., 1947.
4. В. В. Петров. Локальная теорема для плотностей сумм независимых случайных величин. Теор. вероят. и её прим., 1, 3 (1956), 349—367.
5. В. В. Петров. Асимтотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин. Теор. вероят. и её прим., 4, 2 (1959), 220—224.
6. В. В. Петров. Об одном классе предельных теорем для независимых случайных величин. Теор. вероят. и её прим., 4, 2 (1959), 224—229.
7. В. В. Петров. Асимптотические разложения связанные с суммами независимых случайных величин. Теор. вероят. и её прим., 4, 4 (1959), 473—474.
8. Ю. В. Прохоров. Локальная теорема для плотностей, ДАН, 83 (1952).
9. С. Х. Сираждинов. О точной оценке для локальной теоремы. Теор. вероят. и её прим., 4, 2 (1959), 229—233.
10. В. А. Статулявичюс. Предельные теоремы и их уточнения для аддитивных случайных функций и сумм слабо зависимых случайных величин. Transactions of the third Prague conference.

TANKIO FUNKCIJOS ASIMPTOTINIO IŠDĖSTYMO LIEKAMASIS NARYS

P. SURVILA

(Reziumė)

Darbe įrodoma sekanti teorema:

Jei $\{\xi_k\}$ *—seka nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su* $M\xi_k=0$ *ir* $D\xi_k=\sigma^2\neq 0$, $k=1, 2, \ldots$ *patenkina sąlygas:*

1. $M|\xi_k|^s=\beta_s<\infty$, $s\geqslant 3$.

2. *Egzistuoja toks baigtinis skaičius* n_0, *kad sumos* $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n_0}$ *pasiskirstymo funkcija turi aprėžtą išvestinę,*

tai pakankamai dideliems n *ir visiems* x, $x\in(-\infty, \infty)$,

$$\left|\bar{p}_n(x)-\left[\varphi(x)+\sum_{k=1}^{s-3}P_k(-\varphi)\frac{1}{(\sqrt{n})^k}\right]\right|\leqslant A(s)\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}(1+|x|^s)},$$

ir

$$\bar{p}_n(x)-\left[\varphi(x)+\sum_{k=1}^{s-2}P_k(-\varphi)\frac{1}{(\sqrt{n})^k}\right]=o\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}}\right)\cdot\frac{1}{1+|x|^s},$$

kur $\bar{p}_n(x)$ *—normuotos sumos* $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ *pasiskirstymo tankis,*

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad P_k(-\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx-\frac{t^2}{2}}P_k(it)\,dt,\quad k=1, 2, \ldots, s-2,$$

$P_k(it)$ *—* $3k$ *—laipsnio polinomas,*

$A(s)$ *—konstanta, priklausanti tiktai nuo* s.

DAS RESTGLIED ASYMPTOTISCHER ENTWICKLUNG DER DICHTEFUNKTIONEN

P. SURWILA

(Zusammenfassung)

Im vorliegenden Artikel wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei $\{\xi_k\}$ *—eine Folge von unabhängigen zufälligen Veränderlichen mit derselben Verteilung, mit den Mittelwerten* $M\xi_k=0$ *und mit den Dispersionen* $D\xi_k=\sigma^2\neq 0$ *für alle* $k=1, 2, \ldots$. *Es sei folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $M|\xi_k|^s=\beta_s<\infty, \; s\geqslant 3$.

2. *Existiert solche endliche Zahl* n_0, *daß für die Verteilungsfunktion der Summe* $\xi_1+\xi_2+\cdots$ $\cdots+\xi_{n_0}$ *die Lipschitzbedingung erfüllt ist.*

Dann gelten für hinreichend große n und für alle x, $x\in(-\infty, \infty)$ *folgende Relationen:*

$$\left|\bar{p}_n(x)-\left[\varphi(x)+\sum_{k=1}^{s-3}P_k(-\varphi)\frac{1}{(\sqrt{n})^k}\right]\right|\leqslant A(s)\frac{\beta_s}{\sigma^s(\sqrt{n})^{s-2}(1+|x|^s)},$$

und

$$\bar{p}_n(x)-\left[\varphi(x)+\sum_{k=1}^{s-2}P_k(-\varphi)\frac{1}{(\sqrt{n})^k}\right]=o\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s\sqrt{n})^{s-2}}\right)\cdot\frac{1}{1+|x|_s},$$

wo $\bar{p}_n(x)$ *die Dichtefunktion der normierten Summe* $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$,

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad P_k(-\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx-\frac{t^2}{2}}P_k(it)\,dt \quad \text{für } k=1, 2, \ldots, s-2,$$

$P_k(it)$ *das Polynom 3k-ten Grades und* $A(s)$ *nur von s abhängige Konstante ist.*