II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ И ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРУППАХ

А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

Известная эргодическая теорема Неймана утверждает, что для всякого непрерывного в среднем квадратичном стационарного в широком смысле случайного процесса $\xi(t)$, $-\infty<t<+\infty$ существует инвариантное относительно сдвигов среднее значение

$$\mathbf{M}[\xi(t)]=\underset{T_2-T_1\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{T_2-T_1}\int\limits_{T_1}^{T_2}\xi(t)\,dt;$$

аналогичное утверждение справедливо и для стационарных процессов, зависящих от целочисленного параметра. Винер [26] и Питт [23] распространили эргодическую теорему на однородные случайные поля на конечномерных евклидовых пространствах. Дальнейшее обобщение эргодической теоремы принадлежит Кальдерону [15], распространившему ее на однородные случайные поля на „эргодических" унимодулярных локально бикомпактных группах. Ниже дается обобщение эргодической теоремы Кальдерона о сходимости в среднем квадратичном (§§ 1, 2). Осреднение производится по более обширному классу семейств множеств („лево- и право-эргодические обобщенные последовательности множеств"); это позволяет распространить упомянутую эргодическую теорему на неунимодулярные локально бикомпактные группы. В § 3 принадлежащая Бору теорема о существовании среднего значения для любой почти-периодической функции на прямой обобщается на группы, обладающие эргодическими обобщенными последовательностями множеств, и доказывается тождественность этого среднего значения со средним значением Неймана; это обобщение результатов Любарского [6] и Страбла [24]. Здесь же доказана теорема о среднем значении для положительно определенных функций на группах. В § 4 эти результаты используются для доказательства эргодической теоремы для однородных в широком смысле обобщенных случайных полей на конечномерных евклидовых пространствах; эргодическая теорема Винера о сходимости в среднем квадратичном является частным случаем этой теоремы в применении к однородным измеримым случайным полям.

§ 1. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ НА ГРУППАХ

Пусть G — локально бикомпактная группа, $\mu(\cdot)$ — ее левая мера Хаара. Пусть $N=\{n\}$ — некоторое направление, т. е. частично упорядоченное множество, всякие два элемента n_1 и n_2 которого обладают общим последующим элементом n: $n\succ n_1$, $n\succ n_2$.

Определение. Обобщенная последовательность функций $\{\psi_n(g),\ n\in N\}$ на группе G называется *лево-эргодической*, если

(E_1) все $\psi_n(g)\in L_1(\mu)$;

(E_2) $$\lim_{n\in N}\int_G \psi_n(g)\,\mu(dg)=1;$$

(E_3) существует такая постоянная $C>0$, что
$$\int_G |\psi_n(g)|\,\mu(dg)<C \quad \text{для всех} \quad n\in N;$$

(E_4) $$\lim_{n\in N}\int_G |\psi_n(fg)-\psi_n(g)|\,\mu(dg)=0$$

для любого $f\in G$.

Определение. Обобщенная последовательность измеримых множеств $\{B_n,\ n\in N\}$ с конечной ненулевой мерой Хаара называется *лево-эргодической*, если

$$\lim_{n\in N}\frac{\mu(gB_n\Delta B_n)}{\mu(B_n)}=0 \quad \text{для любого} \quad g\in G$$

(здесь $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ — симметрическая разность множеств A и B).

Это определение обобщает определения эргодических последовательностей множеств, предложенные Кальдероном [15] и Бокле [14] для унимодулярных групп; подобного рода последовательности изучали также Алаоглу и Биркгоф [12], Дэй [16] и Эберлейн [18], [19].

Лемма 1.1. *Обобщенная последовательность измеримых множеств $\{B_n,\ n\in N\}$ с конечной ненулевой мерой Хаара является лево-эргодической тогда и только тогда, когда обобщенная последовательность нормированных характеристических функций этих множеств $\left\{\frac{1}{\mu(B_n)}\chi_{B_n}(g),\ n\in N\right\}$ является лево-эргодической обобщенной последовательностью функций.*

Доказательство. Очевидно, обобщенная последовательность функций $\left\{\frac{1}{\mu(B_n)}\chi_{B_n}(g),\ n\in N\right\}$ удовлетворяет условиям $(E_1)-(E_3)$. Поэтому утверждение леммы немедленно вытекает из соотношений

$$\frac{\mu(fB_n\Delta B_n)}{\mu(B_n)}=\frac{1}{\mu(B_n)}\int_G \chi_{fB_n\Delta B_n}(g)\,\mu(dg)=$$
$$=\frac{1}{\mu(B_n)}\int_G \left|\chi_{fB_n}(g)-\chi_{B_n}(g)\right|\mu(dg)=$$
$$=\int_G \left|\frac{1}{\mu(B_n)}\chi_{B_n}(f^{-1}g)-\frac{1}{\mu(B_n)}\chi_{B_n}(g)\right|\mu(dg).$$

Лемма 1.2. *Соотношение* (1.1) *эквивалентно каждому из соотношений*:

$$\lim_{n\in N}\frac{\mu(gB_n\cap B_n)}{\mu(B_n)}=1; \tag{1.1'}$$

$$\lim_{n\in N}\frac{\mu(gB_n\cup B_n)}{\mu(B_n)}=1; \tag{1.1''}$$

$$\lim_{n\in N}\operatorname*{var}_{C\subset G}\frac{\mu(gB_n\cap C)-\mu(B_n\cap C)}{\mu(B_n)}=0.^{*)} \tag{1.1'''}$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из соотношений:

$$\mu(gB_n\cap B_n)=\mu(B_n)-\frac{1}{2}\mu(gB_n\Delta B_n); \tag{1.2}$$

$$\mu(gB_n\cup B_n)=\mu(gB_n\cap B_n)+\mu(gB_n\Delta B_n); \tag{1.3}$$

$$\operatorname*{var}_{C\subset G}\Big[\mu(gB_n\cap C)-\mu(B_n\cap C)\Big]=\mu(gB_n\Delta B_n). \tag{1.4}$$

Докажем последнее соотношение. Взяв разбиение группы $G=B_n\cup(G\setminus B_n)$, получим:

$$\begin{gathered}\operatorname*{var}_{C\subset G}\Big[\mu(gB_n\cap C)-\mu(B_n\cap C)\Big]\geqslant\Big|\mu(gB_n\cap B_n)-\mu(B_n\cap B_n)\Big|+\\+\Big|\mu\big(gB_n\cap(G\setminus B_n)\big)-\mu\big(B_n\cap(G\setminus B_n)\big)\Big|\geqslant\mu(B_n)-\mu(gB_n\cap B_n)+\\+\mu(gB_n\setminus B_n)=\mu(gB_n\cup B_n)-\mu(gB_n\cap B_n)=\mu(gB_n\Delta B_n).\end{gathered} \tag{1.5}$$

С другой стороны, при любом разбиении группы G на непересекающиеся измеримые множества $C_1, \ldots, C_r$

$$\begin{gathered}\mu(gB_n\Delta B_n)=\int_G\chi_{gB_n\Delta B_n}(f)\,\mu(df)=\int_G\Big|\chi_{gB_n}(f)-\chi_{B_n}(f)\Big|\,\mu(df)=\\=\sum_{i=1}^r\int_{C_i}\Big|\chi_{gB_n}(f)-\chi_{B_n}(f)\Big|\,\mu(df)\geqslant\sum_{i=1}^r\Big|\int_{C_i}\big(\chi_{gB_n}(f)-\chi_{B_n}(f)\big)\,\mu(df)\Big|=\\=\sum_{i=1}^r\Big|\mu(gB_n\cap C_i)-\mu(B_n\cap C_i)\Big|.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) вытекает соотношение (1.4).

Пример 1.1. Если $\{\psi_m^{(1)}(g_1),\ m\in M\}$ и $\{\psi_n^{(2)}(g_2),\ n\in N\}$ — лево-эргодические обобщенные последовательности функций на локально бикомпактных группах G_1 и G_2, то обобщенная последовательность $\{\psi_{m,n}(g_1, g_2)=\psi_m^{(1)}(g_1)\,\psi_n^{(2)}(g_2),\ (m, n)\in M\times N\}$ является лево-эргодической обобщенной последовательностью функций на прямом произведении $G_1\times G_2$ (мы полагаем $(m_1, n_1)\succ(m_2, n_2)$, если $m_1\succ m_2$, $n_1\succ n_2$); в частности, если $\{B_m^{(1)},\ m\in M\}$ и $\{B_n^{(2)},\ n\in N\}$ — лево-эргодические обобщенные последовательности множеств на G_1 и G_2, то $\{B_{m,n}=B_m^{(1)}\times B_n^{(2)},\ (m, n)\in M\times N\}$ — лево-эргоди-

---

*) Если $\lambda(C)$ — аддитивная функция от измеримых множеств $C\subset G$, то $\operatorname*{var}_{C\subset G}\lambda(C)=\sup\sum_i|\lambda(C_i)|$ (верхняя грань берется по всевозможным конечным разбиениям G на непересекающиеся измеримые множества C_i).

ческая обобщенная последовательность множеств на $G_1\times G_2$. В самом деле,

$$\int\limits_{G_1\times G_2}\left|\psi_{m,n}\left((f_1, f_2)(g_1, g_2)\right)-\psi_{m,n}\left((g_1, g_2)\right)\right|\mu_{G_1\times G_2}\left(d(g_1, g_2)\right)=$$

$$=\int\limits_{G_1}\int\limits_{G_2}\left|\psi_m^{(1)}(f_1g_1)\psi_n^{(2)}(f_2g_2)-\psi_m^{(1)}(g_1)\psi_n^{(2)}(g_2)\right|\mu_{G_1}(dg_1)\mu_{G_2}(dg_2)=$$

$$=\int\limits_{G_1}\int\limits_{G_2}\left|\psi_m^{(1)}(f_1g_1)\psi_n^{(2)}(f_2g_2)-\psi_m^{(1)}(f_1g_1)\psi_n^{(2)}(g_2)+\right.$$

$$\left.+\psi_m^{(1)}(f_1g_1)\psi_n^{(2)}(g_2)-\psi_m^{(1)}(g_1)\psi_n^{(2)}(g_2)\right|\mu_{G_1}(dg_1)\mu_{G_2}(dg_2)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{G_1}\left|\psi_m^{(1)}(f_1g_1)\right|\mu_{G_1}(dg_1)\int\limits_{G_2}\left|\psi_n^{(2)}(f_2g_2)-\psi_n^{(2)}(g_2)\right|\mu_{G_2}(dg_2)+$$

$$+\int\limits_{G_2}\left|\psi_n^{(2)}(g_2)\right|\mu_{G_2}(dg_2)\int\limits_{G_1}\left|\psi_m^{(1)}(f_1g_1)-\psi_m^{(1)}(g_1)\right|\mu_{G_1}(dg_1)$$

и если $\sup\left(\int\limits_{G_1}\left|\psi_m^{(1)}\right|\mu_{G_1}(dg_1),\ \int\limits_{G_2}\left|\psi_n^{(2)}\right|\mu_{G_2}(dg_2)\right)<C$ и m_ε, n_ε таковы, что

при $m>m_\varepsilon$, $n>n_\varepsilon$ $\int\limits_{G_1}\left|\psi_m^{(1)}(f_1g_1)-\psi_m^{(1)}(g_1)\right|\mu_{G_1}(dg_1)<\frac{\varepsilon}{2C}$

и $\int\limits_{G_2}\left|\psi_n^{(2)}(f_2g_2)-\psi_n^{(2)}(g_2)\right|\mu_{G_2}(dg_2)<\frac{\varepsilon}{2C}$, то для всех $(m, n)>(m_\varepsilon, n_\varepsilon)$

$$\int\limits_{G_1\times G_2}\left|\psi_{m,n}\left((f_1, f_2)(g_1, g_2)\right)-\psi_{m,n}\left((g_1, g_2)\right)\right|\mu_{G_1\times G_2}\left(d(g_1, g_2)\right)<\varepsilon,$$

и условие (E_4) выполнено. Выполнение условий $(E_1)-(E_3)$ очевидно. Утверждение о последовательностях множеств немедленно вытекает из того, что

$$\chi_{B_m^{(1)}\times B_n^{(2)}}(g_1, g_2)=\chi_{B_m^{(1)}}(g_1)\chi_{B_n^{(2)}}(g_2).$$

Пример 1.2. Пусть G и S — локально бикомпактные группы и существует гомоморфное отображение α группы S в группу всех автоморфизмов группы G; тогда каждой паре элементов $\sigma\in S$ и $g\in G$ соответствует однозначно определенный элемент $f=\sigma(g)\in G$ — образ элемента g при автоморфизме $\alpha(\sigma)$. Если отображение $f(\sigma, g)=\sigma(g)$ топологического пространства $S\times G$ на G непрерывно, то, введя в пространстве $S\times G$ умножение по формуле $(\sigma_1, g_1)(\sigma_2, g_2)=\left(\sigma_1\sigma_2, \sigma_2(g_1)g_2\right)$, мы превратим его в локально бикомпактную группу $S\odot G$ – так называемое „полупрямое произведение“ группы G на группу S (см., например, [7]). Если существуют лево-эргодические обобщенные последовательности множеств на группах S и G, то существуют лево-эргодические обобщенные последовательности множеств на $S\odot G$; эти последовательности конструируются почти дословно так же, как и в примере 1.1. Отметим, что на полупрямых произведениях групп, за исключением весьма частных случаев, отсутствуют обобщенные последовательности множеств, эргодические в смысле Бокле.

Пример 1.3. Пусть K – бикомпактная нормальная подгруппа (унимодулярной) локально бикомпактной группы G и $\psi_n(g')$, $g'\in G/K$, – лево-эргодическая обобщенная последовательность функций на фактор-группе G/K. Положим $\psi_n(g)=\psi_n(g')$ для всех элементов $g\in G$, принадлежащих смежному классу g'. Тогда $\{\psi_n(g),\ n\in N\}$ – лево-эргодическая обобщенная последовательность множеств на G; в частности, если $\{B_n',\ n\in N\}$ – лево-эргодическая обобщенная последовательность множеств на группе G/K, то полные прообразы B_n множеств B_n' относительно естественного гомоморфизма G на G/K образуют лево-эргодическую обобщенную последовательность множеств на группе G. Наше утверждение немедленно следует из того, что

$$\int_G \psi_n(g)\,\mu_G(dg)=\int_{G/K}\psi_n(g')\,\mu_{G/K}(dg')$$

(мы считаем, что $\mu_K(K)=1$) – см., например, [2].

Пример 1.4. На бикомпактной группе G последовательность, состоящая из одной интегрируемой функции $\psi(g)\equiv 1$, является (лево-) эргодической последовательностью функций; последовательность, состоящая из одного множества G, является (лево-) эргодической последовательностью множеств на G.

Пример 1.5. Пусть R – аддитивная группа действительных чисел. Обозначим через $r(B)$ верхнюю грань радиусов шаров, содержащихся в множестве $B\in R^m$. Всякая обобщенная последовательность $\{B_n,\ n\in N\}$ ограниченных выпуклых множеств, для которой $\lim\limits_{n\in N} r(B_n)=\infty$, является (лево-) эргодической обобщенной последовательностью множеств. Приведем принадлежащее Дэю [16] доказательство этого факта. Обозначим через $K_r(\mathbf{x})$ замкнутый шар радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}\in R^m$. Заметим вначале, что если выпуклое множество B содержит шар $K_r(\mathbf{0})$, то при любом $R>0$ $K_R(\mathbf{0})+B\subset\frac{r+R}{r}B$; в самом деле, то, что $\mathbf{y}\in K_R(\mathbf{0})$ равносильно тому, что $\mathbf{y}=\frac{R}{r}\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}'\in K_r(\mathbf{0})$; если $\mathbf{y}\in K(\mathbf{0})$, $\mathbf{y}''\in B$, то $\mathbf{y}+\mathbf{y}''=\frac{R}{r}\mathbf{y}'+\mathbf{y}''=\frac{r+R}{r}\left[\frac{R}{r+R}\mathbf{y}'+\right.$ $\left.+\frac{r}{r+R}\mathbf{y}''\right]=\frac{r+R}{r}y_0$, где $\mathbf{y}_0\in B$ так как $\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}''\in B$, $\frac{R}{r+R}+\frac{r}{r+R}=1$, $\frac{r}{r+R}>0$, $\frac{R}{r+R}>0$. Выберем произвольный вектор $\mathbf{x}\in R^m$ и произвольный шар

$K_r(\mathbf{a}) \subset B_n$. Тогда $K_r(0) \subset B_n - \mathbf{a}$ и, согласно сделанному замечанию, $B_n - \mathbf{a} + \mathbf{x} \subset B_n - \mathbf{a} + K_{\|\mathbf{x}\|}(0) \subset \frac{r+\|\mathbf{x}\|}{r}(B_n - \mathbf{a})$; следовательно,

$$\frac{\mu\Big((B_n+\mathbf{x}) \cup B_n\Big)}{\mu(B_n)} = \frac{\mu\Big((B_n-\mathbf{a}+\mathbf{x}) \cup (B_n-\mathbf{a})\Big)}{\mu(B_n)} \leqslant \frac{\mu\Big(\frac{r+\|\mathbf{x}\|}{r}(B_n-\mathbf{a})\Big)}{\mu(B_n)} = \left(\frac{r+\|\mathbf{x}\|}{r}\right)^m$$

($\mu(\cdot)$ — мера Лебега на R^m). В силу определения $r(B_n)$, имеем:

$$1 \leqslant \frac{\mu\Big((B_n+\mathbf{x}) \cup B_n\Big)}{\mu(B_n)} \leqslant \left(\frac{r(B_n)+\|\mathbf{x}\|}{r(B_n)}\right)^m, \quad n\in N, \quad \mathbf{x}\in R^m.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\in N} \frac{\mu\Big((B_n+\mathbf{x}) \cup B_n\Big)}{\mu(B_n)} = 1$ и $\{B_n, n\in N\}$ — эргодическая последовательность множеств. В частности, всякая последовательность шаров с неограниченно увеличивающимся радиусом, а также всякая последовательность параллелепипедов, все измерения которых неограниченно увеличиваются, являются эргодическими последовательностями множеств.

Пример 1.6. Пусть Z — аддитивная группа целых чисел; всякая последовательность параллелепипедов $\prod\limits_{i=1}^{m} \{k_i^{(n)}, k_i^{(n)}+1, \ldots, l_i^{(n)}\}$, $l_i^{(n)} - k_i^{(n)} \to \infty$ является эргодической последовательностью множеств. Это утверждение легко доказать непосредственно; оно вытекает также из предыдущего примера.

Пример 1.7. Опираясь на примеры 1.1, 1.4, 1.5 и 1.6, можно легко строить эргодические обобщенные последовательности множеств и функций на любых коммутативных группах бикомпактного происхождения (см. [8]), так как с точностью до алгебраического и топологического изоморфизмов всякую такую группу можно отождествить с группой вида $K \times R^p \times Z^q$, где K — бикомпактная группа (см. [8]).

Пример 1.8. Пусть G — произвольная коммутативная локально бикомпактная группа. Рассмотрим множество $\{F_\alpha, \alpha\in A\}$ всех открытых подгрупп группы G, имеющих бикомпактное происхождение. Пусть $\{\psi_{k,\alpha}, k=1, 2\ldots\}$ — эргодическая последовательность функций F_α такая, что все $\psi_{k,\alpha}(g) \geqslant 0$, если $g\in F_\alpha$, $\psi_{k,\alpha}(g) = 0$, если $g \notin F_\alpha$ и $\int\limits_{F_\alpha} \psi_{k,\alpha}(g)\, \mu_{F_\alpha}(dg) = 1$ (под $\mu_{F_\alpha}(\cdot)$ мы здесь понимаем меру Хаара на F_α, индуцируемую рассматриваемой нами мерой Хаара $\mu_G(\cdot) = \mu(\cdot)$ на G). Тогда обобщенная последовательность функций $\psi_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(g) = \psi_{k,\alpha_1} * \ldots * \psi_{k,\alpha_m}(g)$ (мы полагаем $(k', \alpha_1', \ldots, \alpha_{m'}') \succ \succ (k'', \alpha_1'', \ldots, \alpha_{m''}'')$, если $k' > k''$ и $\{\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_{m'}'\} \supset \{\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_{m''}''\}$) является эргодической на группе G. Покажем, что последовательность $\psi_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(g)$ удовлетворяет условиям $(E_1)-(E_4)$. Условие (E_1) выполнено. Очевидно, что все $\psi_{k,\alpha}\in L_1(\mu_G)$; применив теорему Фубини, убеждаемся, что

$$\psi_{k,\alpha,\beta}(f) = \int\limits_G \psi_{k,\alpha}(g^{-1}f)\, \psi_{k,\beta}(g)\, \mu_G(dg) \in L_1(\mu_G), \qquad \alpha, \beta\in A;$$

аналогично обстоит дело и с остальными функциями $\psi_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(g)$. Условия (E_2) и (E_3) выполнены, так как

$$\int_G \psi_{k,\alpha,\beta}(f)\,\mu_G(df) = \int_G\int_G \psi_{k,\alpha}(g^{-1}f)\,\psi_{k,\beta}(g)\,\mu_G(dg)\,\mu_G(df) =$$

$$= \int_G \psi_{k,\beta}(g)\,\mu_G(dg) \int_G \psi_{k,\alpha}(g^{-1}f)\,\mu_G(df) =$$

$$= \int_G \psi_{k,\beta}(g)\,\mu_G(dg) \int_G \psi_{k,\alpha}(f)\,\mu_G(df) = \int_{F_\beta} \psi_{k,\beta}(g)\,\mu_{F_\beta}(dg) \int_{F_\alpha} \psi_{k,\alpha}\,\mu_{F_\alpha}(df) = 1,$$

и вообще при всех $(k, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$

$$\int_G \psi_{k,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(g)\,\mu_G(dg) = 1.$$

Условие (E_4) выполнено. В самом деле, пусть f — произвольный элемент группы G. Тогда существует группа F_{α_0}, $\alpha_0 \in A$, содержащая элемент f. Пусть при всех $k > k_\varepsilon$

$$\int_{F_{\alpha_0}} \left|\psi_{k,\alpha_0}(fg') - \psi_{k,\alpha_0}(g')\right| \mu_{F_{\alpha_0}}(dg') < \varepsilon.$$

Используя теорему Фубини, получаем при $k > k_\varepsilon$ и любом $\beta \in A$

$$\int_G \left|\psi_{k,\alpha_0,\beta}(fg') - \psi_{k,\alpha_0,\beta}(g')\right| \mu_G(dg') =$$

$$= \int_G \left|\int_G \left[\psi_{k,\alpha_0}(g^{-1}fg') - \psi_{k,\alpha_0}(g^{-1}g')\right]\psi_{k,\beta}(g)\,\mu_G(dg)\right| \mu_G(dg') \leqslant$$

$$\leqslant \int_G\int_G \left|\psi_{k,\alpha_0}(g^{-1}fg') - \psi_{k,\alpha_0}(g^{-1}g')\right| \psi_{k,\beta}(g)\,\mu_G(dg)\,\mu_G(dg') =$$

$$= \int_G \psi_{k,\beta}(g)\,\mu_G(dg) \int_G \left|\psi_{k,\alpha_0}(g^{-1}fg') - \psi_{k,\alpha_0}(g^{-1}g')\right| \mu_G(dg') =$$

$$= \int_{F_{\alpha_0}} \left|\psi_{k,\alpha_0}(fg') - \psi_{k,\alpha_0}(g')\right| \mu_{F_{\alpha_0}}(dg') < \varepsilon.$$

Аналогичным образом легко убедиться, что и при всех $(k, \alpha_0, \ldots, \alpha_m) \succ \succ (k_\varepsilon, \alpha_0)$

$$\int_G \left|\psi_{k,\alpha_0,\ldots,\alpha_m}(fg) - \psi_{k,\alpha_0,\ldots,\alpha_m}(g)\right| \mu_G(dg) < \varepsilon;$$

это завершает доказательство нашего утверждения.

Пример 1.9. Свободные произведения циклических групп не обладают лево-эргодическими обобщенными последовательностями множеств (исключение составляют лишь циклические группы и свободные произведения двух циклических групп порядка 2). Это вытекает из того, что, как показал Диксмье [17], на таких группах отсутствует полное банахово среднее. Несколько видоизменив рассуждения Диксмье, можно получить и непосредственное доказательство этого факта; остановимся на случае, когда число свободных сомножителей не менее трех. Обозначим через C_i $(i=1, 2, 3)$ множество, состоящее из единицы и тех элементов g, у которых в представлении $g=s_{i_1}^{k_1}s_{i_2}^{k_2}\ldots s_{i_m}^{k_m}$ $(i_p\neq i_{p+1})$ $i_1\neq i$. Всякий элемент группы принадлежит двум множествам C_i $(i=1, 2, 3)$ и, самое большее, одному из множеств s_iC_i $(i=1, 2, 3)$; поэтому для любого конечного множества B

$$\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\mu(B\cap C_i)-\mu(s_i^{-1}B\cap C_i)}{\mu(B)}\right|\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}\mu(B\cap C_i)-\sum\limits_{i=1}^{3}\mu(B\cap s_iC_i)}{\mu(B)}\geqslant\frac{2\mu(B)-\mu(B)}{\mu(B)}=1$$

(здесь $\mu(B)$ — число элементов множества B). Поэтому для любого конечного множества B хотя бы при одном $i\in\{1, 2, 3\}$

$$\operatorname*{var}_{C\subset G}\frac{\mu(B\cap C)-\mu(s_i^{-1}B\cap C)}{\mu(B)}\geqslant\left|\frac{\mu(B\cap C_i)-\mu(s_i^{-1}B\cap C_i)}{\mu(B)}\right|\geqslant\frac{1}{3},$$

и, таким образом, (см. лемму 1.2) группа не обладает лево-эргодическими последовательностями множеств.

Пример 1.10. Дискретная группа вращений трехмерного пространства вокруг фиксированной точки также не обладает ни одной лево-эргодической обобщенной последовательностью множеств (см. [1], [17]); в обычной топологии эта группа, как и всякая бикомпактная группа (см. пример 1.4), обладает эргодическими последовательностями множеств.

Замечание. Аналогично „лево-эргодическим“ обобщенным последовательностям функций и множеств можно рассматривать и „право-эргодические“ последовательности; все сказанное легко перенести и на такие последовательности; мы на этом не останавливаемся. Заметим лишь, что лево-эргодическая последовательность функций или множеств, вообще говоря, не является право-эргодической, и обратно; в этом можно убедиться на примере 1.2. Если $\psi_n(g)$ (B_n) — левоэргодические обобщенные последовательности функций (множеств), то $\psi_n(g^{-1})$ (B_n^{-1}) являются право-эргодическими обобщенными последовательностями функций (множеств), и обратно.

§ 2. ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРУППАХ

Случайное поле $\xi(g)$ на группе G называется однородным (в широком смысле) относительно левых сдвигов, если $\mathbf{E}|\xi(g)|^2<\infty$, $\mathbf{E}\xi(g)\equiv\mathrm{const}$ и $\mathbf{E}\xi(gg_1)\overline{\xi(gg_2)}=\mathbf{E}\xi(g_1)\overline{\xi(g_2)}$ при любых $g, g_1, g_2\in G$ ($\mathbf{E}\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ); аналогично определяются случайные поля, однородные относительно правых сдвигов*). Случайное поле $\xi(g)$, $g\in G$, называется измеримым, если $\xi(g)=x(\omega, g)$ — измеримая функция на $\Omega\times G$ (Ω — пространство элементарных событий). Если $\xi(g)$ — однородное измеримое случайное поле и $\psi(g)$ — интегрируемая функция на группе G, то с

*) См. также [11].

вероятностью 1 существует $\int\limits_G \xi(g)\psi(g)\mu(dg)$; это немедленно вытекает из теоремы Фубини, так как

$$\int\limits_G \mathbf{E}|\xi(g)||\psi(g)|\mu(dg) \leqslant \int\limits_G \left(\mathbf{E}|\xi(g)|^2\right)^{\frac{1}{2}}|\psi(g)|\mu(dg) =$$
$$= \sigma\int\limits_G |\psi(g)|\mu(dg) < \infty \quad \left(\sigma^2 = \mathbf{E}|\xi(e)|^2\right).$$

При этом $\mathbf{E}\left(\left|\int\limits_G \xi(g)\psi(g)\mu(dg)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sigma\int\limits_G |\psi(g)|\mu(dg) < \infty.$

Лемма 2.1. *Пусть $\xi(g)$ — однородное относительно левых сдвигов случайное поле на группе G. Существует одна и, с точностью до эквивалентности*), только одна случайная величина $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют конечные наборы элементов $g_1, \ldots, g_k \in G$ и чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^k \alpha_i = 1$, такие, что при любом $g \in G$*

$$\left(\mathbf{E}\left|\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)] - \sum_{i=1}^k \alpha_i\xi(gg_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon; \tag{2.1}$$

случайная величина $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ обладает конечной дисперсией и инвариантна относительно левых и правых сдвигов, т. е. $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(f_1gf_2)] = \underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ при любых $g_1, g_2 \in G$.

Доказательство. Пусть H_ξ — гильбертово пространство случайных величин со скалярным произведением $(\eta, \xi) = \mathbf{E}\eta\bar{\xi}$, натянутое на случайные величины $\xi(g)$, $g \in G$ (эквивалентные случайные величины в H_ξ отождествляются). Легко видеть, что „операторы левого сдвига" U_g, определенные в H_ξ соотношениями $U_g\xi(f) = \xi(gf)$, являются унитарными и образуют группу, причем $U_{g_1}U_{g_2} = U_{g_1g_2}$. Пусть L_{U_g} — подпространство случайных величин, инвариантных относительно всех операторов U_g, $g \in G$. Согласно результатам Биркгофа [13] и Маака [21], оператор $\bar{U}$, проектирующий H_ξ на L_{U_g}, может быть охарактеризован следующим образом: для любой случайной величины $\eta \in H_\xi$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют конечные наборы элементов $g_1, \ldots, g_k \in G$ и чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$, $\sum\limits_{i=1}^k \alpha_i = 1$, такие, что для всех $g \in G$

$$\left\|\bar{U}\eta - \sum_i \alpha_i U_{gg_i}\eta\right\| < \varepsilon.$$

*) Случайные величины ξ и η называются эквивалентными, если $\mathbf{P}\{\xi = \eta\} = 1$.

Положим $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=\bar{U}\xi(e)$; тогда при соответствующем выборе $g_1, \ldots, g_k \in G$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k>0$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$, при любом $g\in G$

$$\left(\mathbf{E}\left|\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\xi(gg_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|\bar{U}\xi(e)-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i U_{gg_i}\xi(e)\right\|<\varepsilon.$$

Обратно, если случайная величина $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ удовлетворяет условию леммы, то с вероятностью 1 $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]\doteq\bar{U}\xi(e)$. Далее, нетрудно убедиться, что случайное поле $\xi(f_1gf_2)$ однородно относительно левых сдвигов. Положив в неравенстве (2.1) $g_i=g_i'f_2$, получим, что при всех $g\in G$

$$\left(\mathbf{E}\left|\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]-\sum_{i}\alpha_i\xi(f_1gg_i'f_2)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon;$$

в силу произвольности числа ε, отсюда вытекает, что

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(f_1gf_2)].$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть $\{\psi_n(g),\ n\in N\}$ право-(лево-) эргодическая обобщенная последовательность функций на локально бикомпактной группе G; тогда для любого измеримого случайного поля $\xi(g)$, $g\in G$, однородного относительно левых (правых) сдвигов существует „правое среднее значение по группе“*

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=\underset{n\in N}{\text{l. i. m.}}\int_G\xi(g)\psi_n(g)\nu(dg), \tag{2.2}$$

(„левое среднее значение по группе“

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=\underset{n\in N}{\text{l. i. m.}}\int_G\xi(g)\psi_n(g)\mu(dg)\Big) \tag{2.2'}$$

($\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ — левая и правая меры Хаара на G); случайная величина $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$

1) *обладает конечной дисперсией;*

2) *с точностью до эквивалентности однозначно определяется случайным полем $\xi(g)$ независимо от выбора обобщенной последовательности функций $\{\psi_n(g),\ n\in N\}$;*

3) *инвариантна относительно левых и правых сдвигов.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1 существует с точностью до эквивалентности однозначно определенная случайная величина $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ такая, что для произвольного $\varepsilon>0$ при надлежащим образом подобранных элементах $g_1, \ldots, g_k\in K$ и числах $\alpha_1, \ldots, \alpha_k\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$, для любого $g\in G$

$$\left(\mathbf{E}\left|\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\xi(gg_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{4C}$$

и $\mathbf{E}\left|\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]\right|^2=\sigma^2<\infty$ $\Big($здесь C — положительное число такое, что $\int\limits_G |\psi_n(g)|\,\nu(dg)<C,\ n\in N\Big)$. Пусть, далее, $\left|\int\limits_G \psi_n(g)\,\nu(dg)-1\right|<\frac{\varepsilon}{4\sigma}$ при всех $n\succ n'_\varepsilon$; тогда

$$\left(\mathbf{E}\left|\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]-\sum_{i=1}^k\alpha_i\int\limits_G \xi(gg_i)\,\psi_n(g)\,\nu(dg)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\mathbf{E}\left|\int\limits_G\left(\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]-\sum_{i=1}^k\alpha_i\xi(gg_i)\right)\psi_n(g)\,\nu(dg)+\right.\right. \tag{2.3}$$

$$\left.\left.+\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]\left(1-\int\limits_G\psi_n(g)\,\nu(dg)\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\mathbf{E}\left|\int\limits_G\left(\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]-\sum_{i=1}^k\alpha_i\xi(gg_i)\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\psi_n(g)\,\nu(dg)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sigma\left|1-\int\limits_G\psi_n(g)\,\nu(dg)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4c}\int\limits_G|\psi_n(g)|\,\nu(dg)+\frac{\varepsilon}{4}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, существует $n''_\varepsilon\in N$ такой, что при всех $n\succ n''_\varepsilon$ имеем:

$$\int\limits_G\left|\psi_n(gg_i^{-1})-\psi_n(g)\right|\nu(dg)<\frac{\varepsilon}{2\sigma_1}\qquad(i=1,\ \ldots,\ k);$$

$\sigma_1^2=\mathbf{E}\,|\,\xi(e)\,|^2$; следовательно,

$$\left(\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^k\alpha_i\int\limits_G\xi(gg_i)\,\psi_n(g)\,\nu(dg)-\int\limits_G\xi(g)\,\psi_n(g)\,\nu(dg)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^k\alpha_i\int\limits_G\xi(g)\,\psi_n(gg_i^{-1})\,\nu(dg)-\int\limits_G\xi(g)\,\psi_n(g)\,\nu(dg)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^k\alpha_i\int\limits_G\xi(g)\left(\psi_n(gg_i^{-1})-\psi_n(g)\right)\nu(dg)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_{i=1}^k\alpha_i\left(\mathbf{E}\left|\int\limits_G\xi(g)\left(\psi_n(gg_i^{-1})-\psi_n(g)\right)\nu(dg)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sigma_1\frac{\varepsilon}{2\sigma_1}=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Взяв $n_\varepsilon\succ n'_\varepsilon$, $n_\varepsilon\succ n''_\varepsilon$, из соотношений (2.3) и (2.4) получаем, что при всех $n\succ n_\varepsilon$

$$\left(\mathbf{E}\left|\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]-\int\limits_G\xi(g)\,\psi_n(g)\,\nu(dg)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon.$$

Таким образом, в силу произвольности выбора числа $\varepsilon>0$

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=\underset{n\in N}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int\limits_G\xi(g)\,\psi_n(g)\,\nu(dg).$$

Из определения случайной величины $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ и из леммы 2.1 следует, что эта случайная величина обладает свойствами (1) – (3). Если $\xi(g)$ – случайное поле на группе G, однородное относительно правых сдвигов, а $\{\psi_n(g), n\in N\}$ – лево-эргодическая обобщенная последовательность функций, то случайное поле $\xi^*(g)=\xi(g^{-1})$ однородно относительно левых сдвигов, а функции $\psi_n^*(g)=\psi_n(g^{-1})$ образуют право-эргодическую обобщенную последовательность функций; поэтому существует случайная величина

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi^*(g)]=\underset{n\in N}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int\limits_G \xi^*(g)\,\psi_n^*(g)\,\nu(dg)=$$

$$=\underset{n\in N}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int\limits_G \xi(g^{-1})\,\psi_n(g^{-1})\,\nu(dg)=\underset{n\in N}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int\limits_G \xi(g)\,\psi_n(g)\,\mu(dg)=\mathbf{M}[\xi(g)].$$

Теорема доказана.

Положив $\psi_n(g)=\frac{1}{\nu(B_n)}\chi_{B_n}(g)\left(\psi_n(g)=\frac{1}{\mu(B_n)}\chi_{B_n}(g)\right)$, если $\{B_n, n\in N\}$ – право-(лево-) эргодическая обобщенная последовательность множеств, получаем

Следствие 2.1. *Пусть $\{B_n, n\in N\}$ – право- (лево-) эргодическая обобщенная последовательность множеств на локально бикомпактной группе G; тогда для любого измеримого случайного поля $\xi(g)$, $g\in G$, однородного относительно левых (правых) сдвигов, среднее значение*

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=\underset{n\in N}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{\nu(B_n)}\int\limits_{B_n}\xi(g)\,\nu(dg)\left(\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=\underset{n\in N}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{\mu(B_n)}\int\limits_{B_n}\xi(g)\,\mu(dg)\right).$$

§. 3. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ГРУППАХ

Бор показал, что для любой измеримой почти-периодической функции $p(g)$ на прямой существует среднее значение

$$\underset{x}{\mathbf{M}}[p(x)]=\lim_{X\to\infty}\int\limits_{-X}^{X}p(x)\,dx.^{*)}$$

Нейман [22] дал общее определение среднего значения $\underset{g}{\mathbf{M}}[p(g)]$ произвольной почти-периодической функции $p(g)$ на любой группе G как единственной константы, принадлежащей равномерно замкнутой выпуклой оболочке функций $p_h(g)=p(gh)$, $h\in G$. Естественно возникают два вопроса: во-первых, можно ли распространить боровское определение средних значений почти-периодических функций на общие локально бикомпактные группы и, во-вторых, в случае положительного ответа на первый вопрос, совпадает ли это вновь определенное среднее с неймановским средним; мы дадим положительные ответы на оба вопроса для групп, обладающих

*) См., например, [5].

эргодическими обобщенными последовательностями функций. Этот результат обобщает результаты Любарского [6] и Страбла [24]; он будет использован нами в дальнейшем (§ 4).

Теорема 3.1 *Пусть* $\{\varphi_m, m\in M\}$, $\{\psi_n, n\in N\}$ — *соответственно, лево- и право-эргодические обобщенные последовательности функций на локально бикомпактной группе* G; *тогда для всякой измеримой почти-периодической функции* $p(g)$, $g\in G$ *неймановское среднее значение может быть определено по формуле*:

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[p(g)] = \lim_{m\in M}\int_G p(g)\,\varphi_m(g)\,\mu(dg) = \lim_{n\in N}\int_G p(g)\,\psi_n(g)\,\nu(dg). \qquad (3.1)$$

Доказательство. Из определения среднего значения $\underset{g}{\mathbf{M}}[p(g)]$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существуют элементы $g_1, \ldots, g_k\in G$ и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$; $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$, такие, что при любом $g\in G$

$$\left|\underset{g}{\mathbf{M}}[p(g)] - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i p(gg_i)\right| < \varepsilon.$$

Дальнейшие рассуждения почти дословно совпадают с рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 2.1; мы их опускаем.

Аналогично доказывается теорема о среднем значении для положительно определенных функций.

Теорема 3.2 *Для всякой измеримой положительно определенной функции* $p(g)$, $g\in G$, *среднее значение Годмана* (*см.* [20]) *может быть определено по формуле* (3.1).

§ 4. ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть $I(\varphi)$ — однородное (в широком смысле) обобщенное случайное поле над пространством K финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_m)\in R^m$, $F(d\lambda)$ и $\Phi(d\lambda)$ — соответственно средняя квадратичная и случайная спектральные меры этого поля, причем $\int_{R^m}\frac{F(d\lambda)}{(1+\|\lambda\|^2)^p}<\infty$ при некотором целом $p\geqslant 0$ $\left(\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\right)$, т. е. $I(\varphi)$ — однородное обобщенное случайное поле класса $\mathfrak{S}_p$ (см. [3], [4], [10]. Рассмотрим линейное многообразие M_F абсолютно интегрируемых по Лебегу функций $\bar{\bar{\psi}}(\mathbf{x})$ таких, что $\tilde{\psi}(\lambda)=\int_{R^m}e^{i(\lambda,\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\in L_2(F)$. Формула спектрального представления $I(\varphi)=\int_{R^m}\tilde{\varphi}(\lambda)\,\Phi(d\lambda)$ позволяет продолжить поле $I(\varphi)$ до случайного линейного функционала, определенного на M_F и непрерывного в среднем квадратичном относительно нормы $\|\psi\|=\int_{R^m}|\tilde{\psi}(\lambda)|^2F(d\lambda)$.

$\psi \in M_F$. Обозначим через $D_{L_1}^p$ множество функций $\psi(\mathbf{x})$, для которых при любых целых $p_1, \ldots, p_m \geqslant 0$, $p_1 + \ldots + p_m \leqslant p$ существуют абсолютно интегрируемые по Лебегу производные $\frac{\partial^{p_1 + \ldots + p_m}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_m^{p_m}} \psi(\mathbf{x})$.

Лемма 4.1. Если $\int\limits_{R^m} \frac{F(d\lambda)}{(1 + \|\lambda\|^2)^p} < \infty$, то $D_{L_1}^p \subset M_F$.

Доказательство. Пусть $\psi(\mathbf{x}) \in D_{L_1}^p$; тогда

$$\sup_{\lambda \in R^m} |\tilde{\psi}(\lambda)| \leqslant \int\limits_{R^m} |\psi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} < \infty. \tag{4.1}$$

Аналогично, пользуясь известной формулой:

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^{p_1 + \ldots + p_m}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_m^{p_m}} \psi(\mathbf{x})\right] = (-i)^{p_1 + \ldots + p_m} \lambda_1^{p_1} \ldots \lambda_m^{p_m} \mathscr{F}[\psi],$$

где $\mathscr{F}[\psi] = \tilde{\psi}(\lambda)$, $\sum\limits_{i=1}^m p_i \leqslant p$, получаем:

$$\sup_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R^m} \left| \lambda_1^{p_1} \ldots \lambda_m^{p_m} \tilde{\psi}(\lambda) \right| \leqslant \int\limits_{R^m} \left| \frac{\partial^{p_1 + \ldots + p_m}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_m^{p_m}} \psi(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} < \infty.$$

Следовательно, существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $\lambda \in R^m$

$$\|\lambda\|^{2p} |\tilde{\psi}(\lambda)|^2 = \sum_{p_1 + \ldots + p_m = p} \lambda_1^{2p_1} \ldots \lambda_m^{2p_m} |\tilde{\psi}(\lambda)|^2 < C. \tag{4.2}$$

Неравенства (4.1) и (4.2) показывают, что $\tilde{\psi}(\lambda) \in L_2(F)$, т. е. $\psi(\mathbf{x}) \in M_F$.

Определение. Пусть $N = \{n\}$ — некоторое направление, p — целое неотрицательное число; обобщенную последовательность функций $\{\psi_n(\mathbf{x}), n \in N\}$ мы назовем *p-эргодической*, если

(E_1^p) все $\psi_n(\mathbf{x}) \in D_{L_1}^p$;

(E_2^p) $\lim\limits_{n \in N} \int\limits_{R^m} \psi_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$;

(E_3^p) существует такая постоянная $C > 0$, что

a) $\int\limits_{R^m} |\psi_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < C$ для всех $n \in N$;

b) $\int\limits_{R^m} \left| \frac{\partial^{p_1 + \ldots + p_m}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_m^{p_m}} \psi_n(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} < C$ для всех $n \in N$,

если $\sum\limits_{i=1}^m p_i = p$;

(E_4^p) $\lim\limits_{n \in N} \int\limits_{R^m} \left| \psi_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \psi_n(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} = 0$

для любого $\mathbf{y} \in R^m$.

Пример 4.1. Понятие 0-эргодической обобщенной последовательности функций совпадает с введением нами выше (§ 1) понятием эргодической обобщенной последовательности функций на R^m; примеры таких последовательностей даны выше (см. пример 1.5).

Пример 4.2. Если $\varphi(\mathbf{x}) \in K$, $\int\limits_{R^m} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \neq 0$, и $\{\psi_n(\mathbf{x}),\ n \in N\}$ — 0-эргодическая обобщенная последовательность функций, то обобщенная последовательность функций

$$\psi_n^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{\int\limits_{R^m} \varphi\, d\mathbf{x}} \varphi * \psi_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\int\limits_{R^m} \varphi\, d\mathbf{x}} \int\limits_{R^m} \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \psi_n(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \tag{4.3}$$

является p-эргодической при любом $p \geqslant 0$. То, что при любом целом $p \geqslant 0$ выполняется условие (E_1^p) — очевидно. Далее

$$\lim_{n \in N} \int\limits_{R^m} \psi_n^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_{n \in N} \frac{1}{\int\limits_{R^m} \varphi\, d\mathbf{x}} \int\limits_{R^m} d\mathbf{x} \int\limits_{R^m} \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \psi_n(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} =$$

$$= \lim_{n \in N} \frac{1}{\int\limits_{R^m} \varphi\, d\mathbf{x}} \int\limits_{R^m} \psi_n(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \int\limits_{R^m} \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \lim_{n \in N} \int\limits_{R^m} \psi_n(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 1,$$

и, таким образом, условие (E_2^p) также выполнено. Аналогично можно убедиться в выполнении условий $(E_3^p$, a) и $(E_3^p$, b) при всех $p \geqslant 0$. Далее имеем:

$$\int\limits_{R^m} \left| \psi_n^*(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \psi_n^*(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} = \frac{1}{\int\limits_{R^m} \varphi\, d\mathbf{x}} \int\limits_{R^m} \left| \int\limits_{R^m} \varphi(\mathbf{z}) \big[\psi_n(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}) - \right.$$

$$\left. - \psi_n(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \big] d\mathbf{z} \right| d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{\int\limits_{R^m} \varphi\, d\mathbf{x}} \int\limits_{R^m} |\varphi(\mathbf{z})|\, d\mathbf{z} \int\limits_{R^m} \left| \psi_n(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \psi_n(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x},$$

и при любом $\mathbf{y} \in R^m$

$$\lim_{n \in N} \int\limits_{R^m} \left| \psi_n^*(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \psi_n^*(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} = 0.$$

Таким образом, условие (E_4^p) также выполнено.

Следующая теорема является обобщением эргодической теоремы для измеримых однородных случайных полей на R^m.

Теорема 4.1. *Пусть $I(\varphi)$ — однородное обобщенное случайное поле класса $\mathfrak{S}_p$ и $\{\psi_n(\mathbf{x}),\ n \in N\}$ — p-эргодическая обобщенная последовательность функций на R^m; тогда существует* $\operatorname*{l.i.m.}_{n \in N} I(\psi_n)$ *и с вероятностью* 1

$$\operatorname*{l.i.m.}_{n \in N} I(\psi_n) = \Phi(\{0\}). \tag{4.4}$$

Доказательство. Для упрощения рассуждений мы предположим, что направление N содержит счетное упорядоченное конфинальное подмножество*). Прежде всего, заметим, что фигурирующие в формулировке теоремы случайные величины $I(\psi_n)$ действительно определены — в силу условия (E_1^p) и леммы 4.1, причем

$$I(\psi_n)=\int_{R^m}\tilde{\psi}_n(\lambda)\,\Phi(d\lambda). \tag{4.5}$$

Поскольку функции $e^{i(\lambda,x)}$ являются почти-периодическими, при любом $\lambda\in R^m$ существует среднее значение $\underset{x}{\mathrm{M}}[e^{i(\lambda,x)}]$, причем

$$\underset{x}{\mathrm{M}}[e^{i(\lambda,x)}]=\underset{x}{\mathrm{M}}[e^{i(\lambda,x+y)}]=e^{i(\lambda,y)}\underset{x}{\mathrm{M}}\,e^{i(\lambda,x)};$$

отсюда следует, что

$$\underset{x}{\mathrm{M}}[e^{i(\lambda,x)}]=\chi_{\{0\}}(\lambda)=\begin{cases}0, & \text{если } \lambda\neq 0,\\ 1, & \text{если } \lambda=0.\end{cases}$$

По теореме 3.1, существует

$$\lim_{n\in N}\tilde{\psi}(\lambda)=\lim_{n\in N}\int_{R^m}e^{i(\lambda,x)}\psi_n(x)\,dx=\chi_{\{0\}}(\lambda).$$

Рассуждая, как при доказательстве леммы 4.1, можно убедиться, что при всех $\lambda\in R^m$

$$|\tilde{\psi}_n(\lambda)|^2\leqslant\frac{C_1}{(1+\|\lambda\|^2)^p},$$

где постоянная C_1 не зависит от n. Отсюда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла**)

$$\lim_{n\in N}\int_{R^m}\left|\tilde{\psi}_n(\lambda)-\chi_{\{0\}}(\lambda)\right|^2F(d\lambda)=0.$$

Далее, в силу известного свойства интеграла по случайной ортогональной мере,

$$\lim_{n\in N}\mathrm{E}\left|I(\psi_n)-\Phi(\{0\})\right|^2=\lim_{n\in N}\mathrm{E}\left|\int_{R^m}\tilde{\psi}_n(\lambda)\,\Phi(d\lambda)-\Phi(\{0\})\right|^2=$$

$$=\lim_{n\in N}\mathrm{E}\left|\int_{R^m}\left(\tilde{\psi}_n(\lambda)-\chi_{\{0\}}(\lambda)\right)\Phi(d\lambda)\right|^2=\lim_{n\in N}\int_{R^m}\left|\tilde{\psi}_n(\lambda)-\chi_{\{0\}}(\lambda)\right|^2F(d\lambda)=0.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Остановимся на двух следствиях теоремы 4.1.

Пусть $I(\varphi)$ — обобщенный случайный процесс на прямой R и $K(\varphi)$ — его первообразная, т. е. $K'(\varphi)=I(\varphi)$. Рассмотрим обобщенные случайные процессы-„интегралы“

$$\int_{x-T}^{x+T}I(\varphi)\,dt=K\big(\varphi(x-T)\big)-K\big(\varphi(x+T)\big)=I\Big(\int_{x-T}^{x+T}\varphi(t)\,dt\Big).$$

---

*) Доказательство теоремы для общего случая будет опубликовано в другом месте.

**) Эта теорема остается в силе для рассматриваемых нами „сепарабельных“ обобщенных последовательностей функций.

Так как $\frac{1}{2T}\chi_{(-T,T)}(t)$ 0-эргодическая последовательность функций, последовательность функций,

$$\psi_T(x)=\frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\,dt}\,\frac{1}{2T}\int\limits_{x-T}^{x+T}\varphi(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\,dt}\,\frac{1}{2T}\int\limits_{T}^{T}\varphi(x-t)\,dt=\frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\,dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}\chi_{(-T,T)}(t)\,\varphi(x-t)\,dt$$

является p-эргодической при любом целом $p\geqslant 0$ (см. пример 4.2). Применяя к ней и к произвольному стационарному обобщенному случайному процессу $I(\varphi)$ теорему 4.1, получаем

Следствие 4.1. *Для всякого стационарного обобщенного случайного процесса $I(\varphi)$ при любой функции $\varphi\in K$ существует*

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,\frac{1}{2T}\int\limits_{x-T}^{x+T}I(\varphi)\,dt=\Phi(\{0\})\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt$$

(равенство имеет место с вероятностью 1); иными словами, последовательность обобщенных случайных процессов $\frac{1}{2T}\int\limits_{x-T}^{x+T}I(\varphi)\,dt$ сходится в среднем квадратичном к случайной константе $\Phi(\{0\})$.

Аналогичное предложение для обобщенных случайных процессов, реализации которых являются обобщенными функциями в смысле Микусинского доказал Урбаник (см. [9], [24]).

Всякое измеримое однородное случайное поле $\xi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in R^m$, можно рассматривать как однородное обобщенное случайное поле класса $\mathfrak{S}_0$, если для любой функции $\varphi\in K$ положить $I(\varphi)=\int\limits_{R^m}\xi(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Продолжив функционал $I(\varphi)$ на M_F, получим для всякой функции $\psi\in M_F$

$$I(\psi)=\int\limits_{R^m}\tilde{\psi}(\lambda)\,\Phi(d\lambda)=\int\limits_{R^m}\int\limits_{R^m}e^{i(\lambda,\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,\Phi(d\lambda)=$$

$$=\int\limits_{R^m}\int\limits_{R^m}e^{i(\lambda,\mathbf{x})}\Phi(d\lambda)\,\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\int\limits_{R^m}\xi(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

(произведенное здесь изменение порядка интегрирований легко обосновать с помощью теоремы Фубини). Применив к однородному обобщенному случайному полю $I(\varphi)$ теорему 4.1, получим

Следствие 4.2. *Пусть $\xi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^m$, — измеримое однородное случайное поле и $\{\psi_n(\mathbf{x}),\ n \in N\}$ — эргодическая обобщенная последовательность функций на R^m; тогда существует*

$$\underset{n \in N}{\mathrm{l.i.m.}} \int\limits_{R^m} \xi(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \Phi(\{0\})$$

(*равенство имеет место с вероятностью* 1).

Это следствие совпадает с теоремой 2.1 для измеримых однородных случайных полей на R^m.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
29. XII. 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Адельсон-Вельский Г. М. и Шрейдер Ю. А., Банахово среднее на группах. УМН, 2, 145—177 (1957).
2. Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., 1950.
3. Гельфанд И. М. и Виленкин Н. Я., Обобщенные функции, 4: Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., 1961.
4. Ито К., Стационарные случайные обобщенные процессы. Математика, 1, 139—151 (1957).
5. Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.
6. Любарский Г. Я., Об интегрировании в среднем почти-периодических функций на топологических группах. УМН, 3, 195—201 (1948).
7. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ. М., 1956.
8. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М., 1954.
9. Урбаник К., Случайные процессы, реализации которых являются обобщенными функциями. Теория вероятностей и ее применения, 1, 146—149 (1956).
10. Яглом А. М., Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам. Теория вероятностей и ее применения, 2, 292—338 (1957).
11. Яглом А. М., Положительно определенные функции и однородные случайные поля на группах и однородных пространствах. ДАН СССР, 135, 1342—1345 (1960).
12. Alaoglu L., Birkhoff G., General ergodic theorems. Ann of Math.. 41, 293—309 (1940).
13. Birkhoff G., An ergodic theorem for general semi-groups. Proc. Nat Acad. Sci USA, 25, 625 (1939).
14. Boclé J., Sur la théorie ergodique. Ann. Inst. Fourier, 10, 1—45 (1960).
15. Calderon A. P., A general ergodic theorem. Ann. of Math., 58, 182—191 (1953).
16. Day M. M., Ergodic theorems for abelian semi-groups. Trans. Amer. Math. Soc., 51, 399—412 (1942).
17. Dixmier J., Les moyennes invariants dans les semi-groupes et leurs applications. Acta Sci. Math. Szeged. 12, Pars A, 213—227 (1950).
18. Eberlein W. F., Abstract ergodic theorems. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34, 43—47 (1948).
19. Eberlein W. F., Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 67, 217—240 (1949).
20. Godement R., Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc., 63, 1—84 (1948).
21. Maak W., Periodizitätseigenschaften unitärer Gruppen in Hilberträumen. Math. Scand., 2, 334—344 (1954).

22. Neumann J., Almost periodic functions in a group. Trans. Amer. Math. Soc., 36, 445–492 (1934).
23. Pitt H. R., Some generalizations of the ergodic theorem. Proc. Cambr. Phil. Soc., 38, 325–343 (1942).
24. Struble R. A., Almost periodic functions on locally compact groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39, 122–126 (1953).
25. Urbanik K., Generalized stochastic processes. Studia Math., 16, 268–334 (1958).
26. Wiener N., The ergodic theorem. Duke Math. J., 5, 1–18 (1939).

ERGODINĖS TEOREMOS HOMOGENINIAMS APIBENDRINTIEMS ATSITIKTINIAMS LAUKAMS IR HOMOGENINIAMS ATSITIKTINIAMS LAUKAMS GRUPĖSE

A. TEMPELMANAS

(Reziumė)

Straipsnyje Neumano ergodinė teorema išplečiama homogeniniams apibendrintiems atsitiktiniams laukams erdvėje R^n ir homogeniniams laukams lokaliai bikompaktinėse grupėse, turinčiose „kairiaergodines apibendrintas funkcijų sekas“. Taip pat įrodoma teorema apie vidurkį beveik periodinėms ir teigiamai apibrėžtoms funkcijoms tokiose grupėse.

ERGODIC THEOREMS FOR HOMOGENEOUS GENERALIZED STOCHASTIC FIELDS AND HOMOGENEOUS STOCHASTIC FIELDS ON GROUPS

A. TEMPELMAN

(Summary)

In this paper we extend Neumann's ergodic theorem to homogeneous generalized stochastic fields on R^n and to homogeneous stochastic fields on locally bicompact groups possessing „left-ergodic generalized sequences of functions“. We also prove a theorem about the mean value for almost periodic and positively definite functions on such groups.