ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
II LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
1962

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ СВЯЗНОСТИ

В. БЛИЗНИКАС

А. Эйнштейн, в связи с единой теорией поля, предложил обобщить риманово пространство, определяя метрику при помощи невырожденного дважды ковариантного несимметрического тензора [8]. Л. П. Эйзенхарт назвал этот класс пространств обобщенными римановыми пространствами [9]. Общая теория обобщенных римановых пространств тензорными методами построена в работах Л. П. Эйзенхарта [9] и В. Главатого [10], причем В. Главатый построил теорию обобщенных римановых пространств, аффинная связность в которых определяется из уравнений А. Эйнштейна:

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} - h_{ip}\,\Gamma^p_{jk} - h_{pj}\,\Gamma^p_{ki} = 0.$$

Решением этих уравнений занимались А. Стивенсон, Л. Сантало, П. Килмистер, Й. Виноргадский, М. Тоннла и др.* Если аффинная связность без кручения, то уравнения А. Эйнштейна совпадают с уравнениями Г. Вейля. Для случая несимметрического метрического тензора и аффинной связности с кручением уравнения Г. Вейля, по-видимому, еще никем не решены. В монографии [10] указаны только необходимые условия совместности системы уравнений Г. Вейля.

Так как в широко распространенной терминологии Э. Картана риманово пространство рассматривается как частный случай точечного пространства евклидовой связности (риманово пространство с кручением, компоненты метрического тензора которого и коэффициенты аффинной связности связаны уравнениями Г. Вейля), то обобщенное риманово пространство с аффинной связностью, относительно которой несимметрический метрический тензор ковариантно постоянный, следовало бы называть *точечным пространством обобщенной евклидовой связности*. Это название более оправдано еще и тем, что локальные пространства рассматриваемого многообразия — обобщенно евклидовые.

В настоящей статье строится общая теория точечных пространств обобщенной евклидовой связности, теория кривых и теория гиперповерхностей, оснащенных левой нормалью, нормалью и правой нормалью. Теория кривых

* Подробная библиография, касающаяся этого вопроса, имеется в монографии В. Главатого [10].

и гиперповерхностей обобщенного евклидова пространства построена тензорным методом С. М. Бахрахом [1], [2]. Мишра рассматривал m-мерную поверхность, оснащенную нормалями, обобщенного риманова пространства с кристоффелевой связностью, т. е. со связностью следующего вида [11]:

$$\Delta_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{(ik)}}{\partial u^j}+\frac{\partial h_{(kj)}}{\partial u^i}-\frac{\partial h_{(ij)}}{\partial u^k}\right),$$

где h_{ij} фундаментальный метрический тензор обобщенного риманова пространства.

В работе основным аппаратом исследования является теоретико-групповой метод дифференциально-геометрического исследования погруженных многообразий, развитый Г. Ф. Лаптевым [4], [5] и А. М. Васильевым [3] (метод Г. Ф. Лаптева—А. М. Васильева). В последнее время этот метод применяется к решению разнообразных задач дифференциальной геометрии.

§ 1. Пространство обобщенной евклидовой связности

1. Рассмотрим n-мерное аналитическое многообразие $\mathfrak{M}_n$, каждая точка A которого определяется n координатами $u^1, u^2, \ldots, u^n$. В дальнейшем это многообразие $\mathfrak{M}_n$ будем называть *базой*. С текущей точкой $A(u)$ базы $\mathfrak{M}_n$ свяжем n-мерное обобщенное евклидово пространство* $H_n(A)$. Будем считать, что в пространстве $H_n(A)$ зафиксирована точка O, которая отождествлена с точкой $A(u)$ базы $\mathfrak{M}_n$, и что пространство $H_n(A)$ отнесено к аффинному реперу $\{A(u), e_1(u), \ldots, e_n(u)\}$, вершина которого совпадает с точкой $A(u)$. Каждое такое пространство H_n называется *локальным пространством* (*слоем*) точки $A(u)$, а репер $\{A(u), e_1(u), \ldots, e_n(u)\}$ — подвижным аффинным репером.

Задачу введения фундаментально-групповой связности в многообразие локальных пространств $\{H_n(A)\}$, связанных с базой $\mathfrak{M}_n$ можно свести к установлению отображения соседнего локального пространства на исходное [4]. Пусть в многообразие локальных пространств $\{H_n(A)\}$ введена связность, определенная обобщенно евклидовым преобразованием точек исходного пространства в образы соответствующих им точек соседнего локального пространства. Таким образом определенную связность будем называть *обобщенно евклидовой связностью* (фундаментальная группа — группа обобщенных евклидовых движений, т. е. обратимых аффинных преобразований, сохраняющих скалярное произведение любой пары векторов пространства $H_n(A)$), а многообразие $\mathfrak{M}_n$, на котором определена обобщенно евклидовая связность, — *пространством обобщенной евклидовой связности* $\mathfrak{H}_n$.

2. Определяющее обобщенно евклидовую связность отображение соседнего локального пространства $H_n(A+dA)$ на исходное локальное пространство $H_n(A)$ можно определить аффинным отображением начального локального

* Обобщенным евклидовым пространством n-измерений H_n называется вещественное ориентированное n-мерное аффинное пространство, в котором определено скалярное произведение векторов при помощи не вырожденного дважды ковариантного несимметрического тензора, симметрическая часть которого определяет некоторую собственно евклидовую метрику [1].

репера $\{A(u+du),\ e_i(u+du)\}$ пространства $H_n(A+dA)$, в некоторый репер $\{A(u,\ du),\ e_i(u,\ du)\}$ исходного пространства $H_n(A)$:

$$A(u+du)\ \to\ A(u,\ du)=\omega^i e_i(u)+\rho\varepsilon^i e_i(u),$$
$$e_i(u+du)\ \to\ e_i(u,\ du)=e_i(u)+\omega_i^k e_k(u)+\rho\varepsilon_i^k e_k(u), \tag{1}$$

где

$$\rho=\sum_{i=1}^{n}|\omega^i|,\quad \lim_{\rho\to 0}\varepsilon^i=0,\quad \lim_{\rho\to 0}\varepsilon_i^k=0$$
$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

сохраняющим несимметрическое скалярное произведение любой пары векторов пространства $H_n(A)$. Пфаффовые формы ω^i и ω_i^j имеют следующую структуру [3]:

$$D\omega^i=[\omega^j,\ \omega_j^i]+R_{pq}^i[\omega^p,\ \omega^q],$$
$$D\omega_j^i=[\omega_j^k,\ \omega_k^i]+R_{jpq}^i[\omega^p,\ \omega^q]$$
$$(R_{(pq)}^i=0,\quad R_{j(pq)}^i=0), \tag{2}$$

где R_{jk}^i – тензор кручения и R_{jkl}^i – тензор кривизны. Пусть $x=x^i(u)\,e_i(u)$, $y=y^i(u)\,e_i(u)$ – произвольные векторы пространства $H_n(A)$. Скалярное произведение этих векторов имеет следующий вид

$$(x,\ y)=h_{ij}(u)\,x^i(u)\,y^j(u), \tag{3}$$

где

$$h_{ij}(u)=\Big(e_i(u),\quad e_j(u)\Big). \tag{4}$$

Очевидно, что скалярное произведение в каждом $H_n(u)$ определяется заданием тензорного поля $h_{ij}(u)$ на $\mathfrak{M}_n$. Этот тензор мы будем называть *фундаментальным билинейно-метрическим тензором* пространства $\mathfrak{H}_n$ (предполагается, что $\det\|h_{ij}\|\neq 0$).

Если вектор $x^i(u+du)\,e_i(u+du)$ соседнего локального пространства при отображении (1) отображается в вектор $x_i(u)\,e_i(u)$ исходного локального пространства, то имеет место соотношение:

$$x^i(u,\ du)=x^i(u)-\omega_k^i\,x^k(u). \tag{5}$$

Потребуем, чтобы при определяющем связность отображении (1) скалярное произведение векторов сохранялось. Пользуясь уравнениями (1), (3) и (5), мы получим

$$(x,\ y)_{(u+du)}\ \to\ (x,\ y)_{(u,\ du)}=(x,\ y)_{(u)}+\nabla h_{ij}(u)\,x^i(u)\,y^j(u)+\ldots,$$

откуда и следует необходимое и достаточное условие локальной инвариантности скалярного произведения:

$$\nabla h_{ij}\equiv dh_{ij}-h_{ik}\,\omega_j^k-h_{kj}\,\omega_i^k=0. \tag{6}$$

Дифференцируя внешним образом эту систему дифференциальных уравненый, мы получим

$$h_{ik}\,R_{jpq}^k+h_{kj}\,R_{ipq}^k=0. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$\nabla g_{ij}=0,\ \ \nabla a_{ij}=0$$

и

$$dh-2h\omega=0, \quad dg-2g\omega=0, \quad da-2a\omega=0, \tag{8}$$

где

$$g_{ij}=h_{(ij)}, \quad a_{ij}=h_{[ij]}, \quad h=\det\|h_{ij}\|, \quad g=\det\|g_{ij}\|, \quad a=\det\|a_{ij}\|,$$

$$\omega=\omega_1^1+\omega_2^2+\cdots+\omega_n^n.$$

Если $h\neq0$, $g\neq0$ и $a\neq0$ ($a\neq0$ только для пространств $\mathfrak{H}_n$ с четномерной базой $\mathfrak{M}_n$), то из дифференциальных уравнений (8) следует, что

$$h:g:a=h_0:g_0:a_0, \tag{9}$$

где h_0, g_0 и a_0 — некоторые константы. Эти условия являются необходимыми условиями совместности системы дифференциальных уравнений (6). Если $n=2$, то условия (9) являются и достаточными. В этом случае фундаментальный билинейно-метрический тензор h_{ij} можно построить следующим образом:

$$\left\|\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} g_{11}, & g_{12}+cg \\ g_{21}-cg, & g_{22}\end{matrix}\right\|, \tag{10}$$

где c — произвольная константа и g_{ij} — метрический тензор двумерного риманова пространства. Если пространство $\mathfrak{H}_n$ является прямым произведением пространств $\mathfrak{H}_2$, метрика которых имеет вид (10), то условия (9) являются необходимыми и достаточными условиями совместности системы (6). Этим примером доказано существование четномерных пространств $\mathfrak{H}_n$. Аналогичным образом можно построить и пример нечетномерного пространства $\mathfrak{H}_n$. Например, таким пространством является прямое произведение $(2n-3)$ — мерного точечного пространства евклидовой связности и пространства $\mathfrak{H}_2$.

К пространству обобщенной евклидовой связности $\mathfrak{H}_n$ естественным образом присоединяется два пространства — точечное пространство евклидовой связности с метрическим тензором g_{ij} и симплектическое пространство с метрическим тензором a_{ij}. Если квадратичная форма присоединенного пространства евклидовой связности является положительно определенной, то пространство $\mathfrak{H}_n$ будем называть пространством *обобщенной собственно евклидовой связности*.

§ 2. Теория кривых

Кривую пространства обобщенной собственно евклидовой связности $\mathfrak{H}_n$ можно определить уравнениями:

$$\omega^i=l^i_{(1)}\,ds, \tag{11}$$

где ds — дифференциал дуги кривой. Продолжая эту систему дифференциальных уравнений, получим

$$dl^i_{(j)}+l^k_{(j)}\,\omega^i_k=l^i_{(j+1)}\,ds. \tag{12}$$

В локальном пространстве $H_n(A)$ построим векторы

$$L_i=l^k_{(i)}\,e_k, \tag{13}$$

инвариантно связанные с точкой A рассматриваемой кривой. Если предположить, что векторы L_i линейно независимые, то в каждом локальном пространстве $H_n(A)$ можно построить *левонормированный*, *ортонормированный* и *правонормированный реперы*. Единичные векторы этих реперов имеют вид:

$$\boldsymbol{n}_i = \frac{1}{\sqrt{L_{i-1} L_i}} \begin{vmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1,\, i-1} & L_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{i1} & \cdots & l_{i,\, i-1} & L_i \end{vmatrix}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{\sqrt{N_{i-1} N_i}} \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1,\, i-1} & L_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{i1} & \cdots & \lambda_{i,\, i-1} & L_i \end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{m}_i = \frac{1}{\sqrt{L_{i-1} L_i}} \begin{vmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{i-1,\, 1} & \cdots & l_{i,\, i-1} \\ L_1 & \cdots & L_i \end{vmatrix}, \tag{16}$$

где

$$l_{ij} = h_{pq}\, l^p_{(i)}\, l^q_{(j)}, \quad \lambda_{ij} = g_{pq}\, l^p_{(i)}\, l^q_{(j)}, \quad L_i = \det \| l_{11} \cdots l_{ii} \|,$$
$$N_i = \det \| \lambda_{11} \cdots \lambda_{ii} \|. \tag{17}$$

Реперы $\{A, \boldsymbol{n}_i\}$, $\{A, \boldsymbol{v}_i\}$ и $\{A, \boldsymbol{m}_i\}$ будем называть соответственно *левым репером Френе*, *репером Френе* и *правым репером Френе кривой* пространства $\mathfrak{H}_n$, ибо

$$(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_j) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i>j, \end{cases} \tag{18}$$

$$\{\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{19}$$

$$(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i<j, \end{cases} \tag{20}$$

где скобки $\{\ \}$ означают скалярное произведение векторов в смысле метрики, определенной тензором g_{ij}.

Так как рассматриваемое пространство $\mathfrak{H}_n$ со связностью, то сравнивая соответствующие реперы Френе, построенные в локальных пространствах $H_n(s)$ и $H_n(s+ds)$, мы получим

$$d\boldsymbol{n}_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \boldsymbol{n}_j, \quad d\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \Psi_{ij} \boldsymbol{v}_j, \quad d\boldsymbol{m}_i = \sum_{j=1}^{n} \chi_{ij} \boldsymbol{m}_j. \tag{21}$$

Оказывается, что пфаффовые формы φ_{ij}, Ψ_{ij} и χ_{ij} связаны соотношениями:

$$\frac{1}{2}(\varphi_{ij} + \varphi_{ji}) + \sum_{k<j} \varphi_{ik} n_{kj} + \sum_{k>i} \varphi_{jk} n_{ik} = 0, \tag{22}$$

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}(\chi_{ij} + \chi_{ji}) + \sum_{k>j} \chi_{ik} m_{kj} + \sum_{k<i} \chi_{jk} m_{ik} = 0, \tag{24}$$

где

$$n_{ij}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_j), \quad i<j, \tag{25}$$

$$m_{ij}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j), \quad i>j. \tag{26}$$

Дифференцирование (13), (14) и (15), в силу (12), (13), (22), (23) и (24), дает

$$\frac{d\boldsymbol{n}_i}{ds}=-k_{i-1}\boldsymbol{n}_{i-1}+(n_{i-1,\,i}k_{i-1}-n_{i,\,i+1}k_i)\boldsymbol{n}_i+k_i\boldsymbol{n}_{i+1}, \tag{27}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}_i}{ds}=-\chi_{i-1}\boldsymbol{\nu}_{i-1}+\chi_i\boldsymbol{\nu}_{i+1}, \tag{28}$$

$$\frac{d\boldsymbol{m}_i}{ds}=-k_{i-1}\boldsymbol{m}_{i-1}+(m_{i,\,i-1}k_{i-1}-m_{i+1,\,i}k_i)\boldsymbol{m}_i+k_i\boldsymbol{m}_{i+1}, \tag{29}$$

где

$$k_i=\frac{\sqrt{L_{i-1}L_{i+1}}}{L_i}, \quad \chi_i=\frac{\sqrt{N_{i-1}N_{i+1}}}{N_i}, \tag{30}$$

причем

$$L_0=N_0=1, \quad L_{n+1}=N_{n+1}=0.$$

Введем величины t_{ij}, определенные следующим образом:

$$t_{ij}=(\boldsymbol{\nu}_i, \boldsymbol{\nu}_j), \quad i\neq j. \tag{31}$$

Дифференцируя (25), (26) и (31), в силу (27), (28) и (29), получаем

$$\frac{dn_{ij}}{ds}=k_{i-1}(-n_{i-1,\,j}+n_{i-1,\,i}n_{ij})+k_i(n_{i-1,\,j}-n_{i,\,i+1}n_{ij})+k_{j-1}(-n_{i,\,j-1}+n_{j,\,j-1}n_{ij})+$$
$$+k_j(n_{i,\,j+1}-n_{j+1,\,j}n_{ij}), \tag{32}$$

$$\frac{dm_{ij}}{ds}=k_{i-1}(-m_{i-1,\,j}+m_{i,\,i+1}m_{ij})+k_i(m_{i+1,\,j}-m_{i+1,\,i}m_{ij})+k_{j-1}(-m_{i,\,j-1}+$$
$$+m_{j,\,j-1}m_{ij})+k_j(m_{i,\,j+1}-m_{j+1,\,j}m_{ij}), \tag{33}$$

$$\frac{dt_{ij}}{ds}=-\chi_{i-1}t_{i-1,\,j}+\chi_{i+1}t_{i+1,\,j}-\chi_{j-1}t_{i,\,j-1}+\chi_{j+1}t_{i,\,j+1}. \tag{34}$$

Величины χ_α назовем *кривизнами*, а k_α — *левыми-правыми кривизнами* рассматриваемой кривой пространства $\mathfrak{H}_n$. Как показывают формулы (17) и (30), кривизны χ_α и k_α являются функциями компонент фундаментального дифференциально-геометрического объекта n-го порядка кривой пространства $\mathfrak{H}_n$. Системы величин n_{ij}, t_{ij} и m_{ij} назовем *характеристиками* соответствующих реперов Френе, а векторы $\boldsymbol{n}_\alpha$, $\boldsymbol{\nu}_\alpha$ и $\boldsymbol{m}_\alpha$ — *левыми нормалями, нормалями и правыми нормалями* соответственно.

Деривационные уравнения (27), (28) и (29) являются аналогами уравнений Френе. Если пространство $\mathfrak{H}_n$ является пространством евклидовой связности, то $n_{ij}=m_{ij}=0$, $L_i=N_i$ и уравнения (27), (28) и (29) совпадают. В этом случае уравнения (28) являются формулами Френе кривой пространства евклидовой связности. Для кривой риманова пространства эти формулы впервые получил Бляшке тензорными методами [7]. Деривационные уравнения кривой обобщенного евклидова пространства, аналогичные уравнениям (27), (28) и (29), получены С. М. Бахрахом тоже тензорными методами [1].

Из деривационных уравнений (27) и (32) следует, что *кривая с левым оснащением определяется левыми кривизнами и допустимыми характеристиками левого репера Френе с точностью до констант*. Аналогичные утверждения имеют место и для кривых, оснащенных репером Френе и правым репером Френе.

Так как векторы левого репера Френе можно выразить через векторы репера Френе, то между кривизнами χ_α и левыми-правыми кривизнами k_α кривой пространства $\mathfrak{H}_n$ существуют зависимости. Векторы левонормированного репера пространства $H_n(A)$, построенного из векторов ортонормированного репера Френе, имеют вид:

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_i}} \begin{vmatrix} P_{11} & \cdots\cdots & P_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{i-1,1} & \cdots\cdots & P_{i-1,i} \\ \nu_1 & \cdots\cdots & \nu_i \end{vmatrix}, \tag{35}$$

где

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{i1} & \cdots & P_{ii} \end{vmatrix} \tag{36}$$

и

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j, \\ t_{ij}, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, что (35) можно переписать так

$$n_i = \frac{\Delta_{i-1}}{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_i}} \nu_i + (\cdots)\nu_{i-1} + \cdots + (\cdots)\nu_1.$$

Дифференцируя эти соотношения и пользуясь уравнениями (27), (28), (35) и (36), мы получаем

$$k_i \sqrt{\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}} \nu_{i+1} + \cdots + (\cdots)\nu_1 = \chi_i \sqrt{\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}} \nu_{i+1} + \cdots + (\cdots)\nu_1,$$

откуда и следует, что

$$k_i = \frac{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_{i+1}}}{\Delta_i} \chi_i.$$

§ 3. Теория гиперповерхностей

1. Пусть в $\mathfrak{H}_n$ задана гиперповерхность $\mathfrak{H}_{n-1}$:

$$u^i = f^i(v^\alpha),$$

где v^α — независимые параметры. Предполагается, что матрица $\left\| \frac{\partial f^i}{\partial v^\alpha} \right\|$ имеет ранг $n-1$. Если вершина репера $\{A, e_i\}$ лежит на гиперповерхности, то

$$\omega^i = \Lambda^i_\alpha \Theta^\alpha, \tag{37}$$

где пфаффовые формы Θ^α образуют произвольный базис картановского кольца дифференциальных форм, порожденного дифференциалами параметров v^α. Так как параметры на гиперповерхности допускает произвольное регулярное аналитическое преобразование

$$v^\alpha = g^\alpha(v^{\beta'}),$$

то формы Θ^α можно считать инвариантными формами транзитивной псевдогруппы Ли-Картана (бесконечной аналитической группы), структурные уравнения которой (уравнения Ли-Маурера-Картана) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &D\Theta^\alpha=[\Theta^\beta,\ \Theta^\alpha_\beta],\\ &D\Theta^\alpha_\beta=[\Theta^\gamma_\beta,\ \Theta^\alpha_\gamma]+[\Theta^\alpha_{\beta\gamma},\ \Theta^\gamma],\\ &D\Theta^\alpha_{\beta\gamma}=[\Theta^\varepsilon_{\beta\gamma},\ \Theta^\alpha_\varepsilon]-[\Theta^\alpha_{\varepsilon\gamma},\ \Theta^\varepsilon_\beta]-[\Theta^\alpha_{\beta\varepsilon},\ \Theta^\varepsilon_\gamma]+[\Theta^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon},\ \Theta^\varepsilon], \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где пфаффовые формы $\Theta^\alpha_{\beta\gamma}$ и $\Theta^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}$ симметричные по всем нижним индексам.

Продолжение системы (37) приводит к следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &d\Lambda^i_\alpha-\Lambda^i_\gamma\,\Theta^\gamma_\alpha+\Lambda^k_\alpha\,\omega^i_k=\Lambda^i_{\alpha\beta}\,\Theta^\beta,\\ &d\Lambda^i_{\alpha\beta}-\Lambda^i_{\gamma\beta}\,\Theta^\gamma_\alpha-\Lambda^i_{\alpha\gamma}\,\Theta^\gamma_\beta+\Lambda^k_{\alpha\beta}\,\omega^i_k+\Lambda^i_\gamma\,\Theta^\gamma_{\alpha\beta}=\Lambda^i_{\alpha\beta\gamma}\,\Theta^\gamma,\\ &d\Lambda^i_{\alpha\beta\gamma}-\Lambda^i_{\varepsilon\beta\gamma}\,\Theta^\varepsilon_\alpha-\Lambda^i_{\alpha\varepsilon\gamma}\,\Theta^\varepsilon_\beta-\Lambda^i_{\alpha\beta\varepsilon}\,\Theta^\varepsilon_\gamma+\Lambda^k_{\alpha\beta\gamma}\omega^i_k+2\,\Lambda^i_{(\alpha|\varepsilon|}\,\Theta^\varepsilon_{\beta)\,\gamma}-\Lambda^i_\varepsilon\,\Theta^\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=\\ &\qquad=\Lambda^i_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\,\Theta^\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda^i_{[\alpha\beta]}=-R^i_{pq}\,\Lambda^p_\alpha\,\Lambda^q_\beta,\\ &\Lambda^i_{\alpha\,[\beta\gamma]}=-R^i_{kpq}\,\Lambda^k_\alpha\,\Lambda^p_\beta\,\Lambda^q_\gamma,\\ &\Lambda^i_{\alpha\beta\,[\gamma\varepsilon]}=-R^i_{kpq}\,\Lambda^k_{\alpha\beta}\,\Lambda^p_\gamma\,\Lambda^q_\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Величины Λ^i_α, $\Lambda^i_{\alpha\beta}$ и $\Lambda^i_{\alpha\beta\gamma}$ образуют *фундаментальный дифференциально-геометрический объект третьего порядка гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$.

Линейно независимые векторы

$$\Lambda_\alpha=\Lambda^i_\alpha\,e_i \tag{41}$$

определяют в каждой точке A гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ касательную гиперплоскость $H_{n-1}(A)$ (лежащую в локальном пространстве $H_n(A)$). Система величин Λ^i_α образует смешанный тензор, который назовем *неголономным связующим тензором гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$.

2. *Левый сопровождающий репер гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$. Прямую пространства $H_n(A)$, ортогональную к $H_{n-1}(A)$ в $H_n(A)$ слева и проходящую через A, назовем левой нормалью гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$. Координаты единичного вектора $\boldsymbol{n}$ левой нормали гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} &h_{ij}\,n^i\,\Lambda^j_\alpha=0,\\ &g_{ij}\,n^i\,n^j=1. \end{aligned} \tag{42}$$

Если введем тензор h^{ij}, определенный соотношениями

$$h^{qi}\,h_{ip}=\delta^q_p,\quad h^{iq}\,h_{pi}=\delta^q_p, \tag{43}$$

то решение системы (42) можно записать в виде:

$$n^i=\frac{h^{li}\,\xi_l}{\sqrt{h^{(pq)}\,\xi_p\,\xi_q}}, \tag{44}$$

где

$$\xi_i=\sigma_{i\,i_1\ldots i_{n-1}}\,\Lambda^{i_1}_{[1}\cdots\Lambda^{i_{n-1}}_{n-1]}$$

и

$$\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} - \text{четная подстановка,} \\ -1, & \text{если } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} - \text{нечетная подстановка,} \\ 0, & \text{если хотя бы два индекса равны.} \end{cases}$$

Дифференциалные уравнения для координат единичного вектора левой нормали гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ имеют следующий вид:

$$dn^i + n^k \omega_k^i = n_\alpha^i \Theta^\alpha, \tag{45}$$

где

$$n_\alpha^i = \frac{n^{ipqr} \xi_p \xi_q \xi_{r\alpha}}{(h^{(jk)} \xi_j \xi_k)^{3/2}}, \quad n^{ipqr} = \begin{vmatrix} h^{(pq)} & h^{(pr)} \\ h^{qi} & h^{ri} \end{vmatrix},$$

$$\xi_{l\alpha} = \frac{\partial \xi_l}{\partial \Lambda_\beta^k} \tilde{\Lambda}_{\beta\alpha}^k, \quad \tilde{\Lambda}_{\beta\alpha}^k = (-1)^{k+\beta+1} \Lambda_{\beta\alpha}^k.$$

Фундаментальный билинейно-метрический тензор гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ имеет вид

$$H_{\alpha\beta} = h_{ij} \Lambda_\alpha^i \Lambda_\beta^j \tag{46}$$

и его компоненты удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$dH_{\alpha\beta} - H_{\gamma\beta} \Theta_\alpha^\gamma - H_{\alpha\gamma} \Theta_\beta^\gamma = H_{\alpha\beta,\gamma} \Theta^\gamma, \tag{47}$$

где

$$H_{\alpha\beta,\gamma} = h_{ij} \Lambda_\alpha^i \Lambda_{\beta\gamma}^j + h_{ij} \Lambda_{\alpha\gamma}^i \Lambda_\beta^j.$$

В каждой точке гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ имеем n линейно независимых векторов Λ_α и $\boldsymbol{n}$, которые будем называть *левым сопровождающим репером гиперповерхности*. Так как иа гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ индуцируется несимметрическая метрика, определенная тензором $H_{\alpha\beta}$, то касательные гиперплоскости $H_{n-1}(A)$ являются обобщенно евклидовыми пространствами. В силу того, что гиперповерхность $\mathfrak{H}_{n-1}$ оснащена левой нормалью, то связность в многообразие пространств $\{H_{n-1}(A)\}$ можно установить при помощи проектирования вдоль левой нормали. Таким образом установленную связность на гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ мы назовем *левой индуцированной связностью*.

3. *Левые деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена.* Для гиперповерхностей пространства $\mathfrak{H}_n$ можно составить уравнения, аналогичные деривационным формулам Гаусса-Вейнгартена в случае поверхностей евклидова пространства. Векторы $\Lambda_{\alpha\beta}^i e_i$ и $n_\alpha^i e_i$ допускают представления в виде линейных комбинаций векторов репера $\{A, \Lambda_\alpha, \boldsymbol{n}\}$:

$$\Lambda_{\alpha\beta}^i e_i = L_{\alpha\beta}^\gamma \Lambda_\gamma + l_{\alpha\beta} \boldsymbol{n}, \tag{48}$$

$$n_\alpha^i e_i = l_\alpha^\beta \Lambda_\beta + n_\alpha \boldsymbol{n}, \tag{49}$$

где

$$L_{\alpha\beta}^\gamma = H^{\varepsilon\gamma} h_{ik} \Lambda_{\alpha\beta}^i \Lambda_\varepsilon^k, \tag{50}$$

$$l_{\alpha\beta} = h_{ki} n^k \Lambda_{\alpha\beta}^i, \quad l_\alpha^\beta = -H^{\gamma\beta} l_{\gamma\alpha}, \tag{51}$$

$$n_\alpha = a_{ki} n^k n_\alpha^i; \tag{52}$$

причем

$$H^{\alpha\gamma}H_{\gamma\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}, \quad H^{\gamma\alpha}H_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\beta}.$$

Величины l_α, определенные соотношениями

$$l_\alpha=h_{ij}\Lambda^i_\alpha n^j, \tag{53}$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$dl_\alpha-l_\beta\Theta^\beta_\alpha=(h_{ij}\Lambda^i_{\alpha\beta}n^j+h_{ij}\Lambda^i_\alpha n^j_\beta)\Theta^\beta$$

и образуют тензор, который мы назовем, следуя С. М. Бахраху, *основным левым ковектором гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$. Оказывается, что величины n_α и l_α связаны соотношениями:

$$n_\alpha=\frac{1}{2}H^{\gamma\beta}l_{\gamma\alpha}l_\beta. \tag{54}$$

Уравнения (48) и (49) назовем *левыми деривационными формулами Гаусса-Вейнгартена* гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$. Дифференцируя уравнения (50) и (51_1), получаем

$$dL^\gamma_{\alpha\beta}-L^\gamma_{\varepsilon\beta}\Theta^\varepsilon_\alpha-L^\gamma_{\alpha\varepsilon}\Theta^\varepsilon_\beta+L^\varepsilon_{\alpha\beta}\Theta^\gamma_\varepsilon+\Theta^\gamma_{\alpha\beta}=L^\gamma_{\alpha\beta,\varepsilon}\Theta^\varepsilon, \tag{55}$$

$$dl_{\alpha\beta}-l_{\varepsilon\beta}\Theta^\varepsilon_\alpha-l_{\alpha\varepsilon}\Theta^\varepsilon_\beta=l_{\alpha\beta,\varepsilon}\Theta^\varepsilon, \tag{56}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&L^\gamma_{\alpha\beta,\varepsilon}=H^{\delta\gamma}_{\cdot\cdot,\varepsilon}h_{ik}\Lambda^i_{\alpha\beta}\Lambda^k_\varepsilon+H^{\delta\gamma}h_{ik}\Lambda^i_{\alpha\beta\varepsilon}\Lambda^k_\delta+H^{\delta\gamma}h_{ik}\Lambda^i_{\alpha\beta}\Lambda^k_{\delta\gamma},\\
&l_{\alpha\beta,\varepsilon}=h_{ki}n^k_\varepsilon\Lambda^i_{\alpha\beta}+h_{ki}n^k\Lambda^i_{\alpha\beta\varepsilon},\\
&H^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot,\varepsilon}=-H^{\alpha\gamma}H^{\lambda\beta}H_{\gamma\lambda,\varepsilon},
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

т. е. структура дифференциальных уравнений (55) и (56) показывает, что $L^\gamma_{\alpha\beta}$ – объект аффинной связности, а $l_{\alpha\beta}$ – тензор. Объект $L^\gamma_{\alpha\beta}$ будем называть *объектом левой индуцированной связности гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$, а тензор $l_{\alpha\beta}$ – *левым-правым асимптотическим тензором*. Левая индуцированная связность гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ определяется пфаффовыми формами

$$\tilde\Theta^\alpha=\Theta^\alpha, \quad \tilde\Theta^\alpha_\beta=\Theta^\alpha_\beta+L^\alpha_{\beta\gamma}\Theta^\gamma, \tag{58}$$

имеющими следующую структуру:

$$\left.\begin{aligned}
&D\tilde\Theta^\alpha=[\tilde\Theta^\beta,\ \tilde\Theta^\alpha_\beta]+\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}[\tilde\Theta^\beta,\ \tilde\Theta^\gamma],\\
&D\tilde\Theta^\alpha_\beta=[\tilde\Theta^\gamma_\beta,\ \tilde\Theta^\alpha_\gamma]+\Lambda^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}[\tilde\Theta^\gamma,\ \tilde\Theta^\varepsilon],
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

где

$$\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}=-L^\alpha_{[\beta\gamma]},$$

$$\Lambda^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}=-L^\alpha_{\beta[\gamma,\varepsilon]}-L^\alpha_{\delta[\gamma}L^\delta_{|\beta|\varepsilon]}.$$

Величины $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ образуют тензор, который мы будем называть *тензором левого кручения гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$, а тензор $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}$ – *тензором левой кривизны или левым тензором Римана-Кристоффеля гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$.

4. *Левые обобщенные уравнения Риччи, Гаусса, Петерсона-Кодацци-Майнарди*. Хорошо известно, что между первым и вторым фундаментальными тензорами гиперповерхности риманова пространства существуют аналитические соотношения. Аналогичные соотношения имеют место между фундаментальными билинейно-метрическим и левым асимптотическим тензорами $\mathfrak{H}_{n-1}$

в $\mathfrak{H}_n$. Альтернируя уравнения (48) по индексам α, β и сравнивая коэффициенты при линейно независимых векторах e_i, получим

$$R^i_{pq}\,\Lambda^p_\alpha\,\Lambda^q_\beta=\Lambda^\gamma_{\alpha\beta}\,\Lambda^i_\gamma+h_{pq}\,n^p\,R^q_{sr}\,\Lambda^s_\alpha\,\Lambda^r_\beta\,n^i. \tag{60}$$

Если пространство $\mathfrak{H}_n$ является римановым, то $R^i_{pq}=0$, $\Lambda^i_{\alpha\beta}=\Lambda^i_{\beta\alpha}$ и соотношения (60) выполняются тождественно. Этими соотношениями устанавливается связь между тензорами кручения R^i_{pq} пространства $\mathfrak{H}_n$ и левым тензором кручения гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$. Соотношения (60) мы назовем *левыми обобщенными уравнениями Риччи гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$.

Если на многообразии $\mathfrak{N}_n$, локальные координаты которого являются первыми интегралами системы $\vartheta^i=0$, причем $D\vartheta^i=[\vartheta^k,\ \vartheta^i_k]$, задано тензорное поле $a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$:

$$da^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}-a^{j_1\ldots j_q}_{i\,i_2\ldots i_p}\,\vartheta^i_{i_1}-\cdots-a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i}\,\vartheta^i_{i_p}+\cdots+a^{j_1\ldots j}_{i_1\ldots i_p}\,\vartheta^{j_q}_j=a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p,\,i}\,\vartheta^i$$

и об'ект аффинной связности, определяемый формами:

$$\overline{\vartheta}^i=\vartheta^i,\quad \overline{\vartheta}^i_j=\vartheta^i_j+G^i_{jp}\,\vartheta^p,$$

то величины

$$\overset{G}{\nabla}_i\,a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=a^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p,\,i}-a^{j_1\ldots j_q}_{k\ldots i_p}\,G^k_{i_1 i}-\cdots+a^{j_1\ldots k}_{i_1\ldots i_p}\,G^{j_q}_{ki}$$

назовем *неголономной ковариантной производной тензора*, а процесс получения таких производных — *неголономным ковариантным дифференцированием.*

Продолжая (48), в силу (40), (48), (55) и (56), мы получим

$$R^i_{pqr}\,\Lambda^p_\alpha\,\Lambda^q_\beta\,\Lambda^r_\gamma=(\Lambda^\sigma_{\alpha\beta\gamma}-l_{\alpha[\beta}\,l^\sigma_{\gamma]})\,\Lambda^i_\sigma-(\overset{L}{\nabla}_{[\gamma}\,l_{|\alpha|\beta]}-\Lambda^\sigma_{\beta\gamma}\,l_{\alpha\sigma}+l_{\alpha[\beta}\,n_{\gamma]})\,n^i. \tag{61}$$

Свертывание этих равенств с $h_{ij}\Lambda^j_\sigma$ дает:

$$h_{ij}\,R^i_{pqr}\,\Lambda^j_\sigma\,\Lambda^p_\alpha\,\Lambda^q_\beta\,\Lambda^r_\gamma=(\Lambda^\tau_{\alpha\beta\gamma}-l_{\alpha[\beta}\,l^\tau_{\gamma]})\,H_{\tau\sigma}$$

или

$${}^*R_{kpqr}\,\Lambda^k_\alpha\,\Lambda^p_\beta\,\Lambda^q_\gamma\,\Lambda^r_\sigma={}^*\Lambda_{\alpha\beta\gamma\sigma}+l_{\alpha[\beta}\,l_{\gamma]\sigma}, \tag{62}$$

где

$${}^*R_{kpqr}=h_{sk}\,R^s_{pqr},\quad {}^*\Lambda_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}=H_{\sigma\alpha}\,\Lambda^\sigma_{\beta\gamma\varepsilon}.$$

Если пространство $\mathfrak{H}_n$ риманово и репер $\{A,\ e_i\}$ голономный, то соотношения (62) являются уравнениями Гаусса для гиперповерхности. Уравнения (62) мы будем называть *левыми обобщенными уравнениями Гаусса* для гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ в $\mathfrak{H}_n$.

Свертывая равенства (61) с $h_{ij}\,n^j$, в силу (7), получаем

$${}^*R_{kpqr}\,\Lambda^k_\alpha\,n^p\,\Lambda^q_\beta\,\Lambda^r_\gamma=\Lambda^\sigma_{\beta\gamma}\,l_{\alpha\sigma}-\overset{L}{\nabla}_{[\gamma}\,l_{|\alpha|\beta]}-l_{\alpha[\beta}\,n_{\gamma]}. \tag{63}$$

Эти соотношения мы будем называть *левыми обобщенными уравнениями Петерсона-Кодацци-Майнарди*. Уравнения (60), (62) и (63) устанавливают связь между тензором кручения-кривизны $(R^i_{jk},\ R^i_{jkp})$ пространства $\mathfrak{H}_n$ и левым тензором кручения-кривизны $(\Lambda^\alpha_{\beta\gamma},\ \Lambda^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon})$ гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ в $\mathfrak{H}_n$.

Неголономная ковариантная производная тезора $H_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\overset{L}{\nabla}_\gamma\,H_{\alpha\beta}=l_\alpha\,l_{\beta\gamma}, \tag{64}$$

а неголономная ковариантная производная левого ковектора гиперповерхности —

$$\overset{L}{\nabla}_\beta l_\alpha = \frac{1}{2} H^{\gamma\varepsilon} l_{\gamma\beta} l_\varepsilon l_\alpha + 2 H^{\gamma\varepsilon} H_{[\alpha\gamma]} l_{\varepsilon\beta}. \tag{65}$$

Можно показать, что условия совместности системы (49) не дают новых соотношений.

5. *Сопровождающий репер гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$. Координаты единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ нормали гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$, т. е. единичного направляющего вектора прямой пространства $H_n(A)$, ортогональной к $H_{n-1}(A)$ в $H_n(A)$ (в смысле метрики, определенной тензором g_{ij}) и проходящей через A, удовлетворяют уравнениям:

$$g_{ij} \nu^i \Lambda^j_\alpha = 0, \quad g_{ij} \nu_i \nu^j = 1. \tag{66}$$

Если введем тензор g^{ij}, определенный следующим образом:

$$g^{ij} = \frac{\partial \ln g}{\partial g_{ij}}, \tag{67}$$

то решение системы (66) можно записать так:

$$\nu^i = \frac{g^{ik} \xi_k}{\sqrt{g^{pq} \xi_p \xi_q}}. \tag{68}$$

Величины ν^i являются решениями системы:

$$d\nu^i + \nu^k \omega^i_k = \nu^i_\alpha \Theta^\alpha, \tag{69}$$

где

$$\nu^i_\alpha = \frac{\nu^{ipqr} \xi_p \xi_q \xi_{r\alpha}}{(g^{jk} \xi_j \xi_k)^{3/2}}, \quad \nu^{ipqr} = \begin{vmatrix} g^{pq} & g^{pr} \\ g^{qi} & g^{ri} \end{vmatrix}.$$

В каждой точке гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ имеем репер, образованный из линейно независимых векторов Λ_α и $\boldsymbol{\nu}$, который будем называть *сопровождающим репером гиперповерхности*. Связность, установленную в многообразии пространств $\{ H_{n-1}(A) \}$ при помощи проектирования вдоль нормали, назовем *индуцированной связностью гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$.

6. *Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена.* Векторы $\Lambda^i_{\alpha\beta} e_i$ и $\nu^i_\alpha e_i$ можно выразить через векторы сопровождающего репера следующим образом:

$$\Lambda^i_{\alpha\beta} e_i = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Lambda_\gamma + b_{\alpha\beta} \nu, \tag{70}$$

$$\nu^i_\alpha e_i = b^\beta_\alpha \Lambda_\beta, \tag{71}$$

где

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = G^{\gamma\varepsilon} g_{ik} \Lambda^i_{\alpha\beta} \Lambda^k_\varepsilon, \tag{72}$$

$$b_{\alpha\beta} = g_{kp} n^k \Lambda^p_{\alpha\beta}, \quad b^\beta_\alpha = - G^{\beta\varepsilon} b_{\varepsilon\alpha}, \tag{73}$$

причем

$$G^{\alpha\beta} = \frac{\partial \ln \det \| G_{\gamma\varepsilon} \|}{\partial G_{\alpha\beta}}, \quad G_{\alpha\beta} = g_{ij} \Lambda^i_\alpha \Lambda^j_\beta.$$

Тензор $G_{\alpha\beta}$ называется метрическим тензором гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$. Величины

$$\lambda_\alpha = a_{ij} \Lambda^i_\alpha \nu^j \tag{74}$$

образуют тензор, который назовем *основным ковектором гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$, а уравнения (70) и (71) – деривационными формулами Гаусса-Вейнгартена. Дифференцирование уравнений (72) и (73_1) дает:

$$d\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\varepsilon\beta}\,\Theta^{\varepsilon}_{\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\varepsilon}\,\Theta^{\varepsilon}_{\beta} + \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\Theta^{\gamma}_{\varepsilon} + \Theta^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta,\,\varepsilon}\,\Theta^{\varepsilon}, \tag{75}$$

$$db_{\alpha\beta} - b_{\varepsilon\beta}\,\Theta^{\varepsilon}_{\alpha} - b_{\alpha\varepsilon}\,\Theta^{\varepsilon}_{\beta} = b_{\alpha\beta,\,\varepsilon}\,\Theta^{\varepsilon}, \tag{76}$$

где

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta,\,\varepsilon} = G^{\sigma\gamma}_{\cdot\cdot,\,\varepsilon}\,g_{ij}\,\Lambda^{i}_{\alpha\beta}\,\Lambda^{j}_{\sigma} + G^{\sigma\gamma}\,g_{ik}\,\Lambda^{i}_{\alpha\beta\varepsilon}\,\Lambda^{k}_{\sigma} + G^{\sigma\gamma}\,g_{ik}\,\Lambda^{i}_{\alpha\beta}\,\Lambda^{k}_{\sigma\gamma},$$

$$b_{\alpha\beta,\,\gamma} = g_{kp}\,\nu^{k}_{\gamma}\,\Lambda^{p}_{\alpha\beta} + g_{kp}\,\nu^{k}\,\Lambda^{p}_{\alpha\beta\gamma},$$

$$G^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot,\,\gamma} = -G^{\alpha\sigma}\,G^{\beta\tau}\,H_{(\sigma\tau),\,\gamma}.$$

Следовательно, величины $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ образуют объект аффинной связности, а $b_{\alpha\beta}$ – тензор. Объект $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ назовем *объектом индуцированной связности гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$, а тензор $b_{\alpha\beta}$ – асимптотическим тензором. Пфаффовые формы индуцированной связности гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$, т. е. формы

$$\Omega^{\alpha} = \Theta^{\alpha}, \quad \Omega^{\alpha}_{\beta} = \Theta^{\alpha}_{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\Theta^{\gamma}$$

имеют следующую структуру:

$$\left.\begin{aligned} D\Omega^{\alpha} &= [\Omega^{\beta},\ \Omega^{\alpha}_{\beta}] + R^{\alpha}_{\beta\gamma}\,[\Omega^{\beta},\ \Omega^{\gamma}], \\ D\Omega^{\alpha}_{\beta} &= [\Omega^{\gamma}_{\beta},\ \Omega^{\alpha}_{\gamma}] + R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}\,[\Omega^{\gamma},\ \Omega^{\varepsilon}], \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

где

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]},$$

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta[\gamma,\,\varepsilon]} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma[\gamma}\,\Gamma^{\sigma}_{|\beta|\varepsilon]}.$$

Тензор $R^{\alpha}_{\beta\gamma}$ назовем *тензором кручения гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$, а $R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$ – *тензором кривизны гиперповерхности* (*тензором Римана-Кристоффеля*).

7. *Обобщенные уравнения Риччи, Гаусса, Петерсона-Кодацци-Майнарди.* Альтернация соотношений (70) по α и β, в силу (40), дает

$$R^{i}_{pq}\,\Lambda^{p}_{\alpha}\,\Lambda^{q}_{\beta} = R^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\Lambda^{i}_{\gamma} + g_{pq}\,\nu^{q}\,R^{p}_{rs}\,\Lambda^{r}_{\alpha}\,\Lambda^{s}_{\beta}\,\nu^{i}. \tag{78}$$

Эти уравнения назовем *обобщенными уравнениями Риччи гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$.

Продолжение уравнений (70) дает:

$$R^{i}_{pqr}\,\Lambda^{p}_{\alpha}\,\Lambda^{q}_{\beta}\,\Lambda^{r}_{\gamma} = (R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} - b_{\alpha[\beta}\,(b^{\sigma}_{\gamma]}\,\Lambda^{i}_{\sigma} - (\overset{\Gamma}{\nabla}_{[\gamma}\,b_{|\alpha|\beta]} - R^{\sigma}_{\beta\gamma}\,b_{\alpha\sigma})\,\nu^{i}. \tag{79}$$

Из этих соотношений получаются *обобщенные уравнения Гаусса*:

$$R_{kpqr}\,\Lambda^{k}_{\sigma}\,\Lambda^{p}_{\alpha}\,\Lambda^{q}_{\beta}\,\Lambda^{r}_{\gamma} = R_{\sigma\alpha\beta\gamma} + b_{\alpha[\beta}\,b_{\gamma]\sigma} \tag{80}$$

и *обобщенные уравнения Петерсона-Кодацци-Майнарди*:

$$R_{kpqr}\,\nu^{k}\,\Lambda^{p}_{\alpha}\,\Lambda^{q}_{\beta}\,\Lambda^{r}_{\gamma} = R^{\sigma}_{\beta\gamma}\,b_{\alpha\sigma} - \overset{\Gamma}{\nabla}_{[\gamma}\,b_{|\alpha|\beta]}, \tag{81}$$

где

$$R_{ikpq} = g_{is}\,R^{s}_{kpq}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = G_{\alpha\sigma}\,R^{\sigma}_{\beta\gamma\varepsilon}.$$

Неголономная ковариантная производная метрического тензора, относительно связности $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$, имеет вид

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_{\gamma} H_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha} b_{\beta\gamma} - \lambda_{\beta} b_{\alpha\gamma}, \tag{82}$$

основного ковектора λ_{α} —

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_{\beta} \lambda_{\alpha} = b^{\sigma}_{\beta} H_{[\alpha\sigma]}. \tag{83}$$

8. *Правый сопровождающийся репер гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$. Вектором правой нормали гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ в точке A назовем вектор $\boldsymbol{m}$ пространства $H_{n-1}(A)$, координаты которого удовлетворяют уравнениям:

$$h_{ij} \Lambda^{i}_{\alpha} m^{j} = 0, \quad g_{ij} m^{i} m^{j} = 1,$$

т. е. имеют вид

$$m^{i} = \frac{h^{il} \xi_{l}}{\sqrt{h^{(pq)} \xi_{p} \xi_{q}}}. \tag{84}$$

Дифференцирование этих соотношений дает:

$$dm^{i} + m^{k} \omega^{i}_{k} = m^{i}_{\alpha} \Theta^{\alpha}, \tag{85}$$

где

$$m^{i}_{\alpha} = \frac{m^{ipqr} \xi_{p} \xi_{q} \xi_{r\alpha}}{(h^{(pq)} \xi_{p} \xi_{q})^{3/2}}, \quad m^{ipqr} = \begin{vmatrix} h^{ir} & h^{ip} \\ h^{(qr)} & h^{(qp)} \end{vmatrix}.$$

Репер $\{A, \Lambda_{\alpha}, \boldsymbol{m}\}$ пространства $H_{n-1}(A)$ будем называть *правым сопровождающим репером гиперповерхности.*

Связность на гиперповерхности, установленную проектированием вдоль правой нормали, назовем *правой индуцированной связностью.*

9. *Правые деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена.* Эти формулы мы получим разлагая векторы $\Lambda^{i}_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_{i}$ и $m^{i}_{\alpha} \boldsymbol{e}_{i}$ по векторам репера $\{A, \Lambda_{\alpha}, \boldsymbol{m}\}$:

$$\Lambda^{i}_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_{i} = \Pi^{\gamma}_{\alpha\beta} \Lambda_{\gamma} + l_{\alpha\beta} \boldsymbol{m}, \tag{86}$$

$$m^{i}_{\alpha} \boldsymbol{e}_{i} = p^{\beta}_{\alpha} \Lambda_{\beta} + m_{\alpha} \boldsymbol{m}, \tag{87}$$

где

$$\Pi^{\gamma}_{\alpha\beta} = H^{\gamma\sigma} h_{ij} \Lambda^{i}_{\sigma} \Lambda^{j}_{\alpha\beta}, \tag{88}$$

$$p^{\beta}_{\alpha} = -H^{\beta\gamma} l_{\gamma\alpha}, \tag{89}$$

$$m_{\alpha} = a_{ij} m^{i}_{\alpha} m^{j}. \tag{90}$$

Величины

$$p_{\alpha} = h_{ij} m^{i} \Lambda^{j}_{\alpha}, \tag{91}$$

которые с m_{α} связаны соотношениями

$$m_{\alpha} = \frac{1}{2} H^{\beta\gamma} p_{\gamma\alpha} p_{\beta},$$

назовем *основным правым ковектором гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$. Эти величины являются решениями следующей системы:

$$dp_{\alpha} - p_{\beta} \Theta^{\beta}_{\alpha} = (h_{ij} m^{i}_{\beta} \Lambda^{j}_{\alpha} + h_{ij} m^{i} \Lambda^{j}_{\alpha\beta}) \Theta^{\beta}. \tag{92}$$

Величины $\Pi^{\gamma}_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие уравнениям:

$$d\Pi^{\gamma}_{\alpha\beta} - \Pi^{\gamma}_{\sigma\beta} \Theta^{\sigma}_{\alpha} - \Pi^{\gamma}_{\alpha\sigma} \Theta^{\sigma}_{\beta} + \Pi^{\sigma}_{\alpha\beta} \Theta^{\gamma}_{\sigma} + \Theta^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Pi^{\gamma}_{\alpha\beta,\sigma} \Theta^{\sigma}, \tag{93}$$

где

$$\Pi^{\gamma}_{\alpha\beta,\sigma}=H^{\gamma\rho}_{\cdot\cdot,\sigma}\,h_{ij}\,\Lambda^i_\rho\,\Lambda^j_{\alpha\beta}+H^{\gamma\rho}\,h_{ij}\,\Lambda^i_{\rho\sigma}\,\Lambda^j_{\alpha\beta}+H^{\gamma\rho}\,h_{ij}\,\Lambda^i_\rho\,\Lambda^j_{\alpha\beta\sigma},$$

образуют объект аффинной связности, который назовем *объектом правой индуцированной связности*. Правая индуцированная связность определяется формами

$$\overline{\Theta}^\alpha=\Theta^\alpha,\quad \overline{\Theta}^\alpha_\beta=\Theta^\alpha_\beta+\Pi^\alpha_{\beta\gamma}\,\Theta^\gamma, \tag{94}$$

структурные уравнения которых имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} D\overline{\Theta}^\alpha&=[\overline{\Theta}^\beta,\ \overline{\Theta}^\alpha_\beta]+P^\alpha_{\beta\gamma}\,[\overline{\Theta}^\beta,\ \overline{\Theta}^\gamma],\\ D\overline{\Theta}^\alpha_\beta&=[\overline{\Theta}^\gamma_\beta,\ \overline{\Theta}^\alpha_\gamma]+P^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\,[\overline{\Theta}^\gamma,\ \overline{\Theta}^\varepsilon],\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

где

$$P^\alpha_{\beta\gamma}=-\Pi^\alpha_{[\beta\gamma]},$$

$$P^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}=-\Pi^\alpha_{\beta[\gamma,\varepsilon]}-\Pi^\alpha_{\sigma[\gamma}\,\Pi^\sigma_{|\beta|\varepsilon]}.$$

Тензор $P^\alpha_{\beta\gamma}$ назовем *тензором правого кручения гиперповерхности* $\mathfrak{H}_{n-1}$, а $P^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}$ — *тензором правой кривизны* (*правым тензором Римана-Кристоффеля*) гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$. Очевидно, что

$$h_{ij}\,n^i\,m^j \doteq 1. \tag{96}$$

10. *Правые обобщенные уравнения Риччи, Гаусса, Петерсона-Кодацци-Майнарди.* Альтернация уравнения (86) и сравнивая коэффициенты при e_i, мы получим *правые обобщенные уравнения Риччи*:

$$R^i_{pq}\,\Lambda^p_\alpha\,\Lambda^q_\beta=P^\gamma_{\alpha\beta}\,\Lambda^i_\gamma+h_{ij}\,R^i_{pq}\,\Lambda^p_\alpha\,\Lambda^q_\beta\,m^j. \tag{97}$$

Продолжая уравнения (86) и альтернируя, мы получим:

$$R^i_{pqr}\,\Lambda^p_\alpha\,\Lambda^q_\beta\,\Lambda^r_\gamma=(P^\sigma_{\alpha\beta\gamma}-l_{\alpha[\beta}\,l^\sigma_{\gamma]})\,\Lambda^i_\sigma-\overset{\Pi}{\nabla}_{[\gamma}\,l_{|\alpha|\beta]}-P^\sigma_{\beta\gamma}\,l_{\alpha\sigma}+l_{\alpha[\beta}\,m_{\gamma]})\,m^i. \tag{98}$$

Из этих равенств получаются *правые обобщенные уравнения Гаусса*:

$$-{}^*R_{jpqr}\,\Lambda^j_\sigma\,\Lambda^p_\alpha\,\Lambda^q_\beta\,\Lambda^r_\gamma=H_{\sigma\tau}\,R^\tau_{\alpha\beta\gamma}+l_{\alpha[\beta}\,l_{|\sigma|\gamma]} \tag{99}$$

и *правые обобщенные уравнения Петерсона-Кодацци-Майнарди*:

$${}^*R_{jpqr}\,m^j\,\Lambda^p_\alpha\,\Lambda^q_\beta\,\Lambda^r_\gamma=\overset{\Pi}{\nabla}_{[\gamma}\,l_{|\alpha|\beta]}-P^\sigma_{\beta\gamma}\,l_{\alpha\sigma}+l_{\alpha[\beta}\,m_{\gamma]}. \tag{100}$$

Неголономная ковариантная производная тензора $H_{\alpha\beta}$ относительно правой индуцированной связности имеет вид:

$$\overset{\Pi}{\nabla}_\gamma\,H_{\alpha\beta}=p_\alpha\,p_{\beta\gamma}, \tag{101}$$

а правого ковектора p_α —

$$\overset{\Pi}{\nabla}_\beta\,p_\alpha=\frac{1}{2}\,H^{\sigma\tau}\,p_{\tau\alpha}\,p_\sigma\,p_\beta+2H_{[\alpha\tau]}\,H^{\sigma\tau}\,p_{\tau\beta}. \tag{102}$$

Если пространство $\mathfrak{H}_n$ является обобщенно евклидовым H_n и репер $\{A,\ e_i\}$ голономный, то результаты этого параграфа совпадают с результатами С. М. Бахраха [2].

§ 4. О сопряженных связностях на гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$

Теория пар аффинных связностей, сопряженных относительно симметрического тензора, разработана А. П. Норденом [6] в 1950 г. Мы рассмотрим пары аффинных связностей, сопряженных относительно метрического тензора гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$.

1. *Параллельное перенесение векторов на гиперповерхности.* Будем говорить, что вектор $v = v^\alpha \Lambda_\alpha$ переносится параллельно на гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ относительно связности, определенной формами

$$\vartheta^\alpha = \Theta^\alpha, \quad \vartheta^\alpha_\beta = \Theta^\alpha_\beta + G^\alpha_{\beta\gamma}\Theta^\gamma,$$

если

$$dv^\alpha + \vartheta^\alpha_\beta v^\beta = \Theta v^\alpha,$$

где Θ — некоторая пфаффовая форма.

Две аффинные связности $\underset{1}{G}$ и $\underset{2}{G}$ на гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$, определенные об'ектами $\underset{1}{G}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ и $\underset{2}{G}{}^\alpha_{\beta\gamma}$, будем называть принадлежащим к одному классу псевдосвязностей этой гиперповерхности, если векторы, которые переносятся параллельно относительно связности $\underset{1}{G}$, переносятся параллельно и относительно связности $\underset{2}{G}$. Таким образом, мы имеем

$$dv^\alpha + \underset{1}{\vartheta}{}^\alpha_\beta v^\beta = \underset{1}{\Theta} v^\alpha, \quad dv^\alpha + \underset{2}{\vartheta}{}^\alpha_\beta v^\beta = \underset{2}{\Theta} v^\alpha.$$

Отсюда следует, что тензор аффинной деформации $T^\alpha_{\beta\gamma}$ связностей $\underset{1}{G}$ и $\underset{2}{G}$, т. е. тензор

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = \underset{1}{G}{}^\alpha_{\beta\gamma} - \underset{2}{G}{}^\alpha_{\beta\gamma}$$

имеет следующую структру:

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = q_\beta \delta^\alpha_\gamma, \tag{103}$$

где

$$q_\alpha = \frac{1}{n-1} T^\beta_{\alpha\beta}.$$

Такие линии на гиперповерхности, развертки которых относительно связности G являются прямыми, назовем геодезическими линиями связности G. Дифференциальные уравнения таких линий имеет вид:

$$d\Theta^\alpha + \vartheta^\alpha_\beta \Theta^\beta = \Theta\Theta^\alpha.$$

Если две связности $\underset{1}{G}$ и $\underset{2}{G}$ на гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ имеют общие геодезические линии, то

$$(\underset{1}{\vartheta}{}^\alpha_\beta - \underset{2}{\vartheta}{}^\alpha_\beta)\Theta^\beta = (\underset{1}{\Theta} - \underset{2}{\Theta})\Theta^\alpha.$$

Отсюда следует, что тензор аффинной деформации этих связностей имеет вид:

$$T^\gamma_{\alpha\beta} = \delta^\gamma_\alpha t_\beta + \delta^\gamma_\beta t_\alpha + \underset{1}{G}{}^\gamma_{[\alpha\beta]} - \underset{2}{G}{}^\gamma_{[\alpha\beta]}, \tag{104}$$

где

$$t_\alpha = \frac{1}{n} T^\beta_{(\alpha\beta)}.$$

2. *Сопряженные связности.* Упорядоченную пару связностей $\underset{1}{G}$ и $\underset{2}{G}$ на гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ назовем *слабо сопряженными* относительно тензора $H_{\alpha\beta}$, если

$$H_{\alpha\beta,\,\gamma}-H_{\sigma\beta}\,\underset{1}{G}^{\sigma}_{\alpha\gamma}-H_{\alpha\sigma}\,G^{\sigma}_{\beta\gamma}=2s_{\gamma}\,H_{\alpha\beta}\,, \tag{105}$$

где s_{γ} — произвольный ковектор (дополнительный вектор в смысле А. П. Нордена). Отсюда следует, что

$$H_{\alpha\sigma}\,T^{\sigma}_{\beta\gamma}=\overset{\underset{1}{G}}{\nabla}_{\gamma}\,H_{\alpha\beta}-2s_{\gamma}\,H_{\alpha\beta}. \tag{106}$$

Если $T^{\sigma}_{\alpha\sigma}=T^{\sigma}_{\sigma\alpha}$ и имеет место (105), то связности $\underset{1}{G}$ и $\underset{2}{G}$ называются сопряженными относительно тензора $H_{\alpha\beta}$ в смысле А. П. Нордена. В этом случае s_{α} имеет вид:

$$s_{\alpha}=\frac{1}{n-2}\,H^{\sigma\tau}\,\overset{\underset{1}{G}}{\nabla}_{[\alpha}\,H_{|\tau|\sigma]}\,. \tag{107}$$

Из (106) и (107) находим, что

$$T^{\alpha}_{\beta\gamma}=H^{\sigma\tau}\,(\delta^{\alpha}_{\sigma}\,\overset{\underset{1}{G}}{\nabla}_{\gamma}\,H_{\tau\beta}-\frac{2}{n-2}\,\overset{\underset{1}{G}}{\nabla}_{[\gamma}\,H_{|\tau|\sigma]}\,\delta^{\alpha}_{\beta}). \tag{108}$$

Если $H_{\alpha\beta}=H_{\beta\alpha}$, то эта формула совпадает с формулой А. П. Нордена [6]. Отсюда мы получаем, что *сопряженные связности на гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ относительно тензора $H_{\alpha\beta}$ принадлежат к одному классу псевдосвязностей этой гиперповерхности*. Кроме того, формула (108) показывает, что к любой связности на гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ однозначно присоединяется такая новая связность, чтобы полученная пара была сопряженной.

Оказывается, что *связности $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$, определенные формулами* (50) и (88), *являются слабо сопряженными*, причем $s_{\alpha}=0$. Следует заметить, что эти связности не на всякой гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ являются сопряженными в смысле А. П. Нордена. Связности $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$ являются сопряженными в смысле А. П. Нордена только на специальных гиперповерхностях пространства $\mathfrak{H}_{n}$.

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
5.IV.1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Бахрах. Некоторые вопросы геометрии n-мерного обобщенного евклидова пространства, Известия высш. учеб. завед., 1958, мат., № **6**, 7—16.
2. С. М. Бахрах. Теория гиперповерхностей обобщенного евклидова пространства и обобщенные римановы пространства первого класса, Извест. высш. учеб. завед. мат., 1960, № **3 (16)**, 54—61.
3. А. М. Васильев. Инвариантные аналитические методы в дифференциальной геометрии, ДАН СССР, 1951, т. **79**, № 1, 5—7.
4. Г. Ф. Лаптев. Геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. матем. об-ва, 1953, т. **2**, 275—382.
5. Г. Ф. Лаптев. Теоретико-групповой метод дифференциально геометрических исследований, Труды 3-го Всесоюзн. матем. с'езда. 1958, т. **3**, 409—418.
6. А. П. Норден. Пространства аффинной связности, М.—Л., 1950.

7. W. Blaschke. Frenets Formeln für den Raum von Riemann, Math. Zeit., 1919, **6**, 94–99.
8. A. Einstein. The Meanig of Relativity, Princeton University Press, 1950.
9. L. P. Eisenhart. Generalised Riemann spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1952, **37**, 311–315; 1952, **38**, 505–508.
10. V. Hlavaty. Geometry of Einsteins unified field theory, Groningen, Noordhoff, 1958.
11. R. S. Mishra. Subspaces of a generalised Riemannian space, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci, 1954, (5) **40**, 1058–1071.

KAI KURIE APIBENDRINTO EUKLIDINIO SĄRYŠIO ERDVIŲ GEOMETRIJOS KLAUSIMAI

V. BLIZNIKAS

(*Reziumė*)

Albertas Einšteinas yra apibendrinęs Rymano erdvės sąvoką, apibrėždamas erdvės metrinę struktūrą nesimetrinio tenzoriaus pagalba [8]. L. Eizenharto pasiūlymu ši nauja erdvių klasė yra pavadinta apibendrintomis Rymano erdvėmis [9]. Apibendrintos Rymano erdvės, kurios afininio sąryšio koeficientai sutampa su Christofelio simboliais, atitinkančiais erdvės metrinio tenzoriaus simetrinę dalį, hiperpaviršių teorija yra sudaryta R. Mišros [10].

Darbe yra nagrinėjamos apibendrintos Rymano erdvės su specialiu afininiu sąryšiu, t. y. afininiu sąryšiu, kurio atžvilgiu erdvės metrinis tenzorius yra kovariantiškai pastovus. Ši speciali apibendrintų Rymano erdvių klasė yra pavadinta apibendrinto euklidinio sąryšio erdvėmis $\mathfrak{H}_n$. Erdvių $\mathfrak{H}_n$ egzistencija yra įrodyta specialiais pavyzdžiais. Surastos erdvės $\mathfrak{H}_n$ kreivių teorijos pagrindinės formulės – kairinės Frenė lygtys, Frenė lygtys ir dešininės Frenė lygtys. Kadangi erdvės $\mathfrak{H}_n$ hiperpaviršių $\mathfrak{H}_{n-1}$ galima normalizuoti trejopu būdu, tai yra galimos trys skirtingos hiperpaviršių teorijos. Kiekvienos tokios hiperpaviršių teorijos atveju yra surastos lygtys, analogiškos euklidinės erdvės paviršių teorijos Gauso-Veingarteno bei Petersono-Mainardi-Kodaci lygtims.

EINIGE FRAGEN DER GEOMETRIE DER RÄUME MIT DEM VERALLGEMEINERTEN EUKLIDISCHEN ZUSAMMENHÄNGE

V. BLIZNIKAS

(*Zusammenfassung*)

In vorliegendem Artikel wird der Begriff des Raumes $\mathfrak{H}_n$ mit dem verallgemeinerten Euklidischen Zusammenhang analysiert.

Dementsprechend zerfällt unsere Arbeit in drei Hauptteile. Der erste enthalt die Entwicklung der Strukturgleichungen des Raumes $\mathfrak{H}_n$. In dem zweiten Teil wird die Theorie der Kurven betrachtet, die als natürliche Analoga der Kurven der homogenen verallgemeinerten Euklidischen Räume hervorgehoben werden können. Im dritten Teil wird die Theorie der Hyperflächen gegründet.