I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК № 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1961

ИНФОРМАЦИЯ О VI ВСЕСОЮЗНОМ СОВЕЩАНИИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ[1]

С 5 по 10 сентября 1960 г. в г. Вильнюс происходило Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике, организованное Академией наук Литовской ССР, Вильнюсским государственным университетом им. В. Капсукаса и Математическим институтом им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. На совещании участвовали ученные Москвы, Ленинграда, Киева, Ташкента, Тбилиси, Львова и других городов Советского Союза. Вильнюсские математики принимали у себя около 200 гостей. Прочитано 90 докладов и сообщений. По сравнению с V Совещанием (1958 г. Ереван) количество участников почти удвоилось, возросло количество заявок на доклады и краткие сообщения. Поэтому на Совещании в Вильнюсе впервые наряду с пленарными заседаниями проводились секционные. Работали секции: по предельным теоремам (руководители чл.-кор. АН СССР Ю. В. Линник и д-р ф. м. н. Ю. В. Прохоров), Марковским процессам (руководитель д-р ф. м. н. Е. Б. Дынкин), теории информации и приложениям (руководитель д-р ф. м. н. Р. Л. Добрушин), теории игр и теории массового обслуживания (руководители академик АН УССР Б. В. Гнеденко и д-р ф. м. н. Н. Н. Воробьев), математической статистике (руководитель чл.-кор. АН СССР Н. В. Смирнов). Совещание открылось вступительными словами Председателя Оргкомитета Ректора ВГУ И. П. Кубилюса и академика А. Н. Колмогорова.

На Совещании с докладами и сообщениями выступили следующие вильнюсские математики: А. Алешкевичене, Л. Вилкаускас, И. Кубилюс, А. Миталаускас, Б. Ряуба, В. Статулявичюс, Р. Уждавинис.

Следующее, VII Совещание по приглашению Тбилиских математиков решено созвать в г. Тбилиси.

С 12 по 14 сентября по окончании Совещания в Паланге состоялся Коллоквиум по распределениям в бесконечномерных пространствах (руководители академик А. Н. Колмогоров, д-р ф. м. н. Ю. В. Прохоров и д-р ф. м. н. А. М. Яглом). На Коллоквиуме обсуждались вопросы, пограничные между теорией вероятностей и функциональным анализом. Прочитано 12 докладов и сообщений. Участники Коллоквиума выразили желание периодически повторить подобные встречи.

Участникам Совещания и Коллоквиума было организовано несколько экскурсий. Им понравились города Вильнюс, Каунас, Тракай, их исторические места, Художественный музей им. Чюрлиониса, Бальтийское взморье, дюны Нэринги.

ИНФОРМАЦИЯ О ВТОРОМ РЕСПУБЛИКАНСКОМ СОВЕЩАНИИ МАТЕМАТИКОВ, ПОСВЯЩЕННОМ 20-ЛЕТИЮ ЛИТОВСКОЙ ССР

С 27 по 28 июня 1960 г. в г. Вильнюс происходило второе республиканское совещание математиков Лит. ССР, организованное физико-математическим факультетом Вильнюского Государственного Университета им. В. Капсукаса и Институтом физики и математики Академии наук Литовской ССР, на котором участвовали сотруд-

[1] Подробная программа Совещания и Коллоквиума опубликована в журнале «Теория вероятностей и ее применения», VI, 1 (1961), 1940—144.

ники республиканских научных учреждений и учебных заведений. На втором совещании наряду с пленарными заседаниями работали 3 секции: теории вероятностей и теории чисел, математического анализа и геометрии, элементарной математики и методики преподавания математики. Совещание открылось вступительным словом ректора ВГУ проф. И. Кубилюса. На совещании прочитано 37 докладов и коротких сообщений.

Ниже приводятся программа совещания и резюме докладов, прочитанных на пленарных и секционных заседаниях.

ПРОГРАММА СОВЕЩАНИЯ

Понедельник, 27 июня

Утренее пленарное заседание

1. **Открытие совещания.**
2. **В. Статулявичюс.** О суммах слабо зависимых величин и аддитивных функционалах на процессах[1].
3. **В. Лютикас.** Преподавание математики в школах общего образования Литовской ССР.
4. **З. Жемайтис.** Физико-математические науки в старом Вильнюсском Университете.[1]

Вечернее заседание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. **Б. Ряуба.** Центральная предельная теорема для сумм слабо зависимых случайных величин. (Работа печатается в Трудах VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике.)
2. **А. Миталаускас.** Локальные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. (Содержание доклада печатается в этом номере настоящего издания.)
3. **А. Алешкевичене.** Одна локальная предельная теорема для однородных цепей Маркова. (Содержание доклада печатается в настоящем номере этого издания.)
4. **Р. Уждавинис.** К вопросу о распределении аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов. (Результаты сообщения печатаются в настоящем номере этого издания.)
5. **Э. Вилкас.** Популярное обозрение некоторых задач, решаемых теорией игр, линейным программированием и динамическим программированием.

ГЕОМЕТРИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. **К. Гринцевичюс.** О полном объекте комплекса прямых.[1]
2. **П. Римкене (Ришкуте).** О четырехпараметрическом многообразии линейных комплексов[1].
3. **В. Близникас.** Некоторые вопросы дифференциальной геометрии билинейно-метрических пространств линейных элементов.[1]
4. **А. Нафталевич.** О строении множества обобщенных периодов. (Содержание доклада печатается в этом номере настоящего издания.)
5. **Ш. Стрелиц.** Обобщение теоремы Вимана-Валирона для целых функций многих комплексных переменных. (Содержание доклада печатается в этом номере настоящего издания.)
6. **К. Гармус.** Узкий интеграл Данжуа для функций многих переменных.[1]
7. **П. Жемайтис.** Вильнюсский астроном М. Почобут.
8. **З. Жемайтис.** Замечательный математик старого Вильнюсского Университета П. Норвайша.

---

[1] Резюме доклада следует.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕТОДИКА МАТЕМАТИКИ

1. **М. Гудинас.** Некоторые вопросы подготовки и проведения урока учителем математики.
2. **С. Булота.** Как заинтересовать учеников математикой.
3. **Д. Урбонене.** Математические вечера в средней школе.
4. **М. Готлерис.** О «Сборнике задач по алгебре и элементарным функциям» А. К. Давыдова.

Вторник, 28 июня

Утренее заседание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. **А. Рауделюнас.** Некоторые предельные теоремы для неоднородных цепей Маркова в многомерном случае. (Содержание доклада печатается в этом номере настоящего издания.)
2. **Г. Жилинскас.** Алгебры относительно некомутативных тел.
3. **В. Калинка.** О представлении целых гауссовых чисел суммой квадратов.[1]
4. **И. Кубилюс.** Некоторые вопросы многомерной аналитической теории чисел.[1]
5. **Р. Мерките.** Некоторые статистические характеристики литовского языка.

   Подсчитаны частоты появления букв в художественном тексте литовского языка и избыточность языка. Найдены распределения слогов в словах, букв в слогах и букв в словах различных текстов.

ГЕОМЕТРИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. **Б. Квядарас.** Решение дифференциальных уравнений с частными производными методом динамического программирования.

   Доказывается, что для дифференциального уравнения второго порядка с частными производными можно найти функционал, для которого это уравнение является уравнением Эйлера. Функциональное уравнение решается методом динамического программирования, указанным Шрейдером. Решение краевой задачи для любого линейного уравнения этим методом мало отличается от решения методом сеток. Найдены необходимые условия для сходимости приближенного решения.
2. **А. Матузявичюс.** Препятствия для секущих поверхностей двухкратных расслоений. (Содержание доклада печатается в этом номере настоящего издания.)
3. **П. Голоквосчюс.** Об ограниченности решений системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коефициентами. (Содержание доклада печатается в этом номере настоящего издания.)
4. **Л. Ступялис.** Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости процесса конечных разностей для дифференциальных уравнений первого порядка.

   Сообщалось об улучшении результата Будакова и Горбунова. Улучшение состоит в том, что опущено требование равномерной ограниченности некоторого оператора.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕТОДИКА МАТЕМАТИКИ

1. **И. Балтусис.** Работа учителя математики.
2. **И. Янулионис.** Преподавание математики в школе и воспитательная работа.
3. **Р. Балайшис.** Расширения знаний по арифметике в курсе алгебры.
4. **И. Тейшерскис.** О повышении эффективности урока по математике.
5. **Б. Хмелевский.** Некоторые теоремы франциска Виета.[1]

---

[1] Резюме доклада следует

Вечернее пленарное заседание

1. **В. Матулис.** Некоторые вопросы математической логики.
2. **И. Кубилюс.** Задачи математиков Советской Литвы.

В докладе был дан обзор основных направлений математических исследований в республике.

Подверглись обсуждению наиболее актуальная и перспективная проблематика, вопросы подготовки математических кадров, преподавания математики, издания популярной литературы и учебников.

3. **Закрытие совещания.**

О суммах слабо зависимых случайных величин и аддитивных функционалах от процессов

В. СТАТУЛЯВИЧЮС

Пусть имеется последовательность серий $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$; $n=1, 2, \ldots$, случайных величин, удовлетворяющих в каждой серии следующему условию сильного перемешивания:

$$\sup_{\substack{k<l \\ l-k=\tau}} \sup_{A \in \mathfrak{S}_{1k}^{(n)}, B \in \mathfrak{S}_{1n}^{(n)}} \left| P(AB) - P(A)P(B) \right| \leqslant \frac{C}{\tau^a},$$

где a — достаточно большое, $\mathfrak{S}_{kl}^{(n)}$; $1<k\leqslant l\leqslant n$ — обозначает τ — алгебру событий, порожденную событиями вида $\left\{\left(\xi_{i_1}^{(n)}, \ldots, \xi_{i_t}^{(n)}\right) \in B\right\}$, где $k\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant l$, $B-r$ — мерное борелевское множество.

Пусть $\left|\xi_k^{(n)}\right|\leqslant C_1$ для всех k, n, и дисперсия суммы $S_{kl}^{(n)}=\xi_{k+1}^{(n)}+\ldots+\xi_l^{(n)}$ такова, что

$$0<c<\frac{DS_{kl}^{(n)}}{l-k}<C_2<\infty$$

для всех $0\leqslant k<l\leqslant n$ и n.

Тогда для вероятности больших уклонений суммы $S^{(n)}=\xi_1^{(n)}+\ldots+\xi_n^{(n)}$ справедливо соотношение

$$P\left\{\frac{S^{(n)}-MS^{(n)}}{\sqrt{DS^{(n)}}}>x\right\}=\left(1-\Phi(x)\right)e^{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left(1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

при $1\leqslant x=0(\sqrt{n})$.

Здесь $\Phi(x)$ — функция нормального распределения, $\lambda_n(t)$ — степенной ряд, равномерно сходящиеся при малых $|t|$ и константа в символе $O(\ldots)$ равномерно ограничена по n.

Аналогичная теорема верна для аддитивных ограниченных функционалов от процессов, удовлетворяющих высше указанному условию сильного перемешивания.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В СТАРОМ ВИЛЬНЮССКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

З. ЖЕМАЙТИС

Обширный край Вел. Княжества Литовского в XVI веке ощущал большой недостаток своей высшей школы. Она была открыта в 1579 году в Вильнюсе под наименованием: Academia et Universitas Vilnensis, и начала функционировать под управлением ордена иезуитов.

Иезуиты мало заботились о таких предметах, как математика, физика. Чтение курсов по ним обычно поручалось профессорам богословия, философии, древних языков и др. в качестве случайного придатка к их основным предметам преподавания. Но и при таких ненормальных условиях в первые десятилетия существования Университета все же выдвинулись два профессора: Андр. Милевский и Оскар Кригер, оставившие после себя рукописные и печатные труды и привлекшие к творческой работе учеников, как, напр., Каз. Семеновича, капитальный труд которого по артиллерии (на латинском яз.) был издан в 1650 г. и вскоре переиздан в Голландии, переведен на языки — французский, английский, итальянский.

Бурно развивавшиеся в Европе физико-математические науки во второй четверти XVIII в. начали проникать и в Вильнюсский Университет. Большая заслуга в этом деле принадлежит даровитым ученикам Университета, позднейшим его профессорам: Т. Жебровскому, Я. Накцияновичу, М. Почобуту, Фр. Норвайше. В 1755 г. была построена астрономическая обсерватория.

Освобожденный в 1773 г. от опеки иезуитов Университет был коренным образом перестроен и расширен введением новых специальностей: медицины, юриспруденции, естествоведения, архитектуры. Выдающуюся роль в деле расширения и углубления курсов физико-математических наук сыграли: астроном, ректор М. Почобут и выдающийся математик Фр. Норвайша.

Указ Александра I (1803 г.) не только удостоил Вильнюсский Университет наименования императорского, но создал весьма благоприятные условия для его дальнейшего развития: ему была предоставлена полная автономия в его научно-педагогической работе, его ведению были поручены все школы обширного края, он был хорошо обеспечен в материальном отношении и Университет быстро расцвёл. В результате многолетней плодотворной деятельности замечательного математика Ф. Норвайши, выдающегося астронома и ректора М. Почобута, астронома и ректора Я. Снядецкого, физико-математический факультет, не прибегая к помощи иностранных ученых, воспитал свои кадры математиков, физиков, астрономов (З. Немчевский, И. Стубелевич, М. Полинский Пелка, П. Славинский, А. Вирвич, И. Румбович и ряд др.), которые, если и не ознаменовали себя значительными открытиями в этих науках, во всяком случае преподавали их на вполне современном им уровне наук, подготовили для края тысячи высококвалифицированных специалистов. Факультет пользовался большим успехом среди академической молодежи, охватывая по временам до двух третей всего состава студентов Университета.

После закрытия Университета во время чёрной реакции царствования Николая I (1832 г.), значительная часть научно-педагогического персонала факультета была привлечена к работе в высших учебных заведениях империи и за границей.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ФРАНЦИСКА ВИЕТА

Б. ХМЕЛЕВСКИЙ

В докладе рассматриваются некоторые тригонометрические теоремы Франциска Виета, описанные его учеником Андерсоном Скотом в произведении „Ad angularium sectionum analyticen theoremata catholicotera a Francisco Vieta Fontenaeensi primum excogitata, at absque ulla demonstratione ad nos transmissa, iam tandem demonstrationibus confirmata. Parisiis, 1615".

В этой работе Андерсон доказывает ряд теорем, которые Виет прислал ему без доказательства. В начале высказывается предложение: «Если даны три прямоугольных треугольника, из которых острый угол первого отличается от острого угла второго на острый угол третьего, и если избыток находится в первом треугольнике, то стороны третьего выражаются следующим «подобием»: гипотенуза становится «подобной» прямоугольнику, построенному на гипотенузах первого и второго треугольников; катет становится «подобным» прямоугольнику, построенному на катете первого и основании второго треугольника, минус прямоугольник, построенный на катете второго и основании первого. Основание (становится «подобным») прямоугольнику, построенному на основаниях первого и второго треугольников, плюс прямоугольник, построенный на их катетах». Аналогично формулируются и другие предложения. В рассматриваемых теоремах речь идет о выводе формул синуса и косинуса суммы и разности двух углов, а также о выражении синуса и косинуса кратных углов. Доказательство утверждений ведется в риторической форме, совершенно в духе Архимеда. Даже чертежи напоминают соответствующие чертежи из работы Архимеда «Измерение круга», (в которой тоже по существу применяются тригонометрические функции — котангенсы). Однако, в конце третьего предложения для составления таблицы формул кратных углов применяется введенная Франциском Виетом буквенная символика. В конце каждого предложения дается численный пример.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ СУММОЙ КВАДРАТОВ

В. КАЛИНКА

Т. Нагель в 1953—54 г. г. исследовал вопрос о представлении целых алгебраических чисел суммой двух квадратов. Числа, представимые таким образом, он назвал A-числами. Им показано также, что среди всех квадратичных мнимых полей только в гауссовом поле уравнение

$$\alpha^2+\beta^2=\omega, \quad \omega\neq 0 \tag{1}$$

имеет конечное число решений в целых α, β, и что каждое целое гауссово число является A-числом, за исключением чисел вида

$$\omega\equiv i \pmod 2, \quad \omega\equiv 1+i \pmod 2, \quad \omega\equiv(1+i)^3 \pmod 4 \tag{2}$$

Таким образом, A-числа гауссова поля имеют вид $2k+1+2li$, $4k+4li$, $4k+2+4li$, $4k+(4l+2)i$, где k и l — целые рациональные числа. Легко подсчитать, что эти числа составляют приблизительно 43,75 % числа всех целых гауссовых чисел. Если ω является произведением m различных простых A-чисел, то число существенно различных решений (α, β) уравнения (1) равно 2^{m-1}.

В данной работе определяется число $I(\omega)$ решений уравнения (1) для любого ω, а также рассматриваются некоторые другие вопросы.

Очевидно, что все A-числа гауссова поля имеют вид

$$\omega=\eta\, \mathbf{p}_1^{m_1}\mathbf{p}_2^{m_2}\dots\mathbf{p}_r^{m_r}; \quad m_j\geqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ r), \tag{3}$$

где $\eta=\pm 1$ или $\eta=2\varepsilon$, или же $\eta=\varepsilon(1+i)^{m_0}$, $m_0\geqslant 4$, ε — единица гауссова поля, а $\mathbf{p}_j\equiv 1 \pmod 2$ — простые гауссовы числа.

Решения (α_1, β_1), $(\alpha_1, -\beta_1)$, $(-\alpha_1, \beta_1)$, $(-\alpha_1, -\beta_1)$, (β_1, α_1), $(\beta_1, -\alpha_1)$, $(-\beta_1, \alpha_1)$, $(-\beta_1, -\alpha_1)$, если $\alpha_1\beta_1\neq 0$, будут считаться различными. Когда $\omega=\alpha^2$ различными будут считаться также решения $(\alpha, 0)$, $(-\alpha, 0)$, $(0, \alpha)$, $(0, -\alpha)$.

Теорема. *Число решений в целых гауссовых числах* (α, β) *уравнения* (1) *равно* 0, *если* ω *имеет вид* (2), *равно* $4(m_1+1)(m_2+1)\dots(m_r+1)$, *если* ω *имеет вид* (3) *с* $\eta=\pm 1$ *или* 2ε, *и равно* $4(m_0-3)(m_1+1)\dots(m_r+1)$, *если* ω *имеет вид* (3) *с* $\eta=\varepsilon(1+i)^{m_0}$.

Доказательство теоремы — элементарное. Замечая, что число решений уравнения $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\omega$ выражается формулой

$$I(\omega)=\sum_{\substack{\omega=\omega_1\omega_2 \\ \omega_1\equiv\omega_2 \pmod 2}} 1,$$

путем суммирования получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим число решений уравнения

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_n^2=\omega, \quad n\geqslant 3 \tag{4}$$

в кольце целых гауссовых чисел. Необходимое условие для представления числа ω суммой n квадратов — чётность мнимой части числа ω. Как известно, это условие является недостаточным при $n=2$, ибо числа вида $4k+2+(4l+2)i$ не являются A-числами. Легко доказать, что для $n\geqslant 3$ условие не только необходимо, но и достаточно. В этом случае уравнение (4) имеет бесконечно много решений.

К. Холли, используя расширенную гипотезу Римана, доказал, что любое достаточно большое целое рациональное число N представимо в виде

$$N=p+u^2+v^2,$$

где p — простое рациональное, u и v — целые рациональные числа. Ю. В. Линник решил этот вопрос без римановой гипотезы.

В гауссовом поле числа $\alpha^2+\beta^2$ имеют точно определённый простой вид, и поэтому теорема, аналогичная теореме К. Холли, следует тривиально. Таким образом, любое целое гауссово число может быть представлено в виде

$$\omega = \mathbf{p} + \alpha^2 + \beta^2,$$

где $\mathbf{p}$ — простое гауссово число, α и β — целые числа.

Автор выражает глубокую благодарность проф. И. Кубилюсу за ценные советы при исследовании этих вопросов.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МНОГОМЕРНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

И. КУБИЛЮС

Рассматривается распределение простых идеальных чисел поля алгебраических чисел в сигнатурном пространстве. Наиболее детально исследовано распределение простых гауссовых чисел. Доказано, что число простых гауссовых чисел $\mathbf{p}$, для которых $N\mathbf{p} \leqslant x$, $\varphi_1 < \operatorname{Arg} \mathbf{p} \leqslant \varphi_2$, выражаются формулами

$$\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left\{x \exp\left(-\frac{(\ln x)^{\frac{2}{3}}}{(\ln\ln x)^{\frac{4}{3}}}\right)\right\},$$

$$\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{x}{\ln x}\Big(1+o(1)\Big)+O\left(x^{\vartheta_1+\varepsilon}\right),$$

а число тех $\mathbf{p}$, для которых $x < N\mathbf{p} \leqslant y$, $\varphi_1 < \operatorname{Arg}\mathbf{p} \leqslant \varphi_2$, — формулой

$$\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{y-x}{\ln x}\Big(1+o(1)\Big)+O\left(x^{\vartheta_2+\varepsilon}\right).$$

Здесь $x \to \infty$, $x < y \ll x$, $0 < \varphi_2-\varphi_1 \leqslant 2\pi$; $\vartheta = 0{,}913\ldots < \frac{53}{58}$; $\vartheta_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\vartheta_1$; $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число; оценки равномерны по ϕ_1, φ_2, x и $y \leqslant Ax$; $A > 1$ — постоянное.

О ПОЛНОМ ОБЪЕКТЕ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

К. ГРИНЦЕВИЧЮС

Комплекс прямых $l = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)$ в трехмерном проективном пространстве определяется уравнениями:

$$\begin{gathered}
\omega_1^4+\omega_2^3=0, \quad \omega_i^i=0,\\
\omega_3^4-\omega_2^1 = h_{3333}\,\omega_1^3+2h_{3334}\,\omega_1^4+(h-h_{3344})\,\omega_2^4,\\
\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4 = 2h_{3334}\,\omega_1^3+2\,(h+2h_{3344})\,\omega_1^4-2h_{3444}\,\omega_2^4,\\
\omega_4^3-\omega_1^2 = (h-h_{3344})\,\omega_1^3-2h_{3444}\,\omega_1^4+h_{4444}\,\omega_\alpha,
\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
dh_{\alpha\beta\gamma\delta}-4h_{\varepsilon(\beta\gamma\delta}\vartheta_{\alpha)}^{\varepsilon}+\frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(3\omega_p^p+\omega_\varepsilon^\varepsilon\right) = \in^{p\iota} f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota}\,\omega_p^\varepsilon-\frac{6}{5}\,\omega_{5-(\alpha}^{\varepsilon} f_{\beta\gamma\in\delta)\varepsilon};\\
dh+\frac{1}{2}h\left(\omega_p^p-\omega_\alpha^\alpha\right)-\omega_4^1-\omega_3^2 = \in^{p\alpha} f_{\alpha\beta}\,\omega_p^\beta,\\
\in^{p\alpha}\left[\Delta f_{\alpha\beta}\,\omega_p^\beta\right]=0;\\
\in^{p\iota}\left[\Delta f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota}\,\omega_p^\varepsilon\right]+\frac{6}{5}\left[\omega_{5-(\alpha}^{\varepsilon}\Delta f_{\beta\gamma\in\delta)\varepsilon}\right]=0,
\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$d\mathbf{A}_i = \omega_i^k\,\mathbf{A}_k, \quad D\omega_i^j = \left[\omega_i^k\,\omega_k^j\right]; \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \iota = 3,\ 4; \quad p = 1,\ 2; \quad \in_{\alpha\beta} = \alpha-\beta, \quad \in^{p\alpha} = 5-p-\alpha; \quad \vartheta_\alpha^\beta = \frac{1}{2}\left(\omega_\alpha^\beta+\omega_{5-\alpha}^{5-\beta}\right).$$

Коэффициенты $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$, h, $f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$, $f_{\alpha\beta}$ являются симметричными относительно всех индексов и образуют фундаментальный объект третьего порядка, а система коэффициентов

$$f_{\alpha\beta},\ h_{\alpha\beta\gamma\delta},\ h$$

является подобъектом фундаментального объекта третьего порядка и определяет прямую

$$l_1=\left\{\left(f^{34}-\frac{1}{2}h\right)\mathbf{A}_1+f^{33}\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_4,\quad f^{44}\mathbf{A}_1+\left(f^{34}+\frac{1}{2}h\right)\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_3\right\},$$

где

$$h_{\alpha\beta\gamma\delta}f^{\gamma\delta}+5f_{\alpha\beta}=0,\quad f^{\alpha\beta}=f^{\beta\alpha}.$$

Продолжая уравнения (2) два раза, получим фундаментальный объект третьего порядка комплекса, описываемого лучом l_1. Этот объект является подобъектом фундаментального объекта пятого порядка исходного комплекса (l) и он с коэффициентами уравнений (1), (2) образуют полный объект комплекса (l).

Аналогично повторным продолжением получается и полный геометрический объект комплекса в многомерном проективном пространстве. Однако в случае многомерного пространства повторное продолжение производится лишь однократно.

О ЧЕТЫРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ ЛИНЕЙНЫХ КОМПЛЕКСОВ

П. РИМКЕНЕ (РИШКУТЕ)

Уравнение линейного комплекса

$$a_{ij}p^{ij}=0,\quad i,\ j,\ k,=1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{1}$$

зависит от пяти параметров.

Присоединим к каждому линейному комплексу (1) такие тетраэдры $\{\mathbf{A}_i\}$ нулевого порядка, уравнение (1) относительно которых принимало вид

$$p^{13}+p^{42}=0. \tag{2}$$

Четырехпараметрическое многообразие линейных комплексов (2) определяется дифференциальными уравнениями

$$\omega_1^4+\omega_2^3+\omega_3^2+\omega_4^1=0,\quad \omega_i^i=0,$$

$$[\omega_1^3-\omega_4^2,\ \omega_3^4-\omega_2^1]+[\omega_2^4-\omega_3^1,\ \omega_4^3-\omega_1^2]+$$
$$+[\omega_1^4+\omega_3^2,\ \omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4]+[\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4,\ \omega_1^4+\omega_2^3]=0,$$

где

$$d\mathbf{A}_i=\omega_i^j\mathbf{A}_j,\quad D\omega_i^j=\left[\omega_i^k\omega_k^j\right].$$

Оказывается, что фундаментальный объект третьего порядка является полным.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ БИЛИНЕЙНО-МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. БЛИЗНИКАС

Пространство линейных элементов с заданным полем несимметрического ковариантного тензора второй валентности h_{ij}, дискриминант которого отличен от нуля, называется билинейно-метрическим пространством линейных элементов $\mathfrak{f}_n$. Вводится понятие линейной аффинной связности типа Эйнштейна, присоединенной к фундаментальному тензору h_{ij} рассматриваемого пространства. Если пространство $\mathfrak{f}_n$ является обобщенным римановым пространством, то эта связность совпадает со связностью Главатого.

Линейная аффинная связность, относительно которой обобщенные ковариантные производные первого и второго рода тензора h_{ij} равны нулю, называется билинейно-метрической связностью пространства $\mathfrak{f}_n$.

Гиперповерхность пространства $\mathfrak{f}_n$ можно определить как $(n-1)$ — мерное многообразие линейных элементов. Центры этого многообразия линейных элементов образуют $(n-1)$ — мерное точечное многообразие, которое назовем гиперцентроидой данной поверхности. Дифференциальные уравнения гиперповерхнсти имеют вид:

$$\omega^i=\Lambda_a^i\Theta^a,\quad \omega_1^\alpha=\lambda_a^\alpha\Theta^a,\quad \nabla\Lambda_a^i=\Lambda_{ab}^i\Theta^b$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \alpha=2,\ \ldots,\ n;\quad a=1,\ \ldots,\ n-1),$$

где Θ^a — инвариантные формы псевдогруппы, а ω^i и ω_1^α — главные формы многообразия $\mathfrak{f}_n$. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы гиперповерхность была гиперцентроидальной. Оказывается, что на гиперповерхности пространства $\mathfrak{f}_n$ пространственной метрикой индуцируется обобщенно риманова геометрия. Связность на гиперповерхности, которая установлена путем проектирования параллельно левой нормали (соответственно нормали и правой нормали), названа левой индуцированной связностью (соответственно индуцированной связностью и правой индуцинрованной связностью). Компоненты объектов этих связностей имеют вид:

$$L^c_{ab} = h^{ec} h_{ij} \Lambda^i_{ab},$$

$$\Gamma^c_{ab} = g^{ec} g_{ij} \Lambda^i_{ab} \Lambda^j_e,$$

$$\Pi^c_{ab} = h^{ce} h_{ij} \Lambda^i_e \Lambda^i_{ab},$$

$$g_{ij} = h_{(ij)}, \quad h_{ab} = h_{ij} \Lambda^i_a \Lambda^j_b, \quad h^{ac} h_{cb} = \delta^a_b,$$

$$g_{ab} = h_{ij} \Lambda^i_{(a} \Lambda^j_{b)}, \quad g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c.$$

Общая теория пространств $\mathfrak{f}_n$ построена в кандидатской диссертации автора.

УЗКИЙ ИНТЕГРАЛ ДАНЖУА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

К. ГАРМУС

После того, как был опубликован (1912 г.) так называемый узкий интеграл Данжуа, начались исследования по распространению понятия этого интеграла на случай многомерного пространства. Получен ряд решений (Ломан, Кемписты, Челидзе), но все они не считаются еще окончательными. Автор решает эту проблему при помощи несобственного интеграла Лебега, понятие которого дано в прежних его работах.

Дескриптивное определение D_* — интеграла. Дается понятие абсолютно непрерывной так называемой AC_* — функции на двухмерном множестве G. Затем дается на том же самом множестве понятие обобщенно абсолютно непрерывной так называемой ACG_* — функции. Также дается определение сильной и регулярной производных функции двух переменных $F(x, y)$ в точке (x, y). На основе этих понятий строится дескриптивное определение узкого интеграла Данжуа от функции $f(x, y)$ на континуме H.

Конструктивное определение D_* — интеграла. Дается понятие абстрактного так называемого C — интеграла на континуме H и понятия несобственного C — интеграла, C^c — интеграла и C^{H_*} — интеграла. В частном случае при $C = L$, на основе соотношений CcD_*, $C^c cD_*$ и $C^H{}_* cD_*$, строится трансфинитная последовательность интегралов и получается, таким образом, конструктивное определение D_* — интеграла на континуме H.