ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
II LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1962

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ СЕРИЙ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Б. РЯУБА

Цель настоящей заметки является обобщение результатов автора, содержащихся в [1].

Рассматривается последовательность серий случайных величин

$$X_1^{(n)},\ X_2^{(n)},\ \ldots,\ X_n^{(n)}\quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Случайные величины, образующие n-ю серию ($n=1, 2, \ldots$) слабо зависимы. Слабая зависимость определяется тем, что с вероятностью единица

$$\sup_{l-k=\tau}\ \sup_{A\in F_{ln}^{(n)}}\left|\mathbf{P}\left(A\,\middle|\,\mathfrak{F}_{1k}^{(n)}\right)-\mathbf{P}(A)\right|\leqslant e^{-\alpha_n\tau},^{1} \tag{2}$$

причём α_n с определенной скоростью может стремиться к 0 при $n\to\infty$. Здесь $\mathfrak{F}_{kl}^{(n)}$ $(1\leqslant k<l\leqslant n)-\sigma-$алгебра, порожденная событиями вида

$$\left\{\left(X_{i_1}^{(n)},\ X_{i_2}^{(n)},\ \ldots,\ X_{i_r}^{(n)}\right)\in B\right\}\qquad (k\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r<l),$$

$B-r$-мерное борелевское множество.

Положим

$$S_{kl}^{(n)}=\sum_{i=k+1}X_i^{(n)},\quad S^{(n)}=S_{0n}^{(n)},$$

$$\mathbf{D}S^{(n)}=B_n^2,\quad F_k^{(n)}(x)=\mathbf{P}\left\{X_k^{(n)}<x\right\}.$$

Во всем дальнейшем будем предполагать (см. [1]), что равномерно для всех k и l

$$\mathbf{D}S_{kl}^{(n)}\,\alpha_n^2\,\frac{n}{l-k}\,(\ln n)^{-2}\to\infty \tag{3}$$

при $l-k\geqslant\frac{1}{\alpha_n}$ и $n\to\infty$.

Теорема 1. *Если случайные величины* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3) *и равномерно для всех i и n*

$$\mathbf{D}X_i^{(n)}\leqslant C<\infty,\quad \mathbf{M}X_i^{(n)}=0, \tag{4}$$

---

[1] Предполагается, что (2) выполнено и для $\mathbf{P}\left(A\,|\,\mathfrak{F}_{1l}^{(n)}\right)-\mathbf{P}\left(A\,|\,\mathfrak{F}_{kl}^{(n)}\right)$.

кроме того, при $n \to \infty$

$$\alpha_n n^{\frac{1}{3}} (\ln n)^{-1} \to \infty, \tag{5}$$

а также для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2 \alpha_n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon B_n \alpha_n} x^2\, dF_k^{(n)}(x) = 0, \tag{6}$$

то равномерно для всех x

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{S^{(n)}}{B_n} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{7}$$

Теорема 2. *Если случайные величины* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3) *и для некоторого $m > 2$ и равномерно для всех i и n*

$$\mathbf{M}\left| X_i^{(n)} - \mathbf{M}X_i^{(n)} \right|^m \leqslant \gamma_m < \infty, \tag{8}$$

то для выполнения соотношения (7) *достаточно, чтобы при $n \to \infty$*

$$\alpha_n^{m-1} B_n^m n^{-1} \to \infty. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1. Фиксируем n и полагаем

$$S^{(n)} = \sum_{i=0}^{p} S_{k_i l_i}^{(n)},$$

где

$$l_i - k_i = k_i - l_i = K\left[\frac{1}{\alpha_n} + 1\right] \qquad (i = 0, 1, \ldots, p);$$

K — некоторое постоянное число; $[x]$ — целая часть числа x,

$$Y_i^{(n)} = \begin{cases} X_i^{(n)}, & \text{если} \quad \left|X_i^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon B_n \alpha_n, \\ 0, & \text{если} \quad \left|X_i^{(n)}\right| > \varepsilon B_n \alpha_n, \end{cases} \tag{10}$$

$$T_{kl}^{(n)} = \sum_{i=k+1} Y_i^{(n)}, \quad T_{0n}^{(n)} = T^{(n)},$$

$$S_{kl}^{(n)} - T_{kl}^{(n)} = Z_{kl}^{(n)}, \quad Z_{0n}^{(n)} = Z^{(n)}.$$

Аналогично, как и в лемме (см. [1]), принимая во внимание условия (2), (3), (4) и (5), можно доказать, что существует постоянное число $L > 0$ такое, что

$$\mathbf{D}Z^{(n)} \leqslant 2\left(\mathbf{D}\left(\sum_{i=2k-1} Z_{k_i l_i}^{(n)}\right) + \mathbf{D}\left(\sum_{i=2k} Z_{k_i l_i}^{(n)}\right)\right) \leqslant L \sum_{i=1}^{p} \mathbf{D}Z_{k_i l_i}^{(n)}. \tag{11}$$

Применив неравенство Чебышева и (9), (11), получаем, что для любого $\delta > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{Z^{(n)}}{B_n}\right| > \delta\right\} \leqslant \frac{\mathbf{D}Z^{(n)}}{\delta^2 B_n^2} \leqslant \frac{L\sum_{i=1}^{p}\mathbf{D}Z_{k_i l_i}^{(n)}}{\delta^2 B_n^2} \leqslant \frac{L\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\left(X_k^{(n)}-Y_k^{(n)}\right)^2}{\delta^2 B_n^2 \alpha_n} =$$

$$= \frac{L}{\delta^2 B_n^2 \alpha_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon B_n \alpha_n} x^2\, dF_k^{(n)}(x),$$

а последнее, ввиду условия (6), стремится к 0 при $n \to \infty$. И так, при доказательстве теоремы, $X_i^{(n)}$ можем заменить на $Y_i^{(n)}$. По определению $|Y_i^{(n)}| \leqslant \varepsilon B_n \alpha_n$ равномерно для всех i и n. Если положить $C^{(n)} = \varepsilon B_n \alpha_n$, то в силу условия (6) величины $Y_i^{(n)}$ и $C^{(n)}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 3 из работы [1]. Отсюда и следует справедливость утверждения (7).

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость условия (6). Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{1}{B_n^2 \alpha_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon B_n \alpha_n} x^2\, dF_k^{(n)}(x) \leqslant \frac{(\varepsilon B_n \alpha_n)^{2-m}}{B_n^2 \alpha_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon B_n \alpha_n} |x|^m\, dF_k^{(n)}(x) \leqslant$$

$$\leqslant n\gamma_m \varepsilon^{2-m} B_n^{-m} \alpha_m^{-m+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Следовательно, условие (6) справедливо. Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
29. XII. 1961

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Ряуба, О применимости центральной предельной теоремы к суммам серий слабо зависимых случайных величин, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и ее применениям, Вильнюс, 1961.

[2] Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен., 1 (1956), 72–89.

[3] Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен., I, 4 (1956), 365–425.

DĖL CENTRINĖS RIBINĖS TEOREMOS SILPNAI PRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SERIJŲ SUMOMS

B. RIAUBA

(Reziumė)

Šio darbo tikslas — apibendrinti [1] darbo rezultatus. Įrodoma centrinė ribinė teorema (7) priklausomų atsitiktinių dydžių (1) sumų serijoms, kada patenkintos (2), (3), (4), (5), (6) arba (2), (3), (8), (9) sąlygos.

ON CENTRAL LIMIT THEOREM FOR SUMS OF SERIES WEAKLY DEPENDENT RANDOM VARIABLES

B. RIAUBA

(Summary)

Purpose of this paper, is a generalization of the results of paper [1]. We prove the central limit theorem (7) for sums of series dependent random variables (1) under the conditions (2), (3), (4), (5), (6) or (2), (3), (8), (9).