1962

ЕВКЛИДОВА СВЯЗНОСТЬ КАРТАНОВСКОГО ТИПА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. БЛИЗНИКАС

Пространство линейных элементов с непотенциальной метрикой называется метрическим пространством линейных элементов $\mathscr{F}_n$. Пространства этого класса, но только под другими названиями (обобщенное метрическое пространство линейных элементов, многообразие финслеровой структуры, пространство линейных элементов с непотенциальной метрикой и др.), рассматривались Й. И. Хорватом [6], А. Моором [6], [7], Хассан Акбар–Задеком [5], М. Хасигутим [4], Й. Вэнстоуном [8] и др. Существуют различные теории построения геометрии пространств $\mathscr{F}_n$, одна из которых построена методом Г. Ф. Лаптева и А. М. Васильева в работах [1], [2].

Вопросами определения связности в пространстве $\mathscr{F}_n$ путем построения ковариантного дифференциала занимались Й. И. Хорват, А. Моор, Хассан Акбар–Задек, М. Хасигути и др. В этой заметке строится связность в пространстве $\mathscr{F}_n$ при помощи условий, аналогичных постулатам Э. Картана [3].

1. Основные уравнения. Определяющая система дифференциальных уравнений метрического пространства линейных элементов в произвольном репере имеет вид [1]:

$$\nabla g_{ij} \equiv dg_{ij} - g_{kj}\,\omega_i^k - g_{ik}\,\omega_j^k = g_{ij,k}\,\omega^k + g'_{ij,k}\,\Theta^k, \tag{1}$$

где

$$D\omega^i = [\omega^k,\ \omega_k^i],$$

$$D\omega_j^i = [\omega_j^k,\ \omega_k^i] + [\omega_{jk}^i,\ \omega^k], \tag{2}$$

$$\Theta^i = dv^i + v^k(\omega_k^i - \delta_k^i\,\Theta), \tag{3}$$

$$g'_{ij,k}\,v^k = 0. \tag{4}$$

$$(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

причем $D\Theta = 0$ и $\omega_{jk}^i = \omega_{kj}^i$. В работе [1] репер канонизирован, т. е. в качестве главных форм взяты формы ω^i и ω_1^α $(\alpha = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$. Продолжая систему (1), получаем

$$\begin{gathered}\nabla g_{ij,k} + 2g_{p(i}\,\omega_{j)k}^p + g'_{ij,p}\,\omega_{kl}^p\,v^l = g_{ij,kp}\,\omega^p = g'_{ij,kp}\,\Theta^p,\\ \nabla g'_{ij,k} + g'_{ij,k}\,\Theta = g'_{ij,kp}\,\omega^p + g''_{ij,kp}\,\Theta^p,\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$g_{ij,kp} = g_{ij,pk}, \quad g''_{ij,pk} = g''_{ij,pk},$$

$$g'_{ij,kp}\,v^p = 0.$$

Отображение касательного пространства бесконечно близкого линейного элемента $(u^i+du^i,\ v^i+dv^i)$ на касательное пространство исходного линейного элемента $(u^i,\ v^i)$, т. е. аффинная связность в пространстве $\mathscr{F}_n$ может быть определена при помощи форм связности $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}^i_j$:

$$\tilde{\omega}^i=\omega^i,\quad \tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j+\Gamma^i_{jk}\omega^k+C^i_{jk}\Theta^k. \tag{6}$$

Возникает вопрос, каким требованиям должны подчиняться величины Γ^i_{jk} и C^i_{jk}, чтобы их можно было выразить через компоненты фундаментального об'екта первого порядка пространства $\mathscr{F}_n$, т. е. чтобы им соответствующая связность была бы внутренне инвариантным образом присоединена к тензору g_{ij}. Такую связность мы построим при помощи условий, аналогичных постулатам Э. Картана, которыми он определил связность в финслеровом пространстве [3].

2. Евклидова связность картановского типа. Евклидовой связностью картановского типа, присоединенной к метрическому тензору g_{ij} пространства $\mathscr{F}_n$, назовем аффинную связность, определенную пфаффовыми формами (6) и подчиненную следующим требованиям:

$$1^\circ.\quad \Gamma^i_{jk}(u,\ \rho v)=\Gamma^i_{jk}(u,\ v),\quad C^i_{jk}(u,\ \rho v)=\rho^{-1}C^i_{jk}(u,\ v), \tag{7}$$

$$2^\circ.\quad C^i_{jk}v^k=0, \tag{8}$$

$$3^\circ.\quad \tilde{\nabla}g_{ij}\equiv dg_{ij}-g_{kj}\tilde{\omega}^k_i-g_{ik}\tilde{\omega}^k_j=0, \tag{9}$$

$$4^\circ.\quad C^i_{jk}=C^i_{kj}, \tag{10}$$

и

$$5^\circ.\quad \Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^{*i}_{kj}, \tag{11}$$

где

$$\Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^i_{jk}-C^i_{jp}\Gamma^p_{sk}v^s. \tag{12}$$

Картановский постулат

$$C_{ijk}=C_{jik},$$

где

$$C_{ijk}=g_{ip}C^p_{ik}$$

заменен требованием 4°. Если пространство $\mathscr{F}_n$ является пространством Финслера, то картановский постулат $C_{ijk}=C_{jik}$ и требование 4° авляются эквивалентными.

Теорема 1. Евклидовая связность картановского типа определяется через компоненты фундаментального об'екта первого порядка пространства $\mathscr{F}_n$ однозначно, если

$$\det\|H^i_j\|\neq 0,\quad \det\|H^{ik}_{jl}\|\neq 0,$$

где

$$H^i_j=\delta^i_j+g^{ik}g'_{k0,j}, \tag{13}$$

$$H^{ik}_{jl}=\delta^i_l\delta^k_j+\frac{1}{2}g^{ip}g'_{0p,l}\delta^k_j-\frac{1}{2}g^{ik}g'_{j0,l}+\frac{1}{4}g^{ij}g^{qk}g'_{pj,s}\tilde{H}^s_q g'_{00,l}, \tag{14}$$

$$H^i_k\tilde{H}^k_j=\delta^i_j,\quad H^k_j\tilde{H}^i_k=\delta^i_j, \tag{15}$$

$$g^{ij}=\frac{\partial \ln\det\|g_{pq}\|}{\partial g_{ij}},$$

причем индекс „0“ означает свертивание с v^i.

Доказательство. Если

$$\tilde{\Theta}^i=dv^i+\tilde{\omega}^i_k v^k-\Theta v^k,$$

то, в силу (6), (8) и (10), будем иметь

$$\Theta^i = \tilde{\Theta}^i - \Gamma^i_{0k}\,\omega^k .$$

Следует заметить, что

$$\Gamma^{*i}_{0j} = \Gamma^i_{0j} .$$

Далее, подставляя выражения этих форм в (6), получим

$$\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + \Gamma^{*i}_{jk}\,\omega^k + C^i_{jk}\,\tilde{\Theta}^k \tag{6'}$$

или

$$\omega^i_j = \tilde{\omega}^i_j - \Gamma^{*i}_{jk}\,\omega^k - C^i_{jk}\,\tilde{\Theta}^k. \tag{6''}$$

Заметим, что равенства (9), согласно (1) и (6″), равносильны равенствам

$$\nabla_k g_{ij} \equiv g_{ij,\,k} - g'_{ij,\,p}\,\Gamma^p_{0k} - g_{ip}\,\Gamma^{*p}_{jk} - g_{pj}\,\Gamma^{*p}_{ik} = 0, \tag{16}$$

и

$$\nabla'_k g_{ij} \equiv g'_{ij,\,k} - g_{ip}\,C^p_{jk} + g_{pj}\,C^p_{ik} = 0. \tag{17}$$

Величины $\nabla_k g_{ij}$ и $\nabla'_k g_{ij}$ будем называть соответственно неголономными картановскими ковариантными производными первого и второго рода метрического тензора g_{ij}, а процесс получения таких производных — неголономным ковариантным дифференцированием в пространстве $\mathscr{F}_n$.

Неголономные картановские ковариантные производные произвольного тензорного поля $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ можно определить тогда и только тогда, когда известна система дифференциальных уравнений этого поля, т. е. когда известны величины $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q,\,k}$ и $T'^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q,\,k}$.

Общее решение системы уравнений (17), в силу (10), имеет вид

$$C^i_{jk} = \frac{1}{2}\,g^{il}\left(g'_{il,\,k} + g'_{lk,\,j} - g'_{kj,\,l}\right). \tag{18}$$

Если ввести обозначения

$$\mathfrak{X}^k_{ij} = \frac{1}{2}\,g^{ks}\left(g_{is,\,j} + g_{sj,\,i} - g_{ji,\,s}\right), \tag{19}$$

то из уравнений (17) и уравнений, которые получаются из (17) при помощи циклировании индексов i, j и k, получается

$$\Gamma^{*k}_{ij} = \mathfrak{X}^k_{ij} - \frac{1}{2}\,g^{ks}\left(g'_{is,\,r}\,\Gamma^r_{oj} + g'_{sj,\,r}\,\Gamma^r_{oi} - g'_{ji,\,r}\,\Gamma^r_{os}\right). \tag{20}$$

Так как систему (12) можно переписать следующим образом

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} + C^i_{js}\,\Gamma^{*s}_{ok}\,, \tag{12'}$$

то для определения величин Γ^i_{jk} достаточно найти Γ^i_{0k} (или Γ^{*i}_{0k}). Свертывая (20) с компонентами линейного элемента, мы получим:

$$\Gamma^i_{oj} = \mathfrak{X}^i_{oj} - \frac{1}{2}\,g^{ik}\left(g'_{ok,\,s}\,\Gamma^s_{oj} + g'_{kj,\,s}\,\Gamma^s_{oo} - g'_{jo,\,s}\,\Gamma^s_{ok}\right), \tag{21}$$

$$H^i_k\,\Gamma^k_{oo} = \mathfrak{X}^i_{oo} + \frac{1}{2}\,g^{ik}\,g'_{oo,\,s}\,\Gamma^s_{ok}\,. \tag{22}$$

Так как $\det\|H^i_j\| \neq 0$, то из (22) полученное выражение для Γ^i_{oo} подставив в (21), будем иметь

$$H^{is}_{jk}\,\Gamma^k_{os} = \mathfrak{X}^i_{oj} - \frac{1}{2}\,g^{ik}\,g'_{kj,\,s}\,\tilde{H}^s_r\,\mathfrak{X}^r_{oo}\,. \tag{23}$$

Если ввести тензор $\tilde{H}^{ik}_{jr}$, определенный соотношениями

$$H^{il}_{sk}\,\tilde{H}^{ks}_{jt} = \delta^i_k\,\delta^l_j, \quad H^{it}_{js}\,\tilde{H}^{sl}_{tk} = \delta^i_k\,\delta^l_j\,, \tag{24}$$

то решения системы (23) можно представить в виде:

$$\Gamma^i_{oj} = \tilde{H}^{ik}_{jr}\left(\mathfrak{X}^r_{ok} - \frac{1}{2} g^{rm} g'_{mk,s} \tilde{H}^s_t \mathfrak{X}^t_{oo}\right). \tag{25}$$

Отсюда и из уравнений (12), (18) и (20) следует, что Γ^i_{jk} и C^i_{jk} определены однозначно.

Замечание 1. Если $\mathcal{F}_n$ является финслеровым пространством, то

$$H^i_j = \delta^i_j, \quad H^{ik}_{jl} = \delta^i_l \delta^k_j .$$

Замечание 2. Если $\mathcal{F}_n$ финслерово и репер голономный, то полученная связность совпадает со связностью Э. Картана [3].

3. Пучек евклидовых связностей. Евклидовой связностью, присоединенной к метрическому тензору g_{ij} пространства $\mathcal{F}_n$, называется аффинная связность, определенная формами (6) и подчиненная требованиям (7), (8), (9) и

$$C^i_{kj} v^k = 0. \tag{26}$$

Теорема 2. Если

$$\det \| H^i_j \| \neq 0, \quad \det \| H^{ik}_{jl} \| \neq 0,$$

то совокупность евклидовых связностей, инвариантным образом присоединенных к тензору g_{ij} пространства $\mathcal{F}_n$, определяются через компоненты фундаментального об'екта первого порядка пространства $\mathcal{F}_n$ с произволом двух тензоров P^i_{jk} и R^i_{jk}, удовлетворяющих соотношениям

$$P^i_{(jk)} = 0, \quad R^i_{(jk)} = 0, \quad P^i_{[oj]} = 0, \quad P^i_{[jo]} = 0.$$

Доказательство этой теоремы аналогичное доказательству теоремы 1.

Евклидовые связности в смысле А. Моора [7] определяются при помощи требований, отличных от требований этой заметки. Для евклидовых связностей в смысле А. Моора теорема 2 доказана А. Моором [7], а затем передоказана Й. Вэнстоуном [8].

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
10.V.1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас. К теории кривых метрического пространства линейных элементов, ДАН СССР, 1959, т. 127, № 1, 9—12.
2. В. И. Близникас. К дифференциальной геометрии метрических пространств линейных элементов, Учен. записки Вильнюсского гос. пед. ин-та, 1960, т. 10, 11—29.
3. E. Cartan. Les espaces de Finsler, Paris, 1934.
4. M. Hashiguchi. On parallel displacements in Finsler spaces, J. Math. Soc. Japan, 1958, 10, No 4, 365—379.
5. Hassan Akbar-Zadeh. Sur une connexion euclidienne d'espace d'éléments linéaires, C. R. Acad. sci., 1957, 245, No 1, 26—28.
6. J. I. Horvath und A. Moor. Entwicklung einer Feldtheorie begründet auf einer allgemeiner metrischen Linienelementraum, I, II, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.—Indagationes Math., 1955, 17, No 4, 421—430; No 5, 581—587.
7. A. Moor. Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, Acta Sci. Math., Szeged, 1956, 17, 85—120.
8. J. R. Vanstone. A generalization of Finsler geometry, Canad. J. Math., 1962, 14, No 1, 87—112.

KARTANO TIPO EUKLIDINIS SĄRYŠIS METRINĖJE TIESINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖJE

V. BLIZNIKAS

Kartano tipo euklidiniu sąryšiu yra vadinamas toks afininis sąryšis, kurio formų koeficientai Γ^i_{jk} ir C^i_{jk} patenkina sąlygas:

$$\nabla_k g_{ij}=0, \ \nabla'_k g_{ij}=0$$

ir

$$C^i_{j0}=0, \quad C^i_{jk}=C^i_{kj}, \quad \Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^{*i}_{kj},$$

kur

$$\Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^i_{jk}-C^i_{jp}\,\Gamma^p_{0k}.$$

Įrodoma, kad minėto tipo sąryšio koeficientai vienareikšmiškai išsireiškia per erdvės $\mathcal{F}_n$ pirmos eilės fundamentalinio objekto komponentes.

EUKLIDISCHER ZUSAMMENHANG DER ART VON CARTAN DES METRISCHEN LINIENELEMENTRAUMES

V. BLIZNIKAS

(Zusammenfassung)

Die metrische Struktur des Linienelementraumes kann durch die Angabe des metrischen Grundtensors g_{ij} bestimmt werden. Diesen Raum nennt man metrischen Linienelementraum.

In diesem Artikel wird der Euklidische Zusammenhang der Art von Cartan mit folgenden Forderungen gebaut:

1. Der Zusammenhang soll metrisch sein.
2. Der Tensor C^k_{ij} soll in den beiden Indizes i und j symmetrisch sein.
3. Γ^{*i}_{jk} soll in j und k symmetrisch sein.

Diese Forderungen bestimmen die Zusammenhangsparameter unseres Raumes vollständig.