II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, РАЗДЕЛЕННАЯ РАЗНОСТЬ КОТОРЫХ НЕ РАВНА НУЛЮ

Э. Г. КИРЬЯЦКИЙ

В заметке [1] были рассмотрены функции из класса $K_n(D)$, т. е. такие аналитические функции $f(z)$, для которых n-я разделенная разность $[z_0\, z_1, \dots z_n]$ не равна нулю при попарно различных $z_0, z_1, \dots, z_n$, взятых из области D. Можно определить также класс функций $f(z)$ следующим образом: функция $f(z) \in K_n(D)$, если выражение $f(z)+P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ любой многочлен не выше $n-1$ степени, имеет не более n нулей в области D.

В данной заметке мы продолжаем изучать свойства функций из класса $K_n(D)$.

1. В заметке [1] было показано, что если n-я разделенная разность $[z_0 z_1, \dots z_n]$ функции $f(z)$ не равна нулю в области D, производная $f^{(n)}(z)$ также не равна нулю в области D. В некотором смысле справедливо обратное утверждение:

Теорема 1. *Если $f(z)$ аналитическая в точке z_0 и $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, то $f(z) \in K_n(O)$, где O — достаточно малая окрестность точки z_0.*

Справедливость теоремы следует из соотношения*

$$[z_1 z_2 \dots z_{n+1}] \to \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$z_1 \to z_0,\ z_2 \to z_0,\ \dots\ z_{n+1} \to z_0.$$

2. Как известно, если функция $f(z)$ регулярна в области D, то из однолистности её на контуре c области D следует однолистность в замкнутой области $\overline{D}$.

Аналогичное утверждение справедливо также для функций из класса $K_n(D)$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной жордановой спрямляемой кривой c. Тогда, если $[z_0 z_1 \dots z_n] \neq 0$ и $z_0 z_1 \dots z_n \in c$, то $f(z) \in K_n(\overline{D})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того, что $[z_0 z_1 \dots z_n] \neq 0$ на контуре c, следует однолистность функции $[z z_2 \dots z_n]$ относительно z на контуре c, а, значит, и в замкнутой области $\overline{D}$. Отсюда будет следовать, что $[z_0 z_1 \dots z_n] \neq 0$, где z_0, z_1 — любые точки замкнутой области $\overline{D}$, а $z_2, \dots, z_n \in c$. Учитывая это, получим теперь, что функция $[z_0 z z_3 \dots z_n]$ есть однолистная относительно z на контуре c, а поэтому и в замкнутой области $\overline{D}$, причем $z_0 \in \overline{D}$.

* Этот простой способ доказательства указал мне В. Кабайла.

Исходя из однолистности этой функции, снова получаем, что разделённая разность $[z_0 z_1 z_2 z_3 \dots z_n] \neq 0$, если $z_0, z_1, z_2 \in \overline{D}$, а $z_3 z_4, \dots, z_n \in c$.

Продолжая рассуждать аналогичным образом, мы получим утверждение теоремы.

Следствие. *Если* $[z_0 z_1 \dots z_k z_{k+1} \dots z_n] \neq 0$ *и* $z_0, z_1, \dots, z_k \in c_1$, $z_{k+1}, \dots, z_n \in c_2$, *причем области* D_1 *и* D_2, *ограниченные контурами* c_1 *и* c_2, *пересекаются, то* $[z_0 z_1 \dots z_k z_{k+1} \dots z_n] \neq 0$ *при*

$$z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1} \dots z_n \in \overline{D}_1 \cap \overline{D_2}, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n-2.$$

Доказательство. Так как [2]

$$[z_0 z_1 \dots z_k z_{k+1} \dots z_n] = [z_0 z_1 \dots z_k]_{[zz_{k+1} \dots z_n]} \neq 0,$$

где

$$z_0, z_1, \dots, z_k \in c_1 \quad \text{и} \quad z_{k+1}, \dots, z_n \in c_2,$$

то на основании предыдущей теоремы получим

$$[z_0 z_1 \dots z_k]_{[zz_{k+1} \dots z_n]} = [z_0 z_1 \dots z_k z_{k+1} \dots z_n] \neq 0,$$

где

$$z_0, z_1, \dots, z_k \in \overline{D}_1 \quad \text{и} \quad z_{k+1}, \dots, z_n \in c_2.$$

Аналогично, пользуясь формулой

$$[z_0 z_1 \dots z_k z_{k+1} \dots z_n] = [z_{k+1} \dots z_n]_{[zz_0 z_1 \dots z_k]} \neq 0,$$

где

$$z_0, z_1, \dots, z_k \in \overline{D}_1 \quad \text{и} \quad z_{k+1}, \dots, z_n \in c_2,$$

получим, что

$$[z_0 z_1 \dots z_k z_{k+1} \dots z_n] \neq 0,$$

где

$$z_0, z_1, \dots, z_k \in \overline{D}_1 \quad \text{и} \quad z_{k+1}, \dots, z_n \in \overline{D}_2.$$

Таким образом, имеем окончательно

$$[z_0 z_1 \dots z_k z_{k+1} \dots z_n] \neq 0,$$

где

$$z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n \in \overline{D}_1 \cap \overline{D_2}.$$

3. Теорема 3. *Если* $\operatorname{Re}\{ f^{(n)}(\zeta) \} > 0$ *в выпуклой области* D, *то* $f(z) \in K_n(D)$.

Доказательство. Для разделенной разности справедлива формула [2]

$$[z_0 z_1 \dots z_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n,$$

где

$$\zeta = z_1 + (z_2 - z_1)\, t_1 + \dots + (z_0 - z_n)\, t_n \in D.$$

Так как по условию

$$\operatorname{Re}\left\{ f^{(n)}(\zeta) \right\} > 0,$$

то

$$\operatorname{Re}\left\{ [z_0 z_1 \dots z_n] \right\} = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re}\left\{ f^{(n)}(\zeta) \right\} dt_1 \dots dt_n > 0$$

и, значит, $[z_0 z_1 \dots z_n] \neq 0$, $z_0, z_1, \dots, z_n \in D$, т. е. $f(z) \in K_n(D)$.

Эта теорема, в случае $n=1$, доказана в [5].

Следствие 1. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^{n} |a_{n+k}| < 1,$$

то функция $f(z)=z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots \in K_n(E)$, *где* E — *единичный круг* (см. также [1]).

В самом деле,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right\}=1+\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^{n} a_{n+k} z^k\right\}>1-\sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^{n} |a_{n+k}|>0.$$

Следствие 2. *Функция* e^z *принадлежит всем классам* $K_n(P)$ *в полосе* P *ширины* π, *параллельной действительной оси.*

Действительно, при соответствующем выборе комплексной постоянной c, зависящей от положения полосы P, мы получим

$$\operatorname{Re}\left\{e^{z+c}\right\}>0, \quad z \in P.$$

Следствие 3. *Функция* $z^n \in' K_e(U)$, $(1 \leqslant l < n)$, *где* U — *угол раствора* $\frac{\pi}{n-e}$ *с вершиной в нулевой точке.*

В самом деле, функция $\zeta = cf^{(e)}(z)$ при подходящем выборе постоянной c отображает угол U на полуплоскость $\operatorname{Re}\{\zeta\}>0$.

4. Докажем следующее предложение: *Пусть для функции* $f(z)$, *аналитической в ограниченной области* D, *и некоторого многочлена* $P_n(z)$, *со старшим коэффициентом* $a_0 \neq 0$ *выполнено неравенство*

$$|f(z)-P_n(z)|<E,$$

а ρ — *расстояние некоторой подобласти* Q *области* D *до границы области* D. *Если*

$$\rho > \sqrt[n+1]{\frac{LE}{2\pi|a_0|}},$$

то $f(z) \in K_n(Q)$. *Здесь* L — *длина контура* c, *ограничивающего область* D.

Действительно,

$$[z_0 z_1 \ldots, z_n]_{f(z)} = a_0 + [z_0 z_1 \ldots z_n]_{f(z)-P_n(z)}, \quad z_0, z_1, \ldots, z_n \in Q.$$

Используя интегральное представление разделенной разности, получим оценку [2]

$$[z_0 z_1 \ldots z_n]_{f(z)-P_n(z)} \leqslant \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{\max\limits_{\zeta\in c}|f(z)-P_n(z)|}{\min\limits_{\zeta\in c}|(\zeta-z_0)\ldots(\zeta-z_n)|} \leqslant \frac{LE}{2\pi\rho^{n+1}}.$$

Учитывая условие $\rho > \sqrt[n+1]{\frac{LE}{2\pi|a_0|}}$, легко получить, что

$$|a_0| > \frac{LE}{2\pi\rho^{n+1}},$$

следовательно,

$$[z_0 z_1, \ldots z_n]_{f(z)} \neq 0 \quad \text{и} \quad f(z) \in K_n(Q).$$

Теорема 4. *Если $f(z) \in K_n(D)$, то при $z_1, z_2, \ldots, z_k \in D$*

$$\frac{f(z)-P_{k-1}(z)}{(z-z_1)\ldots(z-z_k)} \in K_{n-k}(D), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

где $P_{k-1}(z)$ — многочлен, интерполирующий функцию $f(z)$ в точках

$$z_1, z_2, \ldots, z_k.$$

Доказательство. В силу известных формул [2] имеем

$$[z_0 z_1, \ldots z_n]_{f(z)} = [z_1 z_2 \ldots z_n]_{[zz_0]} = [z_2 \ldots z_n]_{[zz_0z_1]} = \ldots = [z_{n-1} z_n]_{[zz_0z_1 \ldots z_{n-2}]} \neq 0.$$

Отсюда следует, что $[zz_1 \ldots z_k] \in K_{n-k}(D)$.

В то же самое время [2]

$$[zz_1 \ldots z_k] = \frac{f(z)-P_{k-1}(z)}{(z-z_1)\ldots(z-z_k)},$$

и поэтому

$$\frac{f(z)-P_{k-1}(z)}{(z-z_1)\ldots(z-z_k)} \in K_{n-k}(D).$$

Следствие 1. *Пусть функция $f(z)$ — нормированная, т. е.*

$$f(0)=0, \quad f'(0)=0, \ \ldots \ f^{(n-1)}(0)=0, \quad f^{(n)}(0)=n!$$

Если $f(z) \in K_n(E)$, E — единичный круг, то

$$\frac{f(z)}{z^k} \in K_{n-k}(E).$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно положить $z_1=z_2=\ldots=z_k=0$, $P_{k-1}(z) \equiv 0$ и воспользоваться предыдущей теоремой.

Если взять $k=n-1$, то получим, что функция $\frac{f(z)}{z^{n-1}}$ однолистна в единичном круге. Вследствие однолистности, эта функция будет удовлетворять в круге $|z|<r<1$ неравенству

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n-1}}\right| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad |z|<r,$$

откуда $\left|f(z)\right| \leqslant \frac{|z|^n}{(1-|z|)^2}$, где $f(z) \in K_n(E)$.

Из последнего неравенства следует, что множество O нормированных функций из класса $K_n(E)$ равномерно ограничено в круге $|z| \leqslant r$, где $r<1$, и поэтому это множество компактно в круге E. Кроме того, равномерно сходящаяся последовательность нормированных функций из класса $K_n(E)$ имеет своим пределом нормированную функцию также из класса $K_n(E)$ [1].

Отсюда можно сделать вывод, что для любого $r \, (0<r<1)$ существует такая нормированная функция $F_n(z, r)$, которая принадлежит классу $K_n(E)$ и

$$\max_{|z|<r} \left|F_n(z, r)\right| \geqslant \max_{|z|<r} \left|f(z)\right|$$

для любой нормированной функции $f(z) \in K_n(E)$.

Назовем функцию $F_n(z, r)$ максимальной по модулю в классе $K_n(E)$.

Следствие 2. *Если $F_n(z, r)$ и $F_{n+1}(z, r)$ — максимальные по модулю функции в классах $K_n(E)$ и $K_{n+1}(E)$, то*

$$\max_{|z|\leqslant r}\left|F_{n+1}(z, r)\right| < r\max_{|z|\leqslant r}\left|F_n(z, r)\right|.$$

Действительно, по следствию 1 теоремы 4

$$\frac{F_{n+1}(z, r)}{z} \in K_n(E),$$

откуда следует, что

$$\max_{|z|\leqslant r}\left|\frac{F_{n+1}(z, r)}{z}\right| \leqslant \max_{|z|\leqslant r}\left|F_n(z, r)\right|.$$

Аналогично, если через $\Phi_n(z, r)$ обозначить нормированную минимальную по модулю в классе $K_n(E)$ функцию, т. е.

$$\min_{|z|=r}\left|\Phi(z, r)\right| \leqslant \min_{|z|=r}\left|f(z)\right|, \quad \text{где} \quad f(z) \in K_n(E),$$

то

$$\min_{|z|=r}\left|\Phi_{n+1}(z, r)\right| > r\min_{|z|=r}\left|\Phi_n(z, r)\right|.$$

Следствие 3. *Пусть $a_l^{(m)}(f)$ означает l-й коэффициент в разложении нормированной функции $f(z)$ в ряд Тейлора*

$$f(z) = z^m + a_2^{(m)}(f)\, z^{m+1} + \ldots + a_l^{(m)}(f)\, z^{m+l-1} + \ldots + \in K_m(E)$$

и

$$A_l^{(m)} = \max_{f\in K_m(E)}\left|a_l^{(m)}(f)\right|.$$

Тогда

$$A_l^{(m)} \geqslant A^{(m+1)}.$$

Доказательство. Обозначим через $\varphi_m(z)$ нормированную функцию из класса $K_m(E)$, для которой

$$\left|a_l^{(m)}(\varphi_m)\right| = A_l^{(m)}.$$

Существование такой функции доказывается таким же образом, как и существование максимальной функции.

Пусть теперь для функции $\varphi_{m+1}(z)$ имеем разложение

$$\varphi_{m+1}(z) = z^{m+1} + \ldots + a_l^{(m+1)}(\varphi_{m+1})\, z^{m+l} + \ldots .$$

Функция $\frac{\varphi_{m+1}(z)}{z} \in K_m(E)$ имеет $a_l^{(m+1)}(\varphi_{m+1})$ своим l-ым коэффициентом. Так как в классе $K_m(E)$ наибольшим по модулю коэффициентом обладает функция $\varphi_m(z)$, то ясно, что

$$A_l^{(m)} = \left|a_l^{(m)}(\varphi_m)\right| \geqslant \left|a_l^{(m+1)}(\varphi_{m+1})\right| = A_l^{(m+1)}.$$

Поступила в редакцию
8. XI. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Кирьяцкий. Литовский математический сборник, № 1—2, 1961, 109—115.
2. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей, Гостехиздат М.,-Л., 1952.
3. И. С. Березин и Жидков. Методы вычислений, т. 1, Ф. М., 1959.
4. Е. Титчмарш. Теория функций, Гостехиздат М.-Л., 1951.
5. В. А. Зморович. УМН, 9 вып. 4 (62), 1954, стр. 175—182.

FUNKCIJŲ, KURIŲ PADALYTAS SKIRTUMAS NĖRA LYGUS NULIUI, KAI KURIOS SAVYBĖS

E. KIRJACKIS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjamos analizinės ir vienareikšmės srityje D funkcijos, kurių n-tos eilės padalytas skirtumas $[z_0 z_1 z_2 \cdots z_n]$, $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n \in D$, nėra lygus nuliui. Tokias funkcijas nagrinėjome anksčiau darbe [1].

EINIGE EIGENSCHAFTEN DER FUNKTIONEN, DIE KEINE NULLGLEICHE DIVIDIERTE DIFFERENZ BESITZEN

E. KIRJATSKY

(Zusammenfassung)

Es werden die im Bereiche D analytischen und eindeutigen Funktionen betrachtet, wobei angenommen wird, dass ihre dividierte Differenz n-ter Ordnung $[z_0 z_1 \cdots z_n]$, $z_0, z_1, \cdots, z_n \in D$, nicht gleich Null ist.

Solche Funktionen haben wir schon früher auch in der Arbeit [1] untersucht.