II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

К ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ КОНГРУЭНЦИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА ЕВКЛИДОВОЙ СВЯЗНОСТИ

И. БЛИЗНИКЕНЕ

В последние годы развитие дифференциальной геометрии линейчатых многообразий протекло под знаком перехода от классических методов Гаусса, Дарбу к методу внешних форм и подвижного репера Картана. Объекты линейчатой геометрии в пространствах, фундаментальные группы которых являются подгруппами проективной группы, хорошо изучены.

Изучение геометрических объектов, образованных прямыми, т. е. линейчатых поверхностей, конгруэнций, комплексов и др., тензорным методом или методом внешних форм основано на аппарате векторного исчисления и аппарате грассмановых агрегатов. При переходе в пространство со связностью понятие вектора или аналитической точки теряет свою простоту, и применение аппарата векторного исчисления или грассмановых агрегатов к изучению объектов линейчатой геометрии становится иногда вовсе невозможным в силу отсутствия параллелизма векторов.

В 1955 г. появилась работа [3] М. В. Васильевой, в которой она рассматривала конгруэнцию геодезических кривых в пространстве со связностью, присоединенной к интегралу $\int\int f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$. Б. У. Британ в 1956 г. построил теорию конгруэнций геодезических кривых и линейчатых поверхностей трехмерного риманова пространства постоянной кривизны [2]. Затем в 1958 г. В. Фогель построил тензорным методом теорию линейчатых поверхностей, т. е. двухпараметрического семейства геодезических кривых многомерного риманова пространства [7]. А. Швец рассматривал геометрию прямолинейной конгруэнции с евклидовой связностью [6], т. е. такой объект, в котором каждой точке (u^1, u^2) двумерной области значений параметров ставится в соответствие трехмерное евклидово пространство $E_3(u^1, u^2)$ — локальное евклидово пространство, в котором фиксирована прямая и для двух локальных пространств определено отображение.

В. И. Близникас указал метод [1], при помощи которого легко строятся основные понятия теории конгруэнций кривых в пространствах со связностью. В настоящей заметке я применила этот метод для изучения конгруэнции геодезических кривых трехмерного пространства евклидовой связности. Если пространство евклидовой связности является пространством Евклида ($R^i_{jk} = R^i_{jkl} = 0$) и репер голономный ($\omega^i = du^i$), то построенная теория конгруэнций совпадает с теорией линейчатых конгруэнций Я. С. Дубнова [6].

§ 1. ПРОСТРАНСТВО ЕВКЛИДОВОЙ СВЯЗНОСТИ

Группа аналитических преобразований G (псевдогруппа аналитических преобразований) n переменных определяется по Э. Картану системой n инвариантных форм ω^i, которые удовлетворяют следующим структурным уравнениям Ли-Картана:

$$D\omega^i=[\omega^k,\ \omega^i_k]$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma=2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Нормальные продолжения этой группы вводят новые инвариантные формы ω^i_j, ω^i_{jk}, ..., которые имеют следующую структуру [4]:

$$D\omega^i_{j_1\ldots j_p}=\sum_{s=1}^{p}\frac{1}{s!\,(p-s)!}[\omega^k_{(j_1\ldots j_s},\ \omega^i_{j_{s+1}\ldots j_p)k}]+[\omega^k,\ \omega^i_{j_1\ldots j_p k}],$$

где круглые скобки обозначают симметрирование по заключенным в них индексам.

Система $\omega^i=0$ вполне интегрируема, и ее первые интегралы u^i образуют пространство представления группы G — пространство точек $\mathfrak{M}_n$ (база). Поле локально инвариантных квадратичных форм, т. е. $\frac{n(n+1)}{2}$ — мерную поверхность в $\frac{n(n+3)}{2}$ — мерном пространстве $\{u^i,\ g_{ij}\}$, можно определить системой дифференциальных уравнений:

$$\nabla g_{ij}\equiv dg_{ij}-g_{kj}\,\omega^k_i-g_{ik}\,\omega^k_j=g_{ij,\,k}\,\omega^k. \tag{1}$$

Так как

$$D\omega^i\equiv 0,\quad D\omega^i_j\equiv[\omega^k_j,\ \omega^i_k],\quad \nabla g_{ij}\equiv 0\quad (\mathrm{mod}\ \omega^i),$$

то с каждой точкой A базы $\mathfrak{M}_n$ связывается евклидовое пространство E_n (слой). В этом пространстве E_n можно построить такой аффинный репер $\{\mathbf{A},\ \mathbf{e}_i\}$, что

$$g_{ij}=\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j,\quad d\mathbf{e}_i\equiv\omega^k_i\,\mathbf{e}_k\ (\mathrm{mod}\ \omega^i),\quad d\mathbf{A}=\omega^i\,\mathbf{e}_i.$$

Поле положительно определенных локальных квадратичных форм с несимметрическим объектом аффинной связности Γ^i_{jk}, относительно которого тензор g_{ij} ковариантно постоянен, называется точечным пространством евклидовой связности (римановым пространством с кручением).

Дифференциальные уравнения поля объекта евклидовой связности Γ^i_{jk} имеют вид:

$$\nabla\,\Gamma^k_{ij}-\omega^k_{ij}=\Gamma^k_{ij,\,l}\,\omega^l, \tag{2}$$

где

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{(ij)}+R^k_{ij},$$

$$\Gamma^k_{(ij)}=\frac{1}{2}\,g^{km}\,(g_{im,\,j}+g_{jm,\,i}-g_{ij,\,m})+g^{km}\,(g_{il}\,R^l_{jm}+g_{jl}\,R^l_{ik}),$$

$$g^{ij}=\frac{\partial\ln\det\|g_{kl}\|}{\partial g_{ij}},$$

а R^i_{jk} — произвольный тензор. При помощи объекта Γ^i_{jk}, т. е. при помощи форм $\tilde\omega^i$ и $\tilde\omega^i_j$:

$$\tilde\omega^i=\omega^i,\quad \tilde\omega^i_j=\omega^i_j+\Gamma^i_{jk}\,\omega^k, \tag{3}$$

определяется евклидова связность в многообразии локальных пространств $\{E_n(u)\}$. Формы ω^i, $\tilde{\omega}^j_i$ определяют отображение соседнего локального пространства $E_n(u+du)$ на исходное $E_n(u)$ [3]:

$$A(u+du) \to A(u, du) \cong \omega^i e_i(u),$$
$$e_i(u+du) \to e_i(u, du) \cong e_i(u) + \omega_i^k e_k(u), \tag{4}$$

причем

$$\tilde{\nabla} g_{ij} \equiv dg_{ij} - g_{ik}\tilde{\omega}^k_j - g_{kj}\tilde{\omega}^k_i = 0.$$

Структурные уравнения пространства евклидовой связности имеют вид:

$$D\omega^i = [\omega^k, \tilde{\omega}^i_k] + R^i_{jk}[\omega^j, \omega^k], \quad D\tilde{\omega}^j_i = [\tilde{\omega}^k_i, \tilde{\omega}^j_k] + R^j_{ikp}[\omega^k, \omega^p], \tag{5}$$

где R^l_{jkp} — тензор кривизны, компоненты которого выражаются через Γ^i_{jk} и $\Gamma^i_{jk,p}$.

В дальнейшем будем предполагать, что $n=3$.

§ 2. КОНГРУЭНЦИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КРИВЫХ

1. *Основные уравнения.* Пусть на базе пространства евклидовой связности задана некоторая кривая K, каждой точке A которой соответствует слой $E_3(A)$. Выполняя последовательные отображения, определяемые соотношениями (4), вдоль кривой K, мы получим в пространстве $E_3(A_0)$ (A_0 — произвольно фиксированная точка кривой K) кривую K^*, которая называется локальной разверткой кривой K. Если локальная развертка кривой пространства евклидовой связности является прямой, то кривую назовем геодезической.

Если репер пространства $E_3(A)$ выбран так, чтобы вектор e_1 совпал с направляющим вектором развертки геодезической кривой, то дифференциальные уравнения конгруэнции геодезических кривых трехмерного пространства евклидовой связности можно записать так

$$\tilde{\omega}^\alpha_1 = \lambda^\alpha_\beta \omega^\beta, \tag{6}$$

продолжение которых дает

$$\tilde{\nabla}\lambda^\alpha_\beta - \lambda^\alpha_\beta \tilde{\omega}^1_1 = \lambda^\alpha_{\beta i}\omega^i, \tag{7}$$

где

$$\lambda^\alpha_{[\beta\gamma]} = 2(\lambda^\alpha_\varepsilon R^\varepsilon_{\beta\gamma} - R^\alpha_{1\beta\gamma}),$$
$$\lambda^\alpha_{\beta 1} = -\lambda^\alpha_\gamma \lambda^\gamma_\beta - 4\lambda^\alpha_\gamma R^\gamma_{1\beta} + 4R^\alpha_{11\beta}.$$

Тензоры λ^α_β и g_{ij} образуют фундаментальный дифференциально-геометрический объект первого порядка рассматриваемой конгруэнции. При помощи этого объекта можно построить следующие подобъекты (тензоры).

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{1\alpha}g_{1\beta}}{g_{11}}, \tag{8}$$

$$\tilde{\lambda}^\alpha_\beta = \frac{\lambda^\alpha_\beta}{F} \quad (F=\sqrt{g_{11}}), \tag{9}$$

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\varepsilon}\tilde{\lambda}^\varepsilon_\beta + \gamma_{\beta\varepsilon}\tilde{\lambda}^\varepsilon_\alpha), \tag{10}$$

$$a_{\alpha\beta} = \gamma_{\varepsilon\lambda}\tilde{\lambda}^\varepsilon_\alpha \tilde{\lambda}^\lambda_\beta. \tag{11}$$

Геометрический смысл тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ состоит в том, что он определяет метрику в плоскости пространства $E_3(A)$, которая ортогональна к развертке кривой конгруэнции.

2. *Локальное сферическое* изображение *конгруэнции*. Пусть g и g' две бесконечно близкие геодезические, проходящие через точки $A(u)$ и $A(u+du)$ пространства евклидовой связности с единичными направляющими векторами $\tau(u)$ и $\tau(u+du)$ $\left(\tau=\frac{e_1}{F}\right)$ их разверток, принадлежащие рассматриваемой конгруэнции. Из (4) следует, что

$$\tau(u+du) \to \tau(u, du) \cong \tau(u) + \frac{\bar{\omega}_1^\alpha}{F}\left(e_\alpha(u) - \frac{g_{1\alpha}}{g_{11}} e_1(u)\right). \tag{12}$$

Локальным углом между двумя геодезическими кривыми g и g', проходящими через бесконечно близкие точки $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+d\mathbf{A}$, назовем угол между их развертками l и l', принадлежащим пространству $E_3(A)$. Так как

$$\cos d\varphi = \frac{(\tau(u),\ \tau(u, du))}{\sqrt{\{\tau(u, du)\}^2}},$$

то, в силу (12), и выполняя разложение в тейлоровский ряд, получим

$$1 - \frac{d\varphi^2}{2!} + \cdots = 1 - \frac{1}{2}\left(g_{\alpha_1\beta_1} - \frac{g_{1\alpha_1} g_{1\beta_1}}{g_{11}}\right) \bar{\lambda}_\alpha^{\alpha_1} \bar{\lambda}_\beta^{\beta_1} \omega^\alpha \omega^\beta + \cdots,$$

откуда, в силу (8) и (11), следует, что

$$d\varphi^2 = a_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \omega^\beta. \tag{13}$$

Если g' описывает дифференциальную окрестность кривой g, то концы векторов $\tau(u, du)$ в пространстве $E_3(u)$ описывают поверхность, которая называется локальным сферическим изображением конгруэнции. Геометрический смысл тензора $a_{\alpha\beta}$ состоит в том, что он определяет линейный элемент локального сферического изображения конгруэнции. Однопараметрическое семейство геодезических кривых, принадлежащих рассматриваемой конгруэнции, называется линейчатой поверхностью этой конгруэнции. Локальное сферическое изображение линейчатой поверхности является сферической кривой. Две линейчатые поверхности конгруэнции будем называть локально ортогональными, если касательные соответствующих сферических кривых ортогональны.

3. *Локальные фокусы и развертывающиеся поверхности*. Пусть геодезические кривые g и g', проходящие через $A(u)$ и $A(u+du)$ соответственно, пересекаются в точке F. Построим развертки пространства евклидовой связности вдоль этих геодезических кривых. При этом мы получим

$$F \underset{g}{\to} F(u) = A(u) + \rho(u)\,\tau(u), \quad F \underset{g'}{\to} F(u+du) = A(u+du) + \rho(u+du)\,\tau(u+du).$$

Точку F назовем локальным фокусом образующей g, если при определяющем связность отображении соседнего локального пространства на исходное образ точки $F(u+du)$ находится на развертке l. Это условие будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$(\delta_\beta^\alpha + \rho\bar{\lambda}_\beta^\alpha)\, \omega^\beta = 0,$$

где δ_β^α — символ Кронекера. Исключая ω^α, получим квадратичное уравнение для определения абсцисс образов локальных фокусов:

$$K\rho^2 + 2H\rho + 1 = 0, \tag{14}$$

где

$$K = \det \| \bar{\lambda}^{\alpha}_{\beta} \|, \quad H = \mathrm{sp} \| \bar{\lambda}^{\alpha}_{\beta} \| .$$

Исключая ρ, мы получим дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей

$$l_{\alpha\beta}\, \omega^{\alpha}\, \omega^{\beta} = 0, \tag{15}$$

где

$$l_{\alpha\beta} = \sigma_{\varepsilon(\alpha}\, \bar{\lambda}^{\varepsilon}_{\beta)}, \tag{16}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha < \beta, \\ 0, & \alpha = \beta, \\ -1, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

В евклидовом пространстве конгруэнция называется нормальной, если все ее лучи являются нормалями некоторой поверхности S, а развертывающиеся поверхности такой конгруэнции высекают на поверхности S ортогональную сеть — линии кривизны. Поэтому в рассматриваемом пространстве локально нормальной конгруэнцией естественно назвать такую конгруэнцию, развертывающиеся поверхности которой локально ортогональны. Конгруэнция геодезических кривых пространства евклидовой связности будет локально нормальной тогда и только тогда, когда

$$a^{\alpha\beta}\, l_{\alpha\beta} = 0, \tag{17}$$

где

$$a^{\alpha\beta} = \frac{\partial \ln \det \| a_{\lambda\nu} \|}{\partial a_{\alpha\beta}}.$$

4. *Локальный параметр распределения и поверхности кривизны.* Локальным параметром распределения линейчатой поверхности конгруэнции геодезических кривых назовем параметр распределения ее развертки в пространстве $E_3(A)$, т. е. величину

$$p = \frac{(\tau,\, d\tau,\, dA)}{d\tau^2}.$$

Отсюда, в силу (12) и (16), получаем, что

$$p = \frac{l_{\alpha\beta}\, \omega^{\alpha}\, \omega^{\beta}}{a_{\lambda\nu}\, \omega^{\lambda}\, \omega^{\nu}}. \tag{18}$$

Очевидно, что локальный параметр распределения развертывающихся поверхностей конгруэнций равен нулю.

Линейчатые поверхности конгруэнций, локальные параметры которых имеют экстремальные значения, назовем поверхностями кривизны. Дифференциальные уравнения этих поверхностей имеют вид:

$$\sigma^{\alpha\beta}\, l_{\alpha\lambda}\, a_{\beta\nu}\, \omega^{\lambda}\, \omega^{\nu} = 0, \tag{19}$$

где

$$\sigma^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha < \beta, \\ 0, & \alpha = \beta, \\ -1, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

Параметры распределения поверхностей кривизны назовем главными параметрами распределения конгруэнции. Эти параметры являются корнями уравнения

$$ap^2 - \sigma^{\alpha\beta}\, \sigma^{\lambda\nu}\, l_{\alpha\lambda}\, a_{\beta\nu}\, p + l = 0,$$

где

$$l = \det \| l_{\alpha\beta} \|.$$

Оказывается, что поверхности кривизны конгруэнции являются локально ортогональными.

5. *Граничные точки и главные линейчатые поверхности.* Развертка геодезической кривой g в пространстве $E_3(u)$ есть прямая $l(u)$, проходящая через точку $A(u)$ с единичным направляющим вектором $\tau(u)$. Если отобразим $E_3(u+du)$ на $E_3(u)$, то развертка $l(u+du)$ геодизической g' отобразится на прямую $l(u,\ du)$, проходящую через точку $A(u,\ du)$ с направляющим вектором $\tau(u,\ du)$. Кратчайшее расстояние между этими двумя прямыми $l(u)$ и $l(u,\ du)$ пространства $E_3(u)$ мы назовем локальным расстоянием между двумя бесконечно близкими геодезическими кривыми конгруэнции.

Предполагая, что точки $M(u)$ и $M(u,\ du)$ основания общего перпендикуляра двух прямых $l(u)$ и $l(u,\ du)$, мы получим вектор $M(u)\,M(u,\ du)$, который и является общим перпендикуляром этих прямых.

Полагая

$$M(u) = A(u) + r(u)\,\tau(u), \quad M(u,\ du) = A(u,\ du) + r(u,\ du)\,\tau(u,\ du),$$

получим

$$M(u)\ M(u,\ du) = dA + dr\,\tau(u) + r\,d\tau + \cdots.$$

Так как

$$\big(M(u)\,M(u,\ du),\ \tau(u)\big) = 0, \quad \big(M(u)\,M(u,\ du),\ \tau(u,\ du)\big) = 0,$$

то

$$r = -\frac{b_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\,\omega^\beta}{a_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\,\omega^\beta}.$$

Величина r, определенная этой формулой, определяет абсциссу образа основания общего локального перпендикуляра двух геодезических кривых g и g' на развертке l кривой g.

Такие точки геодезической кривой g, образы которых на ее развертке l имеют абсциссы, равные экстремальным значениям величины r, определенной формулой (19), назовем локально граничными точками.

Дифференцируя равенство (19) по ω^γ, считая $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ постоянными и полагая, что $\frac{\partial r}{\partial \omega^\gamma} = 0$, мы получим

$$(b_{\alpha\beta} + r a_{\alpha\beta})\,\omega^\beta = 0.$$

Откуда, исключая $\omega^2 : \omega^3$, найдем квадратичное уравнение для абсцисс образов граничных точек

$$a r^2 + \sigma^{\alpha\beta}\,\sigma^{\varepsilon\gamma}\,a_{\alpha\gamma}\,b_{\beta\varepsilon}\,r + b = 0, \tag{20}$$

где

$$b = \det \| b_{\alpha\beta} \|.$$

Линейчатые поверхности конгруэнции, локально горловые точки которых совпадают с локально граничными точками конгруэнции, назовем главными поверхностями. Дифференциальные уравнения этих поверхностей можно записать в виде:

$$\sigma^{\alpha\beta}\,b_{\alpha\gamma}\,a_{\beta\varepsilon}\,\omega^\gamma\,\omega^\varepsilon = 0. \tag{21}$$

Эти поверхности являются локально ортогональными, ибо

$$\sigma^{\alpha\beta} b_{\alpha\gamma} a_{\beta\varepsilon} a^{\gamma\varepsilon} = 0.$$

Две пары линейчатых поверхностей конгруэнции геодезических кривых назовем локально гармоническими (или локально аполярными), если касательные их локальных сферических образов образуют гармоническую четверку. Оказывается, что такими поверхностями конгруэнции являются поверхности кривизны и главные поверхности.

Если

$$R^i_{jk} = 0$$

и

$$R^i_{jkl} = K g^{ip} (g_{kp} g_{jl} - g_{kj} g_{lp}),$$

где $K = \text{const.}$, то все построенные локальные понятия являются инвариантно связанными с образующей конгруэнции геодезических кривых, и в этом случае результаты этой работы совпадают с результатами Б. У. Британа [2].

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность доц. К. Гринцевичюсу за те критические замечания и советы, которые я получила от него на заседаниях научно-исследовательского семинара по дифференциальной геометрии при ВГУ.

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
29. I. 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас. Конгруэнция центроидальных геодезических кривых метрического пространства линейных элементов, ДАН СССР, 1960, т. 132, № 4, 735—738.
2. Б. У. Британ. Дифференциальная геометрия конгруэнций прямых и линейчатых поверхностей трехмерного пространства постоянной кривизны. Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1956, вып. 10, 269—278.
3. М. В. Васильева. Геометрия интеграла, Матем. сборн., 1955, т. 36 (78), 57—92.
4. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского мат. об-ва, 1953, т. 2, 275—382.
5. Г. Ф. Лаптев. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований, Труды третьего всесоюзн. матем. съезда, 1958, т. 3, 409—418.
6. J. Dubnow. Die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen in tensorieller Darstellung, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1933, вып. 1, 223—303.
7. A. Švec. Congruences de droites dans E_n, Чехосл. мат. ж., 1958, 8, № 4, 552—562.
8. W. O. Vogel. Regelflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Math. Z., 1958, 70, № 2, 193—212.

EUKLIDINIO SĄRYŠIO ERDVĖS GEODEZINIŲ KREIVIŲ KONGRUENCIJOS LOKALINĖS TEORIJOS KLAUSIMU

I. BLIZNIKIENĖ

(Reziumė)

Trimatės euklidinio sąryšio erdvės geodezinių kreivių kongruencijos diferencialines lygtis galima užrašyti taip:

$$\omega_1^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \, \omega^\beta.$$

Tenzoriai λ_β^α ir g_{ij} sudaro geodezinių kreivių kongruencijos pirmos eilės fundamentalinį geometrinį objektą. Iš šio objekto komponenčių galima sudaryti sekančius poobjekčius (tenzorius):

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{1\alpha} g_{1\beta}}{g_{11}}, \qquad \tilde{\lambda}_\beta^\alpha = \frac{\lambda_\beta^\alpha}{F}, \qquad F = \sqrt{g_{11}},$$

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\gamma_{\alpha\varepsilon} \tilde{\lambda}_\beta^\varepsilon + \gamma_{\beta\varepsilon} \tilde{\lambda}_\alpha^\varepsilon\right), \qquad a_{\alpha\beta} = \gamma_{\varepsilon\gamma} \tilde{\lambda}_\alpha^\varepsilon \tilde{\lambda}_\beta^\gamma.$$

Surastos šių tenzorinių laukų geometrinės interpretacijos.

Surasti kongruencijos lokaliniai židiniai, išklojamieji paviršiai, lokalinis pasiskirstymo parametras, kreivumo paviršiai, ribiniai taškai ir pagrindiniai paviršiai. Surastos būtinos ir pakankamos sąlygos tam, kad nagrinėjamoji kongruencija būtų normalinė.

ON THE LOCAL THEORY OF GEODESIC CURVES CONGRUENCE IN THE EUCLIDEAN'S CONNECTIONS SPACES

I. BLIZNIKIENE

(Summary)

The differential equations of the congruence of geodesic curves in the three dimension Euclidean's connection space are those:

$$\omega_1^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \, \omega^\beta.$$

The tensors λ_β^α and g_{ij} determine the fundamental geometrical object of the first degree of the geodesic curve's congruence's. We can compose the following subobjects (tensors) of the components of this object:

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{1\alpha} g_{1\beta}}{g_{11}}, \qquad \tilde{\lambda}_\beta^\alpha = \frac{\lambda_\beta^\alpha}{F}, \qquad F = \sqrt{g_{11}},$$

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\gamma_{\alpha\varepsilon} \tilde{\lambda}_\beta^\varepsilon + \gamma_{\beta\varepsilon} \tilde{\lambda}_\alpha^\varepsilon\right), \qquad a_{\alpha\beta} = \gamma_{\varepsilon\gamma} \tilde{\lambda}_\alpha^\varepsilon \tilde{\lambda}_\beta^\gamma.$$

There are given the geometrical interpretations of these tensors. The local focuses, the local parameter of distribution, the surfaces of curvature, the points of boundary and the principal curfaces are obtained. The necessary and sufficient conditions for the regarded congruence to be normal are obtained too.
