ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
II LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1

1962

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ, СВЯЗАННЫХ В НЕОДНОРОДНУЮ ЦЕПЬ МАРКОВА II

А. К. РАУДЕЛЮНАС

(*Продолжение**)

§ 6. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теоремы 1 и 2 легко можно обобщить на случай произвольных (не обязательно ограниченных) слагаемых. Справедливы следующие теоремы:

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{X}_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$ — *случайные векторы, компоненты которых принимают только целочисленные значения, причем*

$$0 < c < \mathbf{D}\,(X_k^{(n)}\,\mathbf{t}) < C < \infty, \quad k=1, 2, \ldots, n \tag{6.1}$$

для всех $\mathbf{t}$ *с* $|\mathbf{t}|=1$ *и выполнено условие* (А): *квадратичная форма* $\varphi_n(\mathbf{t})$ *равномерно относительно* n *положительно определена.*

Пусть, кроме того, равномерно по k *и* n *для всех* $i=1, 2, \ldots, s$,

$$\frac{1}{\alpha^{(n)}} \int\limits_{|x_i - \mathbf{M}X_{k,i}^{(n)}| \geq \frac{\varepsilon \sqrt{n}\, \alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{s \ln n}} (x_i - \mathbf{M}X_{k,i}^{(n)})^2\, dF_k^{(n)}(\mathbf{x}) \to 0\,(n\to\infty), \tag{6.2}$$

$$\mathbf{M}\frac{1}{\mathbf{D}\left(X_{k,\cdot}^{(n)} \mid \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)}\right)}\,\mathbf{M} \int\limits_{|x_i - \mathbf{M}(X_{k,i}^{(n)} \mid \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)}) \geq \frac{b}{s}} \left(x_i - \mathbf{M}\left(X_{k,i}^{(n)} \mid \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)}\right)\right)^2 \cdot$$

$$dF_k^{(n)}\left(\mathbf{x} \mid \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)}\right) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{6.3}$$

при любом

$$\varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad b > 0,$$

а также

$$\frac{\alpha^{(n)}}{(\ln n)^3} \sum_{k=2}^{n} \mathbf{M}\left(\min_r \mathbf{P}\left\{(\mathbf{a}\,\mathbf{X}_k^{(n)}) \not\equiv r \,(\mathrm{mod}\, q) \mid \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)}\right\}\right) \to \infty \quad (n\to\infty) \tag{6.4}$$

для всех $q \geq 2$ *и для всех целочисленных векторов*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s) \quad \text{с} \quad \textit{о. н. д.} \quad (a_1, a_2, \ldots, a_s, q) = 1.$$

Тогда равномерно по $\mathbf{m}=(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ *выполняется соотношение*

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\, P_n(\mathbf{m}) - g(\mathbf{x}_{nm}) \to 0, \quad (n\to\infty) \tag{6.4a}$$

---

* Определения и обозначения смотрите в первой части настоящей работы. (Литовский математический сборник, 1, № 1—2, 1961.)

где

$$P_n(\mathbf{m})=\mathbf{P}\left\{ \mathbf{S}_n^{(n)}=\mathbf{m} \right\},\quad \mathbf{x}_{nm}=\left(\frac{m_1}{B_{n,1}},\ \frac{m_2}{B_{n,2}},\ \ldots,\ \frac{m_s}{B_{n,s}}\right),$$

$g(\mathbf{X}_{nm})$ — *плотность s-мерного нормального распределения.*

Всюду считается

$$\mathbf{M}X_{k,i}^{(n)}=0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Теорема 4. *Пусть случайные векторы $X_k^{(n)}$, компоненты которых принимают только целочисленные значения, имеют равномерно по k и n для всех $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$ ограниченные абсолютные моменты до порядка $p\,(p\geqslant 3)$ включительно.*

Пусть, кроме того, выполняются все условия теоремы 3, причем условие (6.2) *заменяется условием:*

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{7}} n\,(\ln\ln n)^{-\frac{4}{7}} \to \infty \quad (n\to\infty). \tag{6.5}$$

Тогда имеет место следующее разложение:

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\, P_n(\mathbf{m})=g(\mathbf{x}_{nm})+\sum_{\nu=1}^{p-3}\left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu} P_{n\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{nm}}\right) g(\mathbf{x}_{nm})+$$
$$+O\left(\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}+\sum_{i=1}^{s}\frac{\ln^{\frac{7}{2}p+\frac{3}{2}}\ \ln\ln n}{(B_{n,i}\,\alpha^{(n)2})^{p-1}\ \alpha^{(n)3} B_{n,i}}\right), \tag{6.6}$$

где $r_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\dfrac{B_{n,i}^3\,\alpha^{(n)2}}{n\ln^2 n}$, *а* $P_{n\nu}\left(-\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{nm}}\right)\cdot g(\mathbf{x}_{nm})$ *те же, что и в теореме 2.*

До сих пор мы рассматривали только решетчатые распределения. Аналогичные предельные теоремы можно получить и для плотностей.

Теорема 5. *Пусть для последовательности векторов* $\mathbf{X}_1^{(n)}\ \mathbf{X}_2^{(n)},\ \ldots,\ \mathbf{X}_n^{(n)}$ *выполнены условия* (A), (6.1) — (6.3).

Пусть, кроме того, существует набор индексов

$$1<\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_N\leqslant n \tag{6.7}$$

такой, что

$$\frac{\alpha^{(n)}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant N-1}(\nu_{k+1}-\nu_k)}{\ln n}\to\infty\quad (n\to\infty) \tag{6.8}$$

и

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\int\limits_{|\mathbf{t}|>\varepsilon}\prod_{k=1}^{N}\mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{X}_{\nu_k}^{(n)}\,|\,\mathcal{F}_{\nu_{k-1}}^{(n)}\times\mathcal{F}_{\nu_{k+1}}^{(n)}\right)\right| dt\to 0\quad (n\to\infty) \tag{6.9}$$

для любого $\varepsilon>0$.

Тогда при достаточно большом n для нормированной суммы $\hat{\mathbf{S}}_n^{(n)}$ существует плотность $p_n(\mathbf{x})$ и

$$\sup_{\mathbf{x}}\left|\, p_n(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})\,\right|\to 0,\quad (n\to\infty) \tag{6.10}$$

$g(\mathbf{x})$ — *плотность s-мерного нормального распределения.*

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (А) (6.1)–(6.2) *и среди случайных векторов* $X_{\nu_1}^{(n)}, \ldots, X_{\nu_N}^{(n)}$ (ν_i — *из теоремы* 5) *можно найти случайные векторы* $X_{\nu_{k_1}}^{(n)}, X_{\nu_{k_2}}, \ldots, X_{\nu_{k_n}}$ — *такие, что при некоторых положительных постоянных* B, R, α *и* $|\mathbf{t}| \geqslant R$ *выполнено условие*

$$\mathrm{M}\,|f(\mathbf{t}, X_{\nu_{k_j}}^{(n)} \,|\, \mathfrak{F}_{\nu_{k_{j-1}}}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{\nu_{k_{j+1}}}^{(n)})| \leqslant \frac{B}{|\mathbf{t}|^{\alpha}}, \tag{6.11}$$

$$j=1, 2, \ldots, n^*, \quad n^* \geqslant 0\left(\frac{n\,\alpha^{(n)}}{\ln n}\right), \tag{6.12}$$

тогда существует плотность $p_n(\mathbf{x})$, *удовлетворяющая соотношению* (6.10).

Теорема 7. *Пусть компоненты случайных векторов* $X_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$ *имеют равномерно ограниченные по* k *и* n *абсолютные моменты до порядка* $p\,(p \geqslant 3)$ *включительно для всех* $i=1, 2, \ldots, s$.

Пусть выполняются условия (А) (6.1), (6.3), (6.5) *или* (А) (6.1), (6.11), (6.5) *и*

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int\limits_{|\mathbf{t}|\geqslant\varepsilon} \prod_{k=1}^{N} \mathrm{M}\,|f(\mathbf{t}, X_{\nu_k}^{(n)} \,|\, \mathfrak{F}_{\nu_{k-1}}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{\nu_{k+1}}^{(n)})|\, d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant O\left(\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\ln^{\frac{7}{2}p+\frac{3}{2}} n \ln\ln n}{(B_{n,i}\,\alpha^{(n)\,2})^{p-1}\,\alpha^{(n)\,3} B_{n,i}}\right), \tag{6.13}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Тогда при достаточно большом n *существует плотность* $p_n(\mathbf{x})$ *и*

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\, p_n(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{p-3} \left(\frac{1}{r_n}\right)^{k} P_{nk}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) g(\mathbf{x}) +$$

$$+ O\left(\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\ln^{\frac{7}{2}p+\frac{3}{2}} n \ln\ln n}{(B_{n,i}\,\alpha^{(n)\,2})^{p-1}\,\alpha^{(n)\,3} B_{n,i}}\right), \tag{6.14}$$

где ν_k — *из теоремы* 5, r_n, $P_{nk}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) g(\mathbf{x})$ — *из теоремы* 4.

Чтобы доказать эти теоремы, нам придется обобщить леммы 4–5 на случай не обязательно ограниченных слагаемых $X_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

§ 7. ОБОБЩЕНИЕ ЛЕММ 4–5

Лемма 6. *Пусть случайные векторы* $X_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$ *удовлетворяют условиям* (А), (6.1)–(6.3); *тогда при достаточно малом* $\varepsilon_1 > 0$

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int\limits_{G_2 - G_1} |f_n(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} \leqslant \max\left(e^{-C_{11}A^2}, e^{-\Psi(n)\ln n}\right), \tag{7.1}$$

где

$$G_1 = \left\{ \mathbf{t}:\ |t_i| \leqslant \frac{A}{B_{n,i}},\quad i=1, 2, \ldots, s \right\},$$

$$G_2 = \left\{ \mathbf{t}:\ |\mathbf{t}| < \varepsilon_1 \right\}, \tag{7.2}$$

$\Psi(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Доказательство.

Из (6.2) следует, что $\frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\ln n} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Действительно, если $\frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\ln n} < C_{13}$, тогда при $\varepsilon = \frac{s\sqrt{c}}{2C_{13}}$ из (6.2) следует

$$\int\limits_{|x_i| > \frac{\sqrt{c}}{2}} x_i^2\, dF_k^{(n)}(\mathbf{x}) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Но это невозможно, потому что, положив в условии (6.1)

$$\mathbf{t} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

получим

$$\mathbf{D}X_{k,i}^{(n)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i^2\, dF_k^{(n)}(\mathbf{x}) \geqslant c > 0.$$

Поэтому можно найти функцию $\Psi(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ такую, что

$$\frac{1}{\alpha^{(n)2}} \int\limits_{|x_i| \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{s \ln n}} x_i^2\, dF_k^{(n)}(\mathbf{x}) \leqslant \frac{1}{\Psi^4(n)}. \tag{7.3}$$

Заметим, что из условия (6.2) следует, что

$$\frac{1}{\alpha^{(n)2}} \int\limits_{|(\mathbf{x}\mathbf{t})| \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\ln n}} (\mathbf{x}\mathbf{t})^2\, dF_k^{(n)}(\mathbf{x}) \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{7.4}$$

и обратно.

Как мы уже видели при доказательстве леммы 4, для того, чтобы доказать лемму 6, нам нужно оценить $\sum\limits_{j=0}^{N} R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t})$ в выражении

$$|f_n(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{ -\sum_{j=0}^{N} R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t}) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(1 - \alpha_{l_j k_{j+1}}^{(n)}\right) \right\}. \tag{7.5}$$

Оценим эту сумму вначале в области

$$\frac{1}{2C_n} \leqslant |\mathbf{t}| \leqslant \varepsilon, \tag{7.6}$$

где

$$C_n \leqslant \frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\Psi^{\frac{3}{2}}(n) \ln n}.$$

Для этого сумму $\mathbf{S}_n^{(n)}$ разбиваем на N „кусков" длиною

$$l_j - k_j = 2, \quad k_{j+1} - l_j = \left[\frac{\Psi(n) \ln n}{\alpha^{(n)}}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.7}$$

Из (6.3) следует, что для любого $\delta>0$ можно найти b_0 такое, что для всех $i=1, 2, \ldots, s$

$$\mathbf{M} \int\limits_{|x_i| \geqslant \frac{b_0}{s}} \left(x_i - \mathbf{M}(X_{k,i}^{(n)} | \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)})\right)^2 dF_k^{(n)}(\mathbf{x} | F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)}) \geqslant$$

$$\geqslant \delta\, \mathbf{M}\, \mathbf{D}(X_{k,i}^{(n)} | \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)}), \qquad k=1, 2, \ldots, n. \tag{7.8}$$

Из определения $R_{kl}^{(n)}(\mathbf{t})$ и (7.7)—(7.8) вытекает:

$$R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t}) \geqslant \frac{1}{32}\, \mathbf{M}\, \mathbf{D}\left\{ (\mathbf{X}_{k_{j+1}}^{(n)}\, \mathbf{t}) \,|\, \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)} \right\} -$$

$$-6\mathbf{M} \int\limits_{|\mathbf{x}| > b_0} \left\{ \left(\left(\mathbf{x} - \mathbf{M}(\mathbf{X}_{k_{j+1}}^{(n)} | \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}) \right) \mathbf{t} \right) \right\}^2 \cdot dF_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{x} | F_{k_j}^{(n)} \times F_{l_j}^{(n)}). \tag{7.9}$$

Нетрудно заметить, что

$$\mathbf{M} \int\limits_{|\mathbf{x}| > b_0} \left\{ \left(\left(\mathbf{x} - \mathbf{M}(\mathbf{X}_{k_{j+1}}^{(n)} | \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}) \right) \mathbf{t} \right) \right\}^2 d\mathfrak{F}_{k_j l}^{(n)}(\mathbf{x} | \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}) \leqslant$$

$$\leqslant s \sum_{i=1}^{s} t_i^2 \cdot \delta \cdot \mathbf{M}\, \mathbf{D}(X_{k_{j+1}, i}^{(n)} | \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}). \tag{7.10}$$

Из (7.9), (7.10) следует:

$$R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t}) \geqslant \frac{|\mathbf{t}|^2}{32} \left(\mathbf{M}\, \mathbf{D} \left\{ \left(\mathbf{X}_{k_{j+1}}^{(n)} \frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|} \right) \,\Big|\, \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)} \right\} - \right.$$

$$\left. -6\delta \sum_{i=1}^{s} \mathbf{M}\, \mathbf{D} \left\{ X_{k_{j+1}, i}^{(n)} \,\Big|\, \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)} \right\} \right). \tag{7.11}$$

Применяя к выражению, стоящему в скобках, лемму 2 работы [6], при $|\mathbf{t}| \leqslant b_0$ получаем:

$$R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t}) \geqslant C_{14}\, \alpha^{(n)2} |\mathbf{t}|^2. \tag{7.12}$$

Тогда из (7.7) и (7.12) вытекает, что в области (7.6)

$$\sum_{j=0}^{N} R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t}) \geqslant C_{14}(N+1)\, \alpha^{(n)2} |\mathbf{t}|^2 \geqslant C_{15}\, \Psi^2(n) \ln n. \tag{7.13}$$

Из определения коэффициента эргодичности и (7.7) следует:

$$\sum_{j=0}^{N} \left(1 - \alpha_{l_j k_{j+1}}^{(n)}\right) \leqslant C_{16}\, N e^{-\frac{1}{2}\Psi(n) \ln n}. \tag{7.14}$$

Неравенства (7.5), (7.13) и (7.14) позволяют получить в области (7.6) следующую оценку:

$$\left| f_n(\mathbf{t}) \right| \leqslant e^{-C_{17} \Psi(n) \ln n}. \tag{7.15}$$

Чтобы оценить характеристическую функцию суммы $\mathbf{S}_n^{(n)}$ оставшейся области, будем „урезывать“ случайные векторы $\mathbf{X}_k^{(n)}$ $k=1, 2, \ldots, n$, т. е.

$$\mathbf{X}_k^{(n)}=\mathbf{U}_k^{(n)}+\mathbf{V}_k^{(n)}, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

где

$$U_{k,i}^{(n)}=\begin{cases} X_{k,i}^{(n)}, & \text{если } |X_{k,i}^{(n)}|\leqslant C_n \\ 0, & \text{если } |X_{k,i}|>C_n \end{cases}$$

$$k=1, 2, \ldots, n, \quad i=1, 2, \ldots, s.$$

Нетрудно заметить, что случайные векторы $\mathbf{U}_k^{(n)}$ будут связаны в цепь Маркова и $|U_{k,i}^{(n)}|\leqslant C_n$, причем из условий леммы следует, что для всех $\mathbf{t}$ с $|\mathbf{t}|=1$ $\mathbf{D}(\mathbf{U}_k^{(n)}\mathbf{t})\geqslant\frac{c}{2}$; поэтому к последовательности $\{\mathbf{U}_k^{(n)}\}$ можно применить все оценки, полученные при доказательстве леммы 4.

Оставшаяся область делится на две области:

$$\frac{\alpha^{(n)}}{C_n\Psi^{\frac{5}{3}}(n)}<|\mathbf{t}|\leqslant\frac{1}{2C_n} \tag{7.16}$$

и

$$\min_{1\leqslant i\leqslant s}\frac{1}{B_{n,i}}<|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\alpha^{(n)}}{C_n\Psi^{\frac{5}{3}}(n)}. \tag{7.17}$$

При оценке $f_n(\mathbf{t})$ в области (7.16) набор целых чисел $k_0, l_0, k_1, l_1, \ldots, k_N, l_N$ выбирается следующим образом:

$$k_{j+1}-l_j=\left[\frac{\Psi(n)\ln n}{\alpha^{(n)}}\right],$$

$$l_j-k_j=\left[\frac{1}{C_n|\mathbf{t}|}\right]. \tag{7.18}$$

Из определения $R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t})$ (7.18), аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 4, получаем, что в области (7.16)

$$\sum_{j=0}^{N} R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t})\geqslant C_{18}\sqrt[4]{\Psi(n)}\ln n. \tag{7.19}$$

Таким образом, из (7.19), (5.19) следует, что в области (7.16)

$$|f_n(\mathbf{t})|\leqslant e^{-C_{19}\sqrt[4]{\Psi(n)}\ln n}. \tag{7.20}$$

Осталось рассмотреть область (7.17). Для этого заметим, что к случайным векторам $U_k^{(n)}$ применима лемма 4. Поэтому, при оценке $f_n(\mathbf{t})$ в области (7.17), случайные векторы $\mathbf{U}_k^{(n)}$ и $\mathbf{U}_{kl}^{(n)}=\mathbf{U}_{k+1}^{(n)}+\cdots+\mathbf{U}_l^{(n)}$ заменяем скалярными величинами $\left(\mathbf{U}_k^{(n)}\frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|}\right)$, $\left(\mathbf{U}_{kl}^{(n)}\frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|}\right)$ соответственно, и к ним применяем результаты работы [6] леммы 6. Переход от случайных скалярных величин к случайным векторам осуществляется путем умножения полученных неравенств на $|\mathbf{t}|$, причем вместо дисперсии суммы $\mathbf{S}_n^{(n)}$ мы получаем квадратичную форму $Q_n(\mathbf{t})$. Таким образом, пользуясь леммой 6 работы [6], мы убеждаемся в том, что

$$\mathbf{D}(\mathbf{S}_n^{(n)}\mathbf{t})\sim\mathbf{D}(\mathbf{U}_{0n}^{(n)}\mathbf{t})$$

и

$$\sum_{j=0}^{N} R_{k_j, l}^{(n)}(\mathbf{t}) \geqslant C_{20}\,\mathbf{D}\left(\mathbf{S}_n^{(n)}\mathbf{t}\right) = C_{20}\,Q_n(\mathbf{t}). \tag{7.21}$$

Таким образом, из (7.5), (7.14), (7.21) следует, что в области (7.17)

$$\left| f_n(\mathbf{t}) \right| \leqslant e^{-C_{21} Q_n(t)}. \tag{7.22}$$

Из оценок (7.15), (7.22) и (7.20) вытекает утверждение леммы 6.

Лемма 7. *Пусть случайные векторы* $\mathbf{X}_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$ *принимают значения в пространстве целочисленных s-мерных векторов и удовлетворяют всем условиям леммы* 6. *Пусть, кроме того, существует подпоследовательность* $\mathbf{X}_{\nu_1}^{(n)}, \ldots, X_{\nu_n}^{(n)}$ *такая, что*

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\left(\min_r \mathbf{P}\left\{ \left(\mathbf{a}\mathbf{X}_{\nu_k}^{(n)}\right) \not\equiv r \,(\mathrm{mod}\, q) \,\middle|\, \mathfrak{F}_{\nu_{k-1}}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{\nu_{k+1}}^{(n)} \right\}\right) \to \infty \quad (n \to \infty), \tag{7.23}$$

для всех $q \geqslant 2$ *и для всех* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ *с о. н. д.* $(a_1, a_2, \ldots, a_s, q) = 1$, *где*

$$\left[\frac{\ln n}{\alpha^{(n)}}\right] \leqslant \nu_j - \nu_{j-1} \leqslant \left[\frac{\ln n}{\alpha^{(n)}}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.24}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *имеет место неравенство*

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int\limits_{G_3 - G_2} \left| f_n(\mathbf{t}) \right| d\mathbf{t} \leqslant \frac{1}{n^d}, \tag{7.25}$$

где d — любая постоянная,

$$G_3 = \left\{ \mathbf{t} : |t_i| \leqslant \pi,\ i = 1, 2, \ldots, s \right\}. \tag{7.26}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 5; только здесь вместо леммы 5 работы [6] следует использовать лемму 7.

§ 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3–7

Теоремы 3–4 доказываются так же, как и соответствующие теоремы 1–2 для случая ограниченных слагаемых, только вместо лемм 4–5 здесь используются леммы 6–7.

Приступим к доказательству предельных теорем для плотностей.

Из леммы 6 следует, что в условиях теоремы 4 имеет место неравенство

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int\limits_{G_2 - G_1} \left| f_n(\mathbf{t}) \right| d\mathbf{t} \leqslant \max\left(e^{-C_{12} A^2},\ e^{-\Psi_1(n) \ln n}\right), \tag{8.1}$$

где

$$\Psi_1(n) \to \infty \ (n \to \infty), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2\,C_n}.$$

Нетрудно проверить, что в условиях теоремы имеет место s-мерная центральная предельная теорема (см. [1]), поэтому

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int_{G_1} \left| f_n(\mathbf{t}) - e^{-\frac{1}{2} Q_n(\mathbf{t})} \right| d\mathbf{t} \to 0 \ (n \to \infty). \tag{8.2}$$

Используя оценки (3.19), (5.3) – (5.5) и условия (6.7) – (6.9), находим:

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int_{|\mathbf{t}|>\varepsilon} \left| f_n(\mathbf{t}) \right| d\mathbf{t} \leqslant \prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int_{|\mathbf{t}|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{N} \mathbf{M} \left| f\left(\mathbf{t}, \mathbf{X}_{\nu_j}^{(n)} \,\middle|\, \mathfrak{F}_{\nu_{j-1}}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{\nu_{j+1}}^{(n)}\right) \right| d\mathbf{t} +$$

$$+ O\left(n \exp\left\{ -\min_{1 \leqslant j \leqslant N-1} (\nu_{j+1} - \nu_j) \frac{\alpha^{(n)}}{\ln n} \right\} \right) \to 0 \ (n \to \infty). \tag{8.3}$$

Из (8.3) следует, что при всех достаточно больших n функция $f_n(\mathbf{t})$ и тем самым функция $\hat{f}_n(\mathbf{t})$ абсолютно интегрируемы. Следовательно, существует плотность $p_n(\mathbf{x})$ и справедлива формула обращения

$$p_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{R_s} e^{-i(\mathbf{tx})} \hat{f}_n(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}.$$

Тогда, учитывая полученные оценки (8.1) – (8.3), как и в случае теоремы 1, получаем доказательство теоремы 5.

Для доказательства теоремы 6 нам понадобится следующее обобщение одной леммы Крамера (см. лемму 1[3], ст. 37**): если $f(\mathbf{t})$ – характеристическая функция случайного вектора $\mathbf{X}$ такая, что $|f(\mathbf{t})| \leqslant k < 1$ при $|\mathbf{t}| > b$, то при $|\mathbf{t}| < b$

$$\left| f(\mathbf{t}) \right| \leqslant 1 - (1 - k^2) \frac{|\mathbf{t}|^2}{8b^2}. \tag{8.5}$$

Нетрудно убедиться, что лемму Крамера можно применять и для функции

$$\mathbf{M} f\left(\mathbf{t}, \mathbf{X}_l^{(n)} \,\middle|\, \mathfrak{F}_{l-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l+1}^{(n)}\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{M} \left| f\left(\mathbf{t}, \mathbf{X}_l^{(n)} \,\middle|\, \mathfrak{F}_{l-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l+1}^{(n)}\right) \right| \leqslant 1 - (1 - k^2) \frac{|\mathbf{t}|^2}{8b^2} \tag{8.6}$$

в области $|\mathbf{t}| < b$, если только

$$\mathbf{M} \left| f\left(\mathbf{t}, \mathbf{X}_l^{(n)} \,\middle|\, \mathfrak{F}_{l-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l+1}^{(n)}\right) \right| \leqslant k < 1, \quad l = 1, 2, \ldots, n$$

при $|\mathbf{t}| \geqslant b$.

Из (6.11), (8.6), считая, что $R > 2B^{\frac{1}{\alpha}}$, получаем:

$$\mathbf{M} \left| f\left(\mathbf{t}, \mathbf{X}_{\nu_j}^{(n)} \,\middle|\, \mathfrak{F}_{\nu_{j-1}}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{\nu_{j+1}}^{(n)}\right) \right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{B}{|\mathbf{t}|^\alpha}, & \text{при } |\mathbf{t}| \geqslant R \\ e^{-C_{11}|\mathbf{t}|^2}, & \text{при } |\mathbf{t}| < R. \end{cases} \tag{8.7}$$

**) Крамер Г.. Случайные величины и распределения вероятностей, ИИЛ, М., 1947.

Из (6.1) и (6.2) следует, что для функций $f_n(\mathbf{t})$ можно применять оценки (7.20), (7.22), т. е.

$$|f_n(\mathbf{t})| \leqslant e^{-C_{13}\sqrt[4]{\Psi(n)}\ln n} + e^{-C_{11}Q_n(\mathbf{t})}, \tag{8.8}$$

если $|\mathbf{t}| \in G_1'$, где

$$G_1' = \left\{ \mathbf{t} : |\mathbf{t}| \leqslant \frac{1}{2} \frac{\Psi^{\frac{3}{2}}(n)\ln n}{\sqrt{n}\,\alpha^{\frac{3}{2}}(n)} \right\}.$$

У нас выполнены условия (6.11) – (6.12); поэтому, согласно (3.19) и (8.7), получим

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int_{G_1'-G'} |f_n(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} \leqslant \prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int_{G_2'-G_1'} e^{-C_{14} n^{\bullet} |\mathbf{t}|^2}\, d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \frac{e^{-\Psi^{3}(n)\ln n}}{(\Psi^{3}(n)\ln n)^{s}} \to 0 \ (n \to \infty), \tag{8.9}$$

где

$$G_2' = \left\{ \mathbf{t} :\ |\mathbf{t}| \leqslant R \right\}.$$

Как мы уже отмечали, не нарушая общности, можно положить $R > 2B^{\frac{1}{\alpha}}$; тогда

$$\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int_{R_s-G_2'} |f_n(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} \leqslant \prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \left(\frac{B}{R^{\alpha}}\right)^{C_{15} n} R_{s+1} \int_{|\mathbf{t}|>R} \frac{d\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|^{s+1}} \leqslant e^{-C_{16} n}. \tag{8.10}$$

Из (8.8) – (8.10) вытекает, что $f_n(\mathbf{t})$ абсолютно интегрируема и, следовательно, существует плотность $p_n(\mathbf{x})$ и справедлива формула обращения

$$p_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{R_s} e^{-i(\mathbf{tx})} \hat{f}_n(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}.$$

Так как

$$p_n(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5, \tag{8.11}$$

где

$$J_1 = \int_{|t_i|<A} \left(\hat{f}_n(\mathbf{t}) - e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})}\right) e^{-i(\mathbf{tx})}\, d\mathbf{t},$$

$$J_2 = \prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int_{G_1'-G_2} f_n(\mathbf{t})\, e^{-i(\mathbf{tx}')}\, d\mathbf{t},$$

$$J_3 = \prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int_{G_2'-G_1'} f_n(\mathbf{t})\, e^{-i(\mathbf{tx}')}\, d\mathbf{t},$$

$$J_4 = \prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \int_{R_s-G'} f_n(\mathbf{t})\, e^{-i(\mathbf{tx}')}\, d\mathbf{t},$$

$$J_5 = -\int_{|t_i|>A} e^{-i(\mathbf{tx})-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})}\, d\mathbf{t}, \quad \mathbf{x}' = (x_1 B_{n,1},\ x_2 B_{n,2},\ \ldots,\ x_s B_{n,s}).$$

Из условий теоремы следует, что справедлива многомерная центральная предельная теорема, и так как А можно подобрать сколь угодно большим, то из соотношений (8.8) – (8.12) следует справедливость теоремы 6.

Теорема 7 доказывается совсем аналогично, как и теоремы 2 или 4, только надо положить $A=\Psi(n)\sqrt{\ln n}$, $\Psi(n)$ – из леммы 3 и интегралы I_2, I_3 заменить интегралами J_2, J_3, J_4 и учитывать для них оценки (8.8) – (8.10).

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 27. XII. 1961

RIBINĖS TEOREMOS ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ, SURIŠTŲ Į NEHOMOGENINĘ MARKOVO GRANDINĘ, SUMOMS II

A. RAUDELIŪNAS

(Reziumė)

Šis darbas yra ankstesnio autoriaus darbo tęsinys. Jame apibendrinama lokalinė ribinė teorema (t. 3) ir patikslinta lokalinė ribinė teorema (t. 4) atvejui, kai dėmenys $\mathbf{X}_k^{(n)}$, $k=1, 2,\ldots, n$ nebūtinai aprėžti. Be to, įrodomos daugiamatės lokalinės ribinės teoremos tankiams (žiūr. t. 5—7). Darbas apibendrina V. Statulevičiaus [6] rezultatus s-mačiam atvejui.

LIMIT THEOREMS FOR SUMS OF RANDOM VECTORS COMBINED INTO A NON-HOMOGENEUS MARKOV CHAIN II

By A. RAUDELIUNAS

(Summary)

This paper is a continuation of the aughtor's previous paper. In this paper the local limit theorem (t.3—4) and its specification is generalized in cases when items $\mathbf{X}_k^{(n)}$, $k=1, 2,\ldots, n$ are not necessarily bounded. Besides the multidimentional theorem for density is proved (see t. 5—7). The paper generalizes for the multidimentional case the rezults of V. Statulevichius [6].
