I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В. СТАТУЛЯВИЧЮС

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В то время, как условия применимости центральной предельной теоремы для сумм случайных величин связанных в неоднородную цепь Маркова после работ А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, Ю. В. Линника, Н. А. Сапогова и Р. Л. Добрушина почти полностью изучены, локальная предельная теорема доказана только для одного случая неоднородной цепи в замечательной работе Ю. В. Линника [1], на которой более подробно остановимся дальше.

Основной целью предлагаемой работы является получение локальных предельных теорем и их уточнений для неоднородных цепей Маркова при условиях, близких условиям интегральных теорем в смысле эргодичности цепи. Кроме того, до сих пор в локальных предельных теоремах для решетчатых слагаемых изучались цепи Маркова только с конечными или со счетными множествами возможных состояний. В предлагаемой работе множества состояний могут быть произвольными. Некоторые результаты данной работы сообщались в заметках [7] — [9], [14].

Основной метод, применяемый в работе, это метод условных характеристических функций.

Определим цепь Маркова совершенно так, как это делается в работе [2].

Пусть заданы произвольное множество Ω_k состояний системы в k-й момент времени, k-я переходная вероятностная функция $P_k(\omega, A)$ с областью определения $(\Omega_{k-1}, \tilde{F}_{k-1}, \Omega_k, \tilde{F}_k)$, где $\tilde{F}_k$ — σ — алгебра (борелевское поле) подмножеств множества Ω_k, $k=2, 3, \ldots, n$, и начальное распределение вероятностей $P_1(A)$, $A \in \tilde{F}_1$.

Основным пространством элементарных событий процесса берется прямое произведение $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, \tilde{F}_1 \times \ldots \times \tilde{F}_n) = (\Omega, F)$ и вероятность множества $A \in F$ определяется как

$$\mathbf{P}(A) = \int\limits_{A_1} \int\limits_{A_2} \ldots \int\limits_{A_n} P_1(d\omega_1) P_2(\omega_1, d\omega_2) \ldots P_n(\omega_{n-1}, d\omega_n),$$

если

$$A_i \in \tilde{F}_i, \quad (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = A.$$

В дальнейшем σ — алгеброй состояний системы в k-й момент времени понимается множество F_k подмножеств (цилиндров) вида

$$\{\omega_1 \in \Omega_1, \ldots, \omega_{k-1} \in \Omega_{k-1}, \omega_k \in A_k, \omega_{k+1} \in A_{k+1}, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\},$$

где $A_k \in \tilde{F}_k$; $k=1, 2, \ldots, n$.

Совокупность $\{X_k(\omega)\}$ функции $X_k(\omega)$, определенных на Ω_k и F_k — измеримых, $k=1, 2, \ldots, n$, называется последовательностью случайных величин, связанных в цепь Маркова.

Число $0 \leqslant \alpha_{kl} \leqslant 1$, определяемое соотношением

$$1 - \alpha_{kl} = \sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} \left| P_{kl}(\omega, A) - P_{kl}(\tilde{\omega}, A) \right|; \qquad \omega \in \Omega_k, \quad \tilde{\omega} \in \Omega_k, \ A \in \tilde{F}_l,$$

называется коэффициентом эргодичности переходной вероятностной функции $P_{kl}(\omega, A)$. Здесь $P_{kl}(\omega, A)$ — переходная вероятностная функция с областью определения $(\Omega_k, \tilde{F}_k, \Omega_l, \tilde{F}_l)$, получаемая из соотношения

$$P_{kl}(\omega, A) = \int\limits_{\Omega_{k+1}} \int\limits_{\Omega_{k+2}} \ldots \int\limits_{\Omega_{l-1}} \int\limits_{A} P_{k+1}(\omega, d\omega_{k+1}) P_{k+2}(\omega_{k+1}, d\omega_{k+2}) \ldots$$
$$P_{l-1}(\omega_{l-2}, d\omega_{l-1}) P_l(\omega_{l-1}, d\omega_l),$$

где $\omega \in \Omega_k$, $A \in \tilde{F}_l$.

Будем пользоваться следующими утверждениями, доказанными в работе [2]:

1) для любых целых $1 \leqslant k < s < l \leqslant n$

$$1 - \alpha_{kl} \leqslant (1 - \alpha_{ks})(1 - \alpha_{sl}), \tag{1}$$

2) если $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathbf{D}X_k \geqslant \sigma > 0$, $k=1, \ldots, n$, то

$$\mathbf{D}S_n \geqslant \frac{\sigma\alpha^{(n)}}{200}. \tag{2}$$

Здесь коэффициент эргодичности цепи

$$\alpha^{(n)} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k; \quad \alpha_k = \alpha_{k-1, k}.$$

В первых двух главах *будем изучать последовательность цепей Маркова, где n-я цепь является цепью с n моментами времени.* Поэтому все рассматриваемые величины будут зависеть от индекса n. Этот индекс, если только будет необходимо, мы укажем в скобках. И так, *в дальнейшем* $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ — *последовательность случайных величин связанных в n-ю цепь Маркова.* В дальнейшем пусть случайные величины $X_k^{(n)}$ имеют конечные математические ожидания $\mathbf{M}X_k^{(n)}$ и дисперсии $\mathbf{D}X_k^{(n)}$, причем существует такое постоянное $\sigma > 0$, что $\mathbf{D}X_k^{(n)} \geqslant \sigma$; $k=1, \ldots, n$. Во всем изложении буквами $c, c_1, c_2, \ldots, C, C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать положительные конечные константы. Далее, постоянное в символе Э. Ландау „$O(\ldots)$" или в тождественном ему символе И. М. Виноградова „$\ll$" не будет зависеть от n. Положим

$$S_{kl}^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} + \ldots + X_l^{(n)}, \quad S_n = S_{on}^{(n)}, \quad F_k^{(n)} = \mathbf{P}\left\{X_k^{(n)} < x\right\};$$

$$k=1, \ldots, n, \quad F_{kl}^{(n)}(x) = \mathbf{P}\left\{S_{kl}^{(n)} < x\right\}; \quad 0 \leqslant k < l \leqslant n,$$

$$f_n(t) = \mathbf{M}e^{itS_n}.$$

Основным орудием работы будут условные математические ожидания А. Н. Колмогорова в обозначениях Дж. Дуба [3] или Р. Л. Добрушина [2]: $\mathbf{M}(\xi \mid F)$ — означает условное математическое ожидание случайной величины ξ (имеющей конечное математическое ожидание) относительно σ — алгебры F.

Так, например, $\mathbf{D}\left(X_k^{(n)} \mid F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)}\right)$ будет означать условную дисперсию случайной величины $X_k^{(n)}$ относительно прямого произведения $F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)}$. Это будет $F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)}$ — измеримая функция, определенная на $\Omega_{k-1}^{(n)} \times \Omega_{k+1}^{(n)}$. Условную вероятность события A относительно F будем обозначать $\mathbf{P}\{A \mid F\}$. Положим $F_k^{(n)}\left(x \mid F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)}\right) = \mathbf{P}\left\{X_k^{(n)} < x \mid F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)}\right\}$.

Сформулируем основные теоремы:

Теорема 1. *Пусть равномерно по k и n ограниченные случайные величины $X_k^{(n)}$ принимают только целочисленные значения, причем*

$$\mathbf{D}X_k^{(n)} \geqslant \sigma > 0; \qquad k=1, \ldots, n. \tag{3}$$

Пусть

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} \ln^{-\frac{2}{3}} n \to \infty \qquad (n \to \infty),$$

где

$$\alpha^{(n)} = \min_{2 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k^{(n)}$$

и, кроме того,

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\ln n\left(\ln \frac{1}{\alpha^{(n)}} + \ln\ln n\right)} \sum_{k=2}^{n} \mathbf{M} \times$$

$$\times \left(\min_r \mathbf{P}\left\{X_k^{(n)} \not\equiv r \pmod q \mid F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)}\right\}\right) \to \infty \qquad (n \to \infty) \tag{4}$$

для всех $q \geqslant 2$.

Тогда в интервале $-\infty < m < +\infty$ *равномерно относительно* m *имеет место соотношение*

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\,P\{S_n=m\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-\mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}\right)^2}\to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{5}$$

Замечание. *Условие* (4) *можно заменить более общим условием: существует набор целых чисел*

$$1<\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_N<n, \tag{6}$$

удовлетворяющих условию

$$\left[\frac{\ln n}{\alpha^{(n)}}\right]\leqslant \nu_k-\nu_{k-1}\ll\left[\frac{\ln n}{\alpha^{(n)}}\right], \tag{7}$$

такой, что

$$\frac{1}{\left(\ln\ln n+\ln\frac{1}{\alpha^{(n)}}\right)}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{M}\left(\min_r \mathbf{P}\left\{X_{\nu_k}^{(n)}\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\,|\,F_{\nu_k-1}^{(n)}\times F_{\nu_k+1}^{(n)}\right\}\right)\to\infty,$$

когда $n\to\infty$.

В случае любых, не обязательно ограниченных слагаемых $X_k^{(n)}$ справедлива:

Теорема 2. *Пусть случайные величины* $X_k^{(n)}$ *принимают только целочисленные значения, причем дисперсии* $\mathbf{D}X_k^{(n)}$ *равномерно ограничены сверху и равномерно положительны снизу:*

$$0<\sigma\leqslant\mathbf{D}X_k^{(n)}<C<\infty;\qquad k=1,\ \ldots,\ n. \tag{8}$$

Кроме того, пусть равномерно по k

$$\frac{1}{\alpha^{(n)\,2}}\int\limits_{\left|x-\mathbf{M}X_k^{(n)}\right|\geqslant\varepsilon\left(\frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)}}{\ln n}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x-\mathbf{M}X_k^{(n)}\right)^2 dF_k^{(n)}x\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{9}$$

при любом $\varepsilon>0$ *и равномерно по* k и n

$$\frac{1}{\mathbf{MD}\left(X_k^{(n)}\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right)}\mathbf{M}\int\limits_{\left|x-\mathbf{M}\left(X_k^{(n)}\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right)\right|\geqslant b}\left(x-\mathbf{M}\left(X_k^{(n)}\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right)\right)^2\times$$

$$\times\, dF_k^{(n)}\left(x\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right)\to 0 \tag{10}$$

или

$$\frac{1}{\mathbf{MD}\left(X_k^{(n)}\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right)}\mathbf{M}\iint\limits_{|x-y|\geqslant b}(x-y)^2\,dF_k^{(n)}\left(x\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right)\times$$

$$\times\, dF_k^{(n)}\left(y\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right)\to 0, \tag{10a}$$

когда $b\to\infty$, *а также*

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\ln_{\bullet}^{2} n}\sum_{k=2}^{n}\mathbf{M}\left(\min_r\mathbf{P}\left\{X_k^{(n)}\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right\}\right)\to\infty \qquad (n\to\infty) \tag{11}$$

для всех $q\geqslant 2$.

Тогда равномерно по m *выполняется соотношение* (5).

Условие (10) имеет смысл, ибо доказывается, что

$$\mathbf{MD}\left(X_k^{(n)} \mid F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)}\right) \geqslant c_1 \alpha^{(n)2} > 0.$$

Как и в случае теоремы 1 можно сделать замечание относительно условия (11). А именно, его можно заменить условием

$$\frac{1}{\ln^2 n} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{M}\left(\min \mathbf{P}\left\{X_{\nu}^{(n)} \not\equiv r \pmod q \mid F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)}\right\}\right) \to \infty \qquad (n \to \infty). \tag{12}$$

когда $n \to \infty$, где числа ν_k определяются отношениями (6) и (7).

Как следствие из теоремы 2 получается

Теорема 3. *Пусть случайные величины $X_k^{(n)}$ принимают только целочисленные значения, причем выполняются условия* (8), (10) *и* (11). *Пусть, наконец, существуют равномерно по всем k и n ограниченные моменты*

$$\mathbf{M}\left|X_k^{(n)} - \mathbf{M}X_k^{(n)}\right|^{\gamma},$$

где наперед заданное $\gamma > 2$.

Тогда для выполнения соотношения (5) *достаточно, чтобы*

$$n\alpha^{(n)\frac{3\gamma-2}{\gamma-2}} \ln^{-2} n \to \infty \qquad (n \to \infty). \tag{13}$$

Интересно отметить один случай цепи Маркова со счетными множествами возможных состояний и коэффициентом эргодичности $\alpha^{(n)} \geqslant \alpha > 0$ при всех n. Пусть случайные величины $X_k^{(n)}$ таковы, что $X_k^{(n)}(\omega^j) = j$, $\omega^j \in \Omega_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n$. Положим

$$p_k^{(n)}(i, j) = P_k^{(n)}(\omega^i, \omega^j), \quad p_k^{(n)}(j) = \mathbf{P}\left\{X_k^{(n)} = j\right\}.$$

Введем следующие условия

$$\mathbf{D}\left(X_{k+1}^{(n)} \mid X_k^{(n)} = i_{k_0}\right) \geqslant \sigma > 0, \tag{14}$$

$$\sum_{|j - \mathbf{M}X_k^{(n)}| \geqslant b} \left(j - \mathbf{M}X_k^{(n)}\right) p_k^{(n)}(j) \to 0 \qquad (b \to \infty) \tag{15}$$

равномерно по всем k, $k = 1, \ldots, n$, и n. и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j} \min_{r} \sum_{\substack{m \\ m \not\equiv r \pmod q}} p_{k+1}^{(n)}(i_{k_0}, m)\, p_{k+2}^{(n)}(m, j) = \infty \tag{16}$$

для любого $q \geqslant 2$.

Здесь i_{k_0} означает то значение случайной величины $X_k^{(n)}$, вероятность которого $p_k^{(n)}(i_{k_0}) \geqslant c_2 > 0$; $k = 1, \ldots, n = 1, 2, \ldots$ Существование такого значения следует, как мы далее покажем, из условий (14) и (15).

Теорема 4. *Если при всех*

$$\alpha^{(n)} \geqslant \alpha > 0,$$

то условий (14) — (16) *достаточно для справедливости соотношения* (5).

Высше упомянутые результаты получаются во второй главе. Первая же глава в основном посвящена асимптотическому разложению характеристической функции $f_n(t)$. Здесь принципиальная трудность состоит в том, что цепь берется неоднородная. Получающиеся матрицы от переходных характеристических функций в случае конечного числа состояний и операторы, порожденные переходными характеристическими функциями, в случае произвольных множеств состояний не будут перестановочными и поэтому трудно применить спектральную теорию операторов. Мы получаем асимптотическое разложение прямым и довольно простым способом.

Теорема 5. *Пусть существуют равномерно по k и n ограниченные абсолютные моменты* $\mathbf{M}|X_k^{(n)}|^s < C$ $(s \geqslant 3)$.

Пусть $\|\lambda_k^{(n)}(\omega, \tilde{\omega}, \cdot)\|$ — *половина полной вариации обобщенной меры* $\lambda_k^{(n)}(\omega, \tilde{\omega}, .)$ *определенной на* σ — *алгебре* $\tilde{F}_k^{(n)} \times \tilde{F}_k^{(n)}$, *зависящей от параметров* $\omega \in \Omega_k^{(n)}$, $\tilde{\omega} \in \Omega_k^{(n)}$, k, n *и обладающей тем свойством, что каков бы ни был измеримый прямоугольник* $A \times B$,

$$\lambda_k^{(n)}(\omega, \tilde{\omega}, A \times B) = P_k^{(n)}(\omega, A)\, P_k^{(n)}(\tilde{\omega}, B) - P_k^{(n)}(\tilde{\omega}, A)\, P_k^{(n)}(\omega, B).$$

Положим

$$1 - \tilde{\alpha}_k^{(n)} = \sup_{\omega, \tilde{\omega}} \|\lambda_k^{(n)}(\omega, \tilde{\omega}\cdot)\|,$$

$$\tilde{\alpha}^{(n)} = \min_{2 \leqslant k \leqslant n} \tilde{\alpha}_k^{(n)}.^*$$

Пусть, кроме того,

$$\rho(n) = \tilde{\alpha}^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{7}} n (\ln \ln n)^{-\frac{1}{7}} \to \infty \qquad (n \to \infty) \tag{17}$$

и

$$\mathbf{D} X_k^{(n)} \geqslant \sigma > 0 \tag{18}$$

по всем k и n.

Тогда при

$$|t| \leqslant \psi(n) \sqrt{\ln n}; \quad \psi(n) = \min\left(\rho(n), \ \ln \ln n\right)$$

имеет место соотношение

$$f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2} + i\frac{\mathbf{M} S_n}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}} t}\left(1 + \sum_{k=1}^{s-3} P_{nk}(it)\left(\frac{\ln^2 n}{r_n}\right)^k\right) +$$

$$+ \Theta \cdot \left(\frac{\ln^2 n}{r_n}\right)^{s-2}\left(|t|^s + |t|^{3(s-2)} + |t|^{3(s-2)} e^{o\left(t^2 \frac{\psi(n)}{\sqrt{\ln \ln n}}\right)}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} +$$

$$+ O\left(|t| \frac{\psi_{(n)}^{8s+1} \ln^{\frac{7}{2}s + \frac{1}{2}} n}{(\sqrt{\mathbf{D} S_n}\, \alpha^{(n)\,2})^{s-1} \alpha^{(n)\,3} \sqrt{\mathbf{D} S_n}}\right), \tag{20}$$

где $P_{nk}(it)$ — многочлен степени не высше $3k$. Коэффициенты многочлена ограничены по n. Здесь

$$\frac{1}{r_n} = \frac{n}{(\sqrt{\mathbf{D} S_n})^3 \tilde{\alpha}^{(n)\,3}} \ll \frac{1}{\sqrt{n}\, \tilde{\alpha}^{(n)\, \frac{7}{2}}} = 0\left(\ln^{-\frac{5}{2}} n (\ln \ln n)^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{21}$$

---

* Во всех теоремах в место $\tilde{\alpha}^{(n)}$ можно положить $\alpha^{(n)}$, если оценку из леммы 5 заменить оценкой

$$\sup_{x, y} \|\nu_{kl}(t, x, y, \cdot)\| \leqslant \exp\{-c\alpha^{(n)}(l-k)\},$$

справедливой для $|X_k^{(n)}| \leqslant C_n$; $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$C_n = \alpha^{(n)\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} \psi^{-\frac{1}{2}}(n) \ln^{-1} n; \quad \psi(n) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

в интервале $|t| \leqslant \psi(n) \ln^{\frac{1}{2}} n (\mathbf{D} S_n)^{-\frac{1}{2}}$.

Θ *зависит от s и n, но ограничено по n, точнее*

$$\Theta \ll \max\left(|\lambda_3^{(n)}|, \ \ldots, \ |\lambda_{s-1}^{(n)}|, \ L^{(n)}\right),$$

где

$$\lambda_{k+2}^{(n)} = \frac{\varkappa_{k+2}^{(n)} (\mathbf{D}S_n)^{k-1} \tilde{\alpha}^{(n)\,2k}}{n^k \ln^{2k} n} \ll \left(\frac{\mathbf{D}S_n \tilde{\alpha}^{(n)}}{n \ln n}\right)^{k-1}; \qquad k = 1, \ \ldots, \ s-3,$$

$$L^{(n)} = \left(\frac{\mathbf{D}S_n \tilde{\alpha}^{(n)}}{n \ln n}\right)^{s-3},$$

$\varkappa_k^{(n)}$ — *k-й семиинвариант суммы S_n,*

$$n\alpha^{(n)} \ll \mathbf{D}S_n \ll \frac{n}{\alpha^{(n)}}.$$

Теорема 6. *Если с вероятностью 1 случайные величины $\mathbf{M}\left(|X_k^{(n)}|^s \,|\, F_{k-1}^{(n)}\right)$ и $\mathbf{M}|X_1^{(n)}|^s$ $(s \geqslant 3)$ равномерно ограничены по $k > 1$ и n, то в условиях теоремы* 5 *имеет место соотношение*

$$f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{s-3} P_{nk}(it) \frac{1}{r_n^k}\right) +$$

$$+ \Theta_1 \frac{1}{r_n^{s-2}} \left(|t|^s + |t|^{3(s-2)} + |t|^{3(s-2)} e^{o\left(t^2 \frac{\psi(n)}{\sqrt{\ln \ln n}}\right)}\right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где

$$\frac{1}{r_n} = \frac{n}{(\sqrt{\mathbf{D}S_n})^3 \tilde{\alpha}^{(n)\,2}},$$

$$\Theta_1 \ll \max\left(|\lambda_3^{(n)}|, \ \ldots, \ |\lambda_{s-1}^{(n)}|, \ L^{(n)}\right),$$

а величины

$$\lambda_{k+2}^{(n)} = \frac{\varkappa_{k+2}^{(n)} (\mathbf{D}S_n)^{k-1} \tilde{\alpha}^{(n)\,2k}}{n^k}; \qquad k = 1, \ \ldots, \ s-3,$$

$$L^{(n)} \ll \left(\frac{\mathbf{D}S_n \tilde{\alpha}^{(n)}}{n}\right)^{s-3}$$

ограничены по n.

Пользуясь теоремами 5-6 можно получить уточнение локальных предельных теорем для решетчатых распределений.

Теорема 7. *Пусть случайные величины $X_k^{(n)}$, принимающие только целочисленные значения, имеют равномерно по k и n ограниченные обсолютные моменты до порядка s $(s \geqslant 3)$ включительно.*

Пусть, кроме того, выполняются условия (8), (10), (11) *и*

$$\tilde{\alpha}^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{7}} n (\ln \ln n)^{-\frac{1}{7}} \to \infty \qquad (n \to \infty). \tag{22}$$

Тогда имеет место разложение

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\, \mathbf{P}\{S_n = m\} = g(x_{nm}) + \sum_{k=1}^{s-3} \left(\frac{\ln^3 n}{r_n}\right)^k P_{nk}\left(-\frac{d}{dx_{nm}}\right) g(x_{nm}) +$$

$$+ O\left(\Theta\left(\frac{\ln^3 n}{r_n}\right)^{s-2} + \frac{\ln^{\frac{7}{2}s + \frac{3}{2}} n \ln \ln n}{(\sqrt{\mathbf{D}S_n}\, \alpha^{(n)\,2})^{s-1} \alpha^{(n)} \sqrt{\mathbf{D}S_n}}\right). \tag{23}$$

Здесь $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x_{nm}=\frac{m-\mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}$, $P_{nk}\left(-\frac{d}{dx}\right)g(x)$ *означает, что в многочлене* $P_{nk}(it)$ *из теоремы* 5 *степени* $(it)^k$ *заменяются выражениями* $(-1)^k\frac{d^{(k)}}{dx^k}g(x)$.

Теорема 8. *Если случайные величины*

$$\mathbf{M}\left(|X_k^{(n)}|^s\,|\,F_{k-1}^{(n)}\right),\quad k=2,\ \dots,\ n,\quad и\quad \mathbf{M}\left(|X_1^{(n)}|^s\right)\qquad (s\geqslant 3)$$

с вероятностью 1 *равномерно ограничены относительно* k *и* n, *то при условиях* (8), (10), (11), (22) *имеет место разложение*

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\,\mathbf{P}\{S_n=m\}=g(x_{nm})+\sum_{k=1}^{s-3}\left(\frac{1}{r_n}\right)^k\cdot$$
$$P_{nk}\left(-\frac{d}{dx_{nm}}\right)g(x_{nm})+O\left(\frac{1}{r_n^{s-2}}\right),\tag{24}$$

где многочлены $P_{nk}(it)$ *определены теоремой* 6.

Здесь, в обеих теоремах, не указано явных выражений для $P_{nk}(it)$. Их можно найти в доказательствах теорем 5 и 6.

До сих пор в теоремах 1-4, 7-8 мы рассматривали только решетчатые распределения. Теперь докажем некоторые теоремы для плотностей.

Теорема 9. *Пусть для последовательности* $X_1^{(n)},\ \dots,\ X_n^{(n)}$ *выполнены условия* (8) — (10).

Пусть, кроме того, существует набор индексов

$$1<\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_N<n,\tag{25}$$

такой, что

$$\frac{\alpha^{(n)}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant N-1}(\nu_{k+1}-\nu_k)}{\ln n}\to\infty\qquad(n\to\infty)$$

и

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\int\limits_{|\ |>\varepsilon}\prod_{k=1}^{N}\mathbf{M}\left|f\left(t,\ X_{\nu_k}^{(n)}\,\middle|\,F_{\nu_k-1}^{(n)}\times F_{\nu_k+1}^{(n)}\right)\right|dt\to 0\qquad(n\to\infty)\tag{26}$$

для любого $\varepsilon>0$.

Тогда при достаточно большом n *существует плотность* $p_n(x)$ *случайной величины* $\frac{S_n-\mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}$ *и*

$$\sup_x\left|p_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right|\to 0\qquad(n\to\infty).\tag{27}$$

Теорема 10. *Если выполнены условия* (8), (9) *и среди величин* $X_{\nu_1}^{(n)},\ \dots,\ X_{\nu_N}^{(n)}$, *где* ν_k *определены в теореме* 9, *можно найти величины* $X_{\nu_{k_1}}^{(n)},\ \dots,\ X_{\nu_{k_{n^*}}}^{(n)}$, *такие, что при некоторых положительных постоянных* B, R *и* α

$$\mathbf{M}\left|f\left(t,\ X_{\nu_{k_i}}^{(n)}\,\middle|\,F_{\nu_{k_i}-1}^{(n)}\times F_{\nu_{k_i}+1}^{(n)}\right)\right|\leqslant\frac{B}{|t|^{\alpha}};\tag{28}$$

$$i=1,\ \dots,\ n^*;\quad n^*\gg o\left(\frac{n\alpha^{(n)3}}{\ln n}\right),\qquad |t|\geqslant R,\tag{29}$$

тогда существует плотность $p_n(x)$, *удовлетворяющая соотношение* (27).

Теорема 11. *Пусть случайные величины $X_k^{(n)}$ имеют равномерно по k и n ограниченные обсолютные моменты до порядка $s\,(s \geqslant 3)$ включительно. Пусть выполняются условия* (8), (10) *и* (28) *или*

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n} \int\limits_{|t|>\varepsilon} \prod_{k=1}^{N} \mathbf{M} \left| f\left(t,\ X_{\nu_k}^{(n)} \middle| F_{\nu_k-1}^{(n)} \times F_{\nu_k+1}^{(n)}\right) \right| dt \ll$$

$$\ll \Theta \left(\frac{\ln^2 n}{r_n} \right)^{s-2} + \frac{\ln n^{\frac{7}{2}s+\frac{3}{2}} \ln \ln n}{\left(\sqrt{\mathbf{D}S_n}\, \alpha^{(n)\,2}\right)^{s-1} \alpha^{(n)\,2} \sqrt{\mathbf{D}S_n}} \tag{30}$$

для любого $\varepsilon > 0$, где набор ν_k определяется соотношением (25).

Пусть, кроме того, имеет место (22).

Тогда при достаточно больших n существует плотность $p_n(x)$ и

$$p_n(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{s-3} \left(\frac{\ln^2 n}{r_n} \right)^k P_{nk}\left(-\frac{d}{dx} \right) g(x) +$$

$$+ O\left(\Theta \left(\frac{\ln^2 n}{r_n} \right)^{s-2} + \frac{\ln n^{\frac{7}{2}s+\frac{3}{2}} \ln \ln n}{\left(\sqrt{\mathbf{D}S_n}\, \alpha^{(n)\,2}\right)^{s-1} \alpha^{(n)\,2} \sqrt{\mathbf{D}S_n}} \right), \tag{31}$$

где все элементы соотношения (31) *определены в теореме* 7.

Во всех трех главах мы будем предполагать, что $\mathbf{M} X_k^{(n)} = 0$, $k = 1, \ldots, n$, если только последнее не нарушает общности.

В четвертой главе изучается многомерная локальная теорема для числа попаданий в состояния системы в случае конечного числа состояний. Этому вопросу были посвящены работы А. Н. Колмогорова [4], Ю. В. Линника [1], С. Х. Сираждинова [5]. А. Н. Колмогоровым получены исчерпывающие результаты в случае однородной цепи $\left(p_k(i, j) = p(i, j)\right)$. Для неоднородных цепей локальная предельная теорема для распределении числа попаданий в состояния была доказана Ю. В. Линником [1], но при дополнительном условии о существовании „однотипных путей".

Целью четвертой главы является получение для цепи типа Деблина результатов, аналогичных результатам для однородных цепей Маркова. И так изучается неоднородная цепь Маркова с конечным числом $s > 1$ возможных состояний $e_1, \ldots, e_s$ в любой момент времени и вероятностями перехода $p_k(\alpha, \beta)$ из состояния e_α в $(k-1)$-м шагу в состояние e_β в k-м шагу.

Пусть соблюдено условие (A): $p_l(\alpha, \beta) \geqslant \lambda p_k(\alpha, \beta)$ *для любых* α, β, k, l, *где постоянная* $\lambda > 0$.

Пусть в дальнейшем состояния $e_1, \ldots, e_s$ — единичные векторы s-мерного векторного координатного пространства:

$$e_1 = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_s = (0,\ 0,\ \ldots,\ 1).$$

По аналогии с терминологией А. Н. Колмогорова, всякий вектор

$$z = e_{\alpha_1} + e_{\alpha_2} + \ldots + e_{\alpha_n}$$

будем называть циклическим, если существуют положительные вероятности перехода

$$p_1(\alpha_1, \alpha_2), \; p_1(\alpha_2, \alpha_3), \; \ldots, \; p_1(\alpha_n, \alpha_1).$$

Множество всех векторов m вида

$$m = l_1 z_1 + l_2 z_2 + \ldots + l_\nu z_\nu,$$

где $l_1, l_2, \ldots l_\nu, \nu$ — любые целые, $\nu > 0$, называется основной решеткой Z.

В силу условия (A) имеют смысл следующие условия: (B). *Состояния $e_1, \ldots, e_s$ образуют один существенный класс в смысле А. Н. Колмогорова* (6). (C). *Основная решетка Z совпадает с множеством всех целочисленных векторов s — мерного векторного координатного пространства.*

В этом случае говорится, что ранг марковского процесса (или цепи Маркова) *r равен s.*

Пусть случайная величина ζ_n^α означает число попаданий в состояние e_α за первые n шагов. Тогда для вероятности $P_\gamma(m)$ случайному вектору

$$\zeta_n = \left(\zeta_n^{(1)}, \ldots, \zeta_n^{(s)}\right)$$

принять значение $m = (m_1, \ldots, m_s)$ при условии, что e_γ есть начальное состояние, справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть соблюдены. условия* (A), (B), (C).

Тогда для любого γ и целого $k > 0$ равномерно по всем $(m_1, \ldots, m_s)$ будет

$$\sqrt{D_n^{(1)} \ldots D_n^{(s-1)}}\, P_\gamma(m) = g_{s-1}(x) + \sum_{j=1}^{k} n^{-\frac{j}{2}} P_{\gamma j}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) g_{s-1}(x) + + O\left(\frac{1}{n^{\frac{k+1}{2}}}\right). \tag{32}$$

Здесь

$$g_{s-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{s-1}\Delta_n}} \exp\left(-\frac{1}{2} Q_n^{-1}(x)\right) -$$

плотность $s-1$ — мерного нормального распределения

$$x = \left(\frac{m_1 - M_n^{(1)}}{\sqrt{D_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{m_{s-1} - M_n^{s-1}}{\sqrt{D_n^{s-1}}}\right);$$

$$M_n^{(\alpha)} = \mathbf{M}\zeta_n^{(\alpha)} \asymp n, \quad D_n^{(\alpha)} = \mathbf{D}\zeta_n^{(\alpha)} \asymp n, \qquad \alpha = 1, \ldots, s,$$

квадратичная форма $Q_n(x) = Q_n(x_1, \ldots, x_{s-1})$ положительно определенная, Δ_n — определитель этой формы. $P_{\gamma j}(it)$ является многочленом степени не выше $3j$ от компонент вектора $it = (it_1, it_2, \ldots, it_{s-1})$. Коэффициенты многочлена действительны, зависят от γ и n, но равномерно ограничены по всем n. $P_{\gamma j}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) g_{s-1}(x)$ означает, что вместо степеней — it_α берутся производные от $g_{s-1}(x)$ по соответствующей компоненте x_α.

Если условие (C) *нарушено, но $r > 1$, то в равенстве* (32) *s следует заменить на r.*

Некоторые из выше изложеных теорем можно найти в заметках [7]-[9].

ГЛАВА I

ПЕРЕХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Определение и общие свойства

Пусть задана переходная вероятностная функция $P(\omega, A)$ с областью определения $(\Omega, F, \bar{\Omega}, \bar{F})$ и измеримая функция $X(\omega)$ на Ω. Тогда функцию

$$f(t, \omega, A)=\int\limits_A e^{itX(\bar{\omega})}P(\omega, d\bar{\omega}), \qquad A\in\bar{F}$$

будем называть переходной характеристической функцией случайной величины X.

Очевидно, что функция $f(t, \omega, A)$ является:

1. Равномерно непрерывной на всей прямой функцией t при фиксированных ω и A;

2. σ — аддитивной функцией множества (комплексной обобщенной мерой (см. [10]), определенной на σ — алгебре $\bar{F}$ при фиксированных t и ω;

3. F — измеримой функцией от ω при фиксированных t и $A\in\bar{F}$;

4. Условной характеристической функцией случайной величины X при $A=\bar{\Omega}$;

5. Переходной вероятностной функцией $P(\omega, A)$ при $t=0$.

Пусть имеется последовательность $X_1, \ldots, X_n$ случайных величин X_k, связанных в цепь Маркова с областью определения $\{\Omega_{k-1}, \tilde{F}_{k-1}, \Omega_k, \tilde{F}_k\}$, вероятностной функцией перехода $P_k(\omega, A)$, где $\omega\in\Omega_{k-1}$, $A\in\tilde{F}_k$; $k=1, 2, \ldots, n$ и начальным распределением вероятностей $P_k(A)$, $A\in\tilde{F}_1$. Тогда характеристическую переходную функцию случайной величины X_k обозначим $f_k(t, \omega, A)$, т. е.

$$f_k(t, \omega, A)=\int\limits_A e^{itX_k(\tilde{\omega})}P_k(\omega, d\tilde{\omega}), \qquad A\in\tilde{F}_k.$$

Переходную характеристическую функцию суммы

$$X_{k+1}+\ldots+X_l$$

обозначим через $f_{kl}(t, \omega, A)$, т. е.

$$f_{kl}(t, \omega, A)=$$
$$=\int\limits_{\Omega_{k+1}}\int\limits_{\Omega_{k+2}}\cdots\int\limits_{\Omega_{l-1}}\int\limits_A e^{it\left(X_{k+1}(\omega_{k+1})+\ldots+X_l(\omega_l)\right)}P_{k+1}(\omega, d\omega_{k+1})\times$$
$$\times P_{k+2}(\omega_{k+1}, d\omega_{k+2})\ldots P_{l-1}(\omega_{l-2}, d\omega_{l-1})P_l(\omega_{l-1}, d\omega_l). \qquad (1.1)$$

Отсюда следует основное равенство

$$f_{kl}(t,\ \omega,\ A)=\int\limits_{\Omega_s} f_{sl}(t,\ \tilde{\omega},\ A) f_{ks}(t,\ \omega,\ d\tilde{\omega}), \tag{1.1a}$$

где $k<s<l$ и интеграл берется по обобщенной мере $f_{ks}(t,\ \omega,\ \cdot)$. Если обозначить

$$f_1(t,\ A)=\int\limits_A e^{itX_1(\omega)} P_1(d\omega),$$

где $P_1(A)$ — начальное распределение вероятностей, $A\in\tilde{B}_1$, то аналогично функциям $f_{kl}(t,\ \omega,\ A)$ можно вести априорные характеристические функции равенством

$$f_{0l}(t,\ A)=\int\limits_{\Omega_1} f_{1l}(t,\ \omega,\ A) f_1(t,\ d\omega). \tag{1.2}$$

Лемма 1. *Если $f_n(t)$ — характеристическая функция суммы*

$$S_n=X_1+\ldots+X_n,$$

т. е.

$$f_n(t)=\mathbf{M}e^{itS_n},$$

то

$$f_n(t)=f_{0n}(t,\ \Omega).$$

Утверждение следует из (1.2).

Пусть $f(t,\ \omega,\ \bar{A})$ переходная характеристическая функция случайной величины $X(\omega)$ с областью определения $(\Omega,\ F,\ \bar{\Omega},\ \bar{F})$ и M_Ω — линейное пространство обобщенных комплексных мер, заданных на F.

Рассмотрим линейный оператор U_t,

$$(U_t\mu)(\bar{A})=\int\limits_\Omega f(t,\ \omega,\ \bar{A})\,\mu(d\omega)$$

отображающий M_Ω на линейное пространство $M_{t,\bar{\Omega}}$ обобщенных комплексных мер, заданных на $\bar{F}$ и зависящих от параметра t.

Норму обобщенной комплексной меры μ определим следующим способом (см. [10]):

$$\|\mu\|=\sup_{|\varphi|\leqslant 1}\left|\int\limits_\Omega \varphi(\omega)\,\mu(d\omega)\right|=\mathrm{Var}\,|\mu|,$$

где верхняя грань берется по всевозможным F — измеримым комплексным функциям φ с $|\varphi(\omega)|\leqslant 1$.

Тогда для нормы $N(U_t)$ оператора U_t,

$$N(U_t)=\sup_\mu \frac{\|U_t\mu\|}{\|\mu\|}$$

справедлива следующая

Лемма 2. *Имеет место соотношение*

$$N(U_t)=\sup_\omega \|f(t,\ \omega,\ \cdot)\|.$$

Доказательство. Имеем

$$\| U_t\mu \| = \sup_{|\psi_t|\leqslant 1} \left| \int_{\bar\Omega} \psi_t(\bar\omega)\,(U_t\mu)(d\bar\omega) \right| =$$

$$= \sup_{|\psi_t|\leqslant 1} \left| \int_{\Omega} \int_{\bar\Omega} \psi_t(\bar\omega) f(t,\ \omega,\ d\bar\omega)\,\mu(d\omega) \right|.$$

Положим.

$$\varphi_t(\omega) = \frac{\int_{\bar\Omega} \psi_t(\bar\omega) f(t,\ \omega,\ d\bar\omega)}{\sup\limits_{\omega} \left| \int_{\bar\Omega} \psi_t(\bar\omega) f(t,\ \omega,\ d\bar\omega) \right|};$$

Очевидно, что $\varphi_t(\omega)$ есть F — измеримая и $|\varphi_t(\omega)| \leqslant 1$. Отсюда

$$\| U_t\mu \| = \sup_{|\psi_t|\leqslant 1} \sup_{\omega} \left| \int_{\bar\Omega} \psi_t(\bar\omega) f(t,\ \omega,\ d\bar\omega) \right| \cdot$$

$$\cdot \left| \int_{\Omega} \varphi_t(\omega)\,\mu(t,\ d\omega) \right| \leqslant \sup_{|\psi_t|\leqslant 1,\ \omega\in\Omega} \left| \int_{\bar\Omega} \psi_t(\bar\omega) f(t,\ \omega,\ d\bar\omega) \right| \cdot \|\mu\|.$$

Следовательно, получаем, что норма $N(U_t)$ удовлетворяет неравенство

$$N(U_t) \leqslant \sup_{\omega} \| f(t,\ \omega,\ \cdot) \|. \tag{1.3}$$

С другой стороны, возьмем за μ вероятностную меру, сосредоточенную в точке ω. Тогда $\|\mu\| = 1$ и

$$U_t\mu = f(t,\ \omega,\ \cdot).$$

Отсюда

$$\| U_t\mu \| = \| f(t,\ \omega,\ \cdot) \|$$

и

$$N(U_t) \geqslant \| f(t,\ \omega,\ \cdot) \|$$

для любого ω, т. е.

$$N(U_t) \geqslant \sup_{\omega} \| f(t,\ \omega,\ \cdot) \|. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует справедливость леммы.

Лемма 3. *Если $k < s < l$, то*

$$U_t^{(k,l)} = U_t^{(k,s)} \cdot U_t^{(s,l)},$$

где

$$U_t^{(i,j)}\mu = \int_{\Omega_i} f_{ij}(t,\ \omega,\ \cdot)\,\mu(d\omega).$$

Доказательство. Имеем

$$U_t^{(s,l)}\,U_t^{(k,s)}\mu = \int_{\Omega_s} \int_{\Omega_k} f_{ks}(t,\ \omega_k,\ d\omega_s) f_{sl}(t,\ \omega_s,\ \cdot)\,\mu(d\omega_k) =$$

$$= \int_{\Omega_k} \left(\int_{\Omega_s} f_{sl}(t,\ \omega_s,\ \cdot) f_{ks}(t,\ \omega_k,\ d\omega_s) \right) \mu(d\omega_k) =$$

$$= \int_{\Omega_k} f_{kl}(t,\ \omega_k,\ \cdot)\,\mu(d\omega) = U_t^{(k,l)}\mu.$$

Этим лемма доказана. Из ее следует, что и

$$N\left(U_t^{(k,l)}\right) \leqslant N\left(U_t^{(k,s)}\right) N\left(U_t^{(s,l)}\right),$$

а если $l_0 = 0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_{N-1} < l_N = n$, $l_{i+1} - l_i \geqslant 2$, разбиение целыми точками промежутка $[0, n]$, то

$$N\left(U_t^{(0,n)}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{N} N\left(U_t^{l_{k-1}, l_k}\right). \tag{1.5}$$

Лемма 4. *Имеет место соотношение*

$$\|f_{on}(t, \cdot)\| \leqslant N\left(U_t^{(k,n)}\right) \|f_{ok}(t, \cdot)\|, \qquad 1 \leqslant k < n.$$

Доказательство. Имеем

$$N\left(U_t^{(k,n)}\right) = \sup_{\mu} \frac{\|U_t^{(k,n)} \mu\|}{\|\mu\|}.$$

Пусть

$$\mu(\cdot) = f_{ok}(t, \cdot).$$

Тогда

$$U_t^{(k,n)} f_{0k}(t, \cdot) = \int_{\Omega_k} f_{kn}(t, \omega, \cdot) f_{0k}(t, d\omega) = f_{0n}(t, \cdot).$$

Отсюда и следует лемма.

2. Эргодичность переходных характеристических функций

На σ — алгебре $\tilde{F}_l \times \tilde{F}_l$ рассмотрим обобщенную комплексную меру $\nu_{kl}(t, x, y, \cdot)$, зависящую от параметров $t, k, l (1 \leqslant k < l \leqslant n)$, $x \in \Omega_k$, $y \in \Omega_k$ и обладающую тем свойством, что для любого измеримого прямоугольника $A \times B$, $A \in \tilde{F}_l$, $B \in \tilde{F}_l$

$$\nu_{kl}(t, x, y, A \times B) = f_{kl}(t, x, A) f_{kl}(t, y, B) - f_{kl}(t, y, A) f_{kl}(t, x, B).$$

Этим мера $\nu_{kl}(t, x, y, \cdot)$ определяется однозначно. Ее норму, при фиксированных $x \in \Omega_k$ и $y \in \Omega_k$, определим равенством

$$\|\nu_{kl}(t, x, y, \cdot)\| = \frac{1}{2} \sup_{|\varphi_t| \leqslant 1} \left| \int_{\Omega_l} \int_{\Omega_l} \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}) \nu_{kl}(t, x, y, d\omega, d\tilde{\omega}) \right|, \tag{2.1}$$

где верхняя грань берется по всем $\tilde{F}_l \times \tilde{F}_l$, измеримым, при каждом фиксированном t, комплексным функциям φ_t, определенным на $\Omega_l \times \Omega_l$ с $|\varphi_t(\omega, \tilde{\omega})| \leqslant 1$.

Лемма 5. *Для любых значений параметра t справедлива оценка*

$$\sup_{x, y} \|\nu_{kl}(t, x, y, \cdot)\| \leqslant \prod_{j=k+1}^{l} (1 - \tilde{\alpha}_j); \qquad 1 \leqslant k < l \leqslant n,$$

где $\tilde{\alpha}_j$ определено в теореме 5.

Доказательство. Имеем для $1 \leqslant k < s < l \leqslant n$

$$\nu_{kl}(t,\ x,\ y,\ A\times B)=\int\limits_{\Omega_s}\int\limits_{\Omega_s} f_{sl}(t,\ \omega,\ A) f_{ks}(t,\ x,\ d\omega) f_{sl}(t,\ \tilde\omega,\ B) f_{ks}(t,\ y,\ d\tilde\omega)-$$

$$-\int\limits_{\Omega_s}\int\limits_{\Omega_s} f_{sl}(t,\ \omega,\ A) f_{ks}(t,\ y,\ d\omega) f_{sl}(t,\ \tilde\omega,\ B) f_{ks}(t,\ x,\ d\tilde\omega)=$$

$$=\int\limits_{\Omega_s}\int\limits_{\Omega_s} f_{kl}(t,\ \omega,\ A) f_{sl}(t,\ \omega,\ B)\,\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\ d\omega,\ d\omega).$$

Поэтому, принимая во внимание (1.2) и (2.1), при $s=l-1$ получаем

$$\|\nu_{kl}(t,\ x,\ y,\ \cdot)\|=\frac{1}{2}\sup_{|\varphi_t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{\Omega_l}\int\limits_{\Omega_l}\varphi_t(u,\ v)\,\nu_{kl}(t,\ x,\ y,\ du,\ dv)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sup_{|\varphi_t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{\Omega_l}\int\limits_{\Omega_l}\int\limits_{\Omega_{l-1}}\int\limits_{\Omega_{l-1}}\varphi_t(u,\ v)\,e^{it\left(X_l(u)+X_l(v)\right)}\times\right.$$

$$\times P_l(\omega,\ du)\,P_l(\tilde\omega,\ dv)\,\nu_{k,\,l-1}(t,\ x,\ y,\ d\omega,\ d\tilde\omega). \tag{2.2}$$

Из определения следует, что

$$\nu_{k,\,l-1}(t,\ x,\ y,\ A\times B)=-\nu_{k,\,l-1}(t,\ x,\ y,\ B\times A). \tag{2.3}$$

Пространство $\Omega_{l-1}\times\Omega_{l-1}$ всегда можно разбить на непересекающиеся измеримые множества E, G и H так, что $\nu_{k,\,l-1}(t,\ x,\ y,\ A,\ B)=0$, если $A\times B\in G$; $A\in\tilde F_{l-1}$, $B\in\tilde F_{l-1}$ и из $(\omega,\ \tilde\omega)\in E$ следует, что $(\tilde\omega,\ \omega)\in H$. Тогда $\Omega_{l-1}\times\Omega_{l-1}=$ $=E+G+H$. Учитывая (2.3), получаем

$$\int\limits_{\Omega_{l-1}}\int\limits_{\Omega_{l-1}}\Big(\nu_{k,\,l-1}(t,\ x,\ d\omega,\ d\tilde\omega)\,P_l(\omega,\ A)\,P_l(\tilde\omega,\ B)\Big)=$$

$$=\int\limits_{E}\Big(\nu_{k,\,l-1}(t,\ x,\ d\omega,\ d\tilde\omega)\,P_l(\omega,\ A)\,P_l(\tilde\omega,\ B)\Big)-$$

$$-\int\limits_{E}\Big(\nu_{k,\,l-1}(t,\ x,\ d\omega,\ d\tilde\omega)\,P_l(\tilde\omega,\ A)\,P_l(\omega,\ B)\Big)=$$

$$=\int\Big(P_l(\omega,\ A)\,P_l(\tilde\omega,\ B)-P_l(\tilde\omega,\ A)\,P_l(\omega,\ B)\Big)\nu_{k,\,l-1}(t,\ x,\ d\omega,\ d\tilde\omega). \tag{2.4}$$

Положим

$$\beta_l(t)=\frac{1}{2}\sup_{\varphi_t(u,\,v),\,\omega,\,\tilde\omega}\left|\int\limits_{\Omega_l}\int\limits_{\Omega_l}\varphi_t(u,\ v)\,e^{it\left(X_l(u)+X_l(v)\right)}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\Big(P_l(\omega,\ du)\,P_l(\tilde\omega,dv)-P_l(\tilde\omega,\ du)\,P_l(\omega,\ dv)\Big)\right|.$$

Подставляя (2.4) в (2.2) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\| \nu_{kl}(t, x, y, \cdot) \| = \frac{1}{2} \sup_{\varphi_t} \left| \int_E \Big(\int_{\Omega_l} \int_{\Omega_l} \varphi_t(u, v) e^{it\left(X_l(u)+X_l(v)\right)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \Big(P_l(\omega, du) P_l(\tilde{\omega}, dv) - P_l(\tilde{\omega}, du) P_l(\omega, dv)\Big)\Big) \nu_{k, l-1}(t, x, y, d\omega, d\tilde{\omega}) \right|.$$

Пусть

$$\psi_t(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{1}{\beta_l(t, \varphi_l)} \int_{\Omega_l} \int_{\Omega_l} \varphi_t(u, v) e^{it\left(X_l(u)+X_l(v)\right)} \times$$

$$\times \Big(P_l(\omega, du) P_l(\tilde{\omega}, dv) - P_l(\tilde{\omega}, du) P_l(\omega, dv)\Big),$$

где

$$\beta_l(t, \varphi_t) = \sup_{\omega, \tilde{\omega}} \left| \int_{\Omega_l} \int_{\Omega_l} \varphi(u, v) e^{it\left(X_l(u)+X_l(v)\right)} \times \right.$$

$$\left. \times \Big(P_l(\omega, du) P_l(\tilde{\omega}, dv) - P_l(\tilde{\omega}, du) P_l(\omega, dv)\Big) \right|. \tag{2.5}$$

Тогда

$$\| \nu_{kl}(t, x, y, \cdot) \| = \frac{1}{2} \sup_{|\varphi_t| \leqslant 1} \beta_l(t, \varphi_t) \left| \int_E \int \psi_t(\omega, \tilde{\omega}) \nu_{k, l-1}(t, x, y, d\omega, d\tilde{\omega}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sup_{|\varphi_t| \leqslant 1} \beta_l(t, \varphi_t) \| \nu_{k, l-1}(t, x, y, \cdot) \|, \tag{2.6}$$

так как $\psi_t(\omega, \tilde{\omega})$ измеримая с $|\psi_t(\omega, \tilde{\omega})| \leqslant 1$,

$$\int_E \nu_{k, l-1}(t, x, y, d\omega, d\tilde{\omega}) = - \int_{H+G} \nu_{k, l-1}(t, x, y, d\omega, d\tilde{\omega})$$

и

$$E + G + H = \Omega_{l-1} \times \Omega_{l-1}.$$

Оценим

$$\beta_l(t) = \frac{1}{2} \sup_{|\varphi_t| \leqslant 1} \beta_l(t, \varphi_t). \tag{2.7}$$

Из (2.5) следует, что

$$\beta_l(t) \leqslant \frac{1}{2} \sup_{|\bar{\varphi}_t| \leqslant 1, \omega, \tilde{\omega}} \left| \int_{\Omega_l} \int_{\Omega_l} \varphi_t(u, v) \Big(P_l(\omega, du) P_l(\tilde{\omega}, dv) - \right.$$

$$\left. - P_l(\omega, du) P_l(\omega, dv)\Big) \right|. \tag{2.8}$$

Здесь $\bar{\varphi}_t(u, v)$ действительная $\tilde{F}_l \times \tilde{F}_l$ — измеримая функция с $|\bar{\varphi}_t(u, v)| \leqslant 1$. Правая часть неравенства (2.8) представляет

$$\sup_{\omega, \tilde{\omega}} \| \lambda_l(\omega, \tilde{\omega}, \cdot) \| = 1 - \tilde{\alpha}_l, \tag{2.9}$$

где $\lambda_l(\omega, \tilde{\omega}, \cdot)$ определено в теореме 5.

В силу соотношения

$$P_l(\omega, A) - P_l(\tilde{\omega}, A) = \int_{\Omega_l} \Big(P_l(\omega, A) P_l(\tilde{\omega}, du) - P_l(\tilde{\omega}, A) P_l(\omega, du)\Big)$$

получаем

$$\| P_l(\omega, \cdot) - P_l(\tilde{\omega}, \cdot) \| \leqslant \| \lambda_l(\omega, \tilde{\omega}, \cdot) \|.$$

Обратим внимание на то, что

$$\| P_l(\omega, \cdot) - P_l(\tilde{\omega}, \cdot) \| = \sup_{A \in F_l} | P_l(\omega, A) - P_l(\tilde{\omega}, A) |.$$

Следовательно,

$$\sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} | P_l(\omega, A) - P_l(\tilde{\omega}, A) | \leqslant \sup_{\omega, \tilde{\omega}} \| \lambda_l(\omega, \tilde{\omega}, \cdot) \|. \tag{2.10}$$

Тогда из (2.10) и (2.9) следует, что

$$\alpha_l \geqslant \tilde{\alpha}_l,$$

где

$$\alpha_l = 1 - \sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} | P_l(\omega, A) - P_l(\tilde{\omega}, A) |$$

— коэффициент эргодичности переходной вероятностной функции $P_l(\omega, A)$. Соотношения (2.6), (2.7) и (2.9) окончательно дают

$$\| \nu_{k,l}(t, x, y, \cdot) \| \leqslant (1 - \tilde{\alpha}_l) \| \nu_{k, l-1}(t, x, y, \cdot) \|. \tag{2.11}$$

Процесс продолжая далее, получаем

$$\| \nu_{kl}(t, x, y, \cdot) \| \leqslant \prod_{j=k+1}^{l}{}^{*} (1 - \tilde{\alpha}_j), \tag{2.12}$$

так как

$$\| \nu_{k,k+1}(t, x, y, \cdot) \| \leqslant 1 - \tilde{\alpha}_{k+1}.$$

Из (2.12) следует утверждение леммы.

Лемма 6. *Если существуют* $\mathbf{M} | X_k^{(n)} |^s$ $(s \geqslant 1)$, *то для*

$$\varkappa_r^{(n)}(t) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \ln f_n(t), \quad r \leqslant s$$

в точках t, *где* $f_n(t) \neq 0$, *имеет место соотношение*

$$| \varkappa_r^{(n)}(t) | \leqslant \frac{K}{| f_n(t) |^r} \sum_{1 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_r \leqslant n} \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}} \int\limits_{\Omega_{l_2}^{(n)}} \cdots \int\limits_{\Omega_{l_r}^{(n)}} \Bigl| X_{l_1}^{(n)}(\omega_1) X_{l_2}^{(n)}(\omega_2) \ldots X_{l_r}^{(n)}(\omega_r) \Bigr| \sum_{\nu=0}^{r-1} \nu! \times$$

$$\times \sum_{(h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}) \in H_\nu^*} \Bigl| \Bigl(\prod_{\substack{k=1 \\ \{ h_{k-1} = 0 \}}}^{r-1} f_{0 l_k}^{(n)}(t, d\omega_k) \Bigr) \times$$

$$\times \Bigl(\prod_{k \in \mathfrak{M}} f_{l_k n}^{(n)}(t, \omega_k, \Omega_n^{(n)}) \Bigr) \Bigl(\prod_{\substack{k=2 \\ \{ h_{k-1} \neq 0 \}}}^{r} \int\limits_{\Omega_{l_{n_{k-1}}}^{(n)}} \int\limits_{\Omega_{l_k}^{(n)}} f_{l_k n}^{(n)}(t, y, \Omega_n^{(n)}) \times$$

$$\times f_{0 l_{h_{k-1}}}^{(u)}(t, dx) \, \nu_{l_{h_{k-1}} l_k}^{(n)}(t, \omega_{h_{k-1}}, x, d\omega_k, dy) \Bigr) \Bigr|.$$

Здесь система $h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}$ содержит перестановку $r-\nu-1$-ого порядка чисел $1, 2, \ldots, r-1$, а остальные ν чисел h_k равны нулю. Кроме того $h_k \leqslant k$ и $\sum\limits_{\substack{k=2\\ \{h_{k-1}\neq 0\}}}^{r} (l_k - l_{h_{k-1}}) \geqslant l_r - l_1$. H_ν^* есть множество таких систем. Множество $\mathfrak{M}$ определяется соотношением $\mathfrak{M}=\{1, 2, \ldots, r\}-\{h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}\}$. Постоянное K зависит только от r, $h_0=0$.

Доказательство. Имеем согласно (1.1), (1.2)

$$f_n(t)=\int\limits_{\Omega_1^{(n)}}\int\limits_{\Omega_2^{(n)}}\ldots\int\limits_{\Omega_n^{(n)}} e^{it\left(X_1^{(n)}(\omega_1)+X_2^{(n)}(\omega_2)+\ldots+X_n^{(n)}(\omega_n)\right)}\,P_1^{(n)}(d\omega_1)\times$$

$$\times P_2^{(n)}(\omega_1, d\omega_2)\ldots P_n^{(n)}(\omega_{n-1}, d\omega_n)=$$

$$=\int\limits_{\Omega_1^{(n)}}\int\limits_{\Omega_2^{(n)}}\ldots\int\limits_{\Omega_n^{(n)}} f_1^{(n)}(t, d\omega_1)\,f_2^{(n)}(t, \omega_1, d\omega_2)\ldots f_n^{(n)}(t, \omega_{n-1}, d\omega_n). \quad (2.13)$$

Очевидно, что все члены равенства (2.13) можно k раз ($k\leqslant s$) диференцировать под знаком интеграла ввиду существования моментов порядка до s включительно.

В дальнейшем будем заниматься преобразованием подинтегральных выражений. Поэтому, если в какие нибудь выражения будут входить диференциальные элементы $\left(\text{напр. } f_k^{(n)}(t, \omega_{k-1}, d\omega_k)\right)$, никогда не будем забывать, что эти выражения — подинтегральные.

Вводим функцию

$$\varphi_{l_1 l_2\ldots l_k}^{(n)}(t, d\omega_1, d\omega_2, \ldots, d\omega_k),$$

инвариантную относительно любой перестановки индексов $l_1, l_2, \ldots, l_k$, причем в случае $l_1\leqslant l_2\leqslant\ldots\leqslant l_k$ полагается

$$\varphi_{l_1, l_2, \ldots, l_k}^{(n)}(t, d\omega_1, d\omega_2, \ldots, d\omega_k)=f_{0 l_1}^{(n)}(t, d\omega_1)\,f_{l_1 l_2}^{(n)}(t, \omega_1, d\omega_2)\ldots$$

$$\ldots f_{l_{k-1} l_k}^{(n)}(t, \omega_{k-1}, d\omega_k)\,f_{l_k n}^{(n)}(t, \omega_k, \Omega_n).$$

Здесь считается

$$f_{l,l}^{(n)}(t, \omega, A)=\begin{cases}1, & \text{если } \omega\in A,\\ 0, & \text{в противном случае, для любого } A\in\tilde{F}_l^{(n)}.\end{cases}$$

Тогда получаем

$$\alpha_k^{(n)}(t)=\frac{1}{i^k}\frac{d^k}{dt^k}f_n(t)=\sum_{1\leqslant l_1, l_2, \ldots, l_k\leqslant n}\;\int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\int\limits_{\Omega_{l_2}^{(n)}}\ldots\int\limits_{\Omega_{l_n}^{(n)}} X_{l_1}^{(n)}(\omega_1)\times$$

$$\times X_{l_2}^{(n)}(\omega_2)\ldots X_{l_k}^{(n)}(\omega_k)\,\varphi_{l_1, l_2, \ldots, l_k}^{(n)}(t, d\omega_1, d\omega_2, \ldots, d\omega_k); \qquad k\leqslant s. \quad (2.14)$$

Имеет место простое равенство

$$\varkappa_r^{(n)}(t)=\frac{1}{i^r}\frac{d^r}{dt^r}\ln f_n(t)=\frac{1}{[f_n(t)]^r}\sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu-1}\frac{[f_n(t)]^{r-\nu}}{\nu}\times$$

$$\times\sum_{\substack{1\leqslant k_1, \ldots, k_\nu\leqslant r\\ k_1+k_2+\ldots+k_\nu=r}}\frac{r!}{k_1!\ldots k_\nu!}\,\alpha_{k_1}^{(n)}(t)\ldots\alpha_{k_\nu}^{(n)}(t), \qquad r\leqslant s,$$

которое совместно с (2.14) дает

$$\varkappa_r^{(n)}(t)=\frac{1}{[f_n(t)]^r}\sum_{1\leqslant l_1,\ldots,l_r\leqslant n}\int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\cdots\int\limits_{\Omega_{l_r}^{(n)}}\sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu-1}[f_n(t)]^{r-\nu}\times$$

$$\times\sum_{\substack{1\leqslant k_1,\ldots,k_\nu\leqslant r\\ k_1+\ldots+k_\nu=r}}\frac{r!}{k_1!\ldots k_\nu!\,\nu!}X_{l_1}^{(n)}(\omega_1)\ldots X_{l_r}^{(n)}(\omega_r)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{\nu}\varphi_{l_{\tilde k_{j-1}+1},\ldots,l_{\tilde k_j}}(t,\,d\omega_{\tilde k_{j-1}+1},\,\ldots,\,d\omega_{\tilde k_j}),$$

где

$$\tilde k_0=0,\quad \tilde k_j=\sum_{p=1}^{j}k_p;\qquad j=1,\,\ldots,\,\nu.$$

Для нас более удобным будет выражение

$$\varkappa_n^{(r)}(t)=\frac{1}{[f_n(t)]^r}\sum_{1\leqslant l_1,\ldots,l_r\leqslant n}\int\limits_{\Omega_{p_1}^{(n)}}\int\limits_{\Omega_{p_r}^{(n)}}X_{l_1}^{(n)}(\omega_1)\ldots X_{l_2}^{(n)}(\omega_2)\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}(-1)^{\nu-1}[f_n(t)]^{r-\nu}(\nu-1)!\sum_{\substack{1\leqslant k_1\leqslant\ldots\leqslant k_\nu\leqslant r\\ k_1+\ldots+k_\nu=r}}^{*}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{\nu}\varphi^{(n)}_{h_{\tilde k_{j-1}+1},\ldots,h_{\tilde k_j}}\left(t,\,d\omega_{\tilde k_{j-1}+1},\,\ldots,\,d\omega_{\tilde k_j}\right).\tag{2.15}$$

Здесь $*$ над суммой означает, что суммируются еще по всем возможным разбиениям чисел $l_1,\,l_2,\,\ldots,\,l_r$ на группы

$$\left(\tilde h_1,\,\tilde h_2,\,\ldots,\,\tilde h_{\tilde k_1}\right),\ \left(\tilde h_{\tilde k_1+1},\,\tilde h_{\tilde k_1+2},\,\ldots,\,\tilde h_{\tilde k_2}\right),\ \ldots,\ \left(\tilde h_{\tilde k_{\nu-1}+1},\,\tilde h_{\tilde k_{\nu-1}+2},\,\ldots,\,\tilde h_{\tilde k_\nu}\right)$$

сохраняя порядок следования. Например будем считать, что

$$\tilde h_{\tilde k_{j-1}+1}\leqslant\ldots\leqslant\tilde h_{\tilde k_j};\qquad j=1,\,\ldots,\,\nu.$$

Займемся оценкой подинтегрального выражения в соотношении (2.15).

Пусть t и $l_1,\,l_2,\,\ldots,\,l_r$ фиксированы. Возмем перестановку $i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_r$ чисел $1,\,2,\,\ldots,\,r$ такую, что

$$l_{i_1}\leqslant l_{i_2}\leqslant\ldots\leqslant l_{i_r}.\tag{2.16}$$

Для краткости положим

$$\prod_{i=1}^{\nu}\varphi_{\tilde h_{\tilde k_{j-1}+1},\ldots,\tilde h_{\tilde k_j}}\left(t,\,d\omega_{\tilde k_{j-1}+1},\,\ldots,\,d\omega_{\tilde k_j}\right)[f_n(t)]^{r-\nu}=$$

$$=\bar\psi_{\nu-1}\Big(0\tilde h_1,\,\tilde h_1\tilde h_2,\,\ldots,\,\tilde h_{\tilde k_1-1}\tilde h_{\tilde k_1},\,0\tilde h_{\tilde k_1+1},\,\tilde h_{\tilde k_1+1}\tilde h_{\tilde k_1+2},\,\ldots,\,\tilde h_{\tilde k_2-1}\tilde h_{\tilde k_2},$$

$$\ldots,\,0\tilde h_{\tilde k_{\nu-1}+1},\,\tilde h_{\tilde k_{\nu-1}+1}\tilde h_{\tilde k_{\nu-1}+2},\,\ldots,\,\tilde h_{\tilde k_\nu-1}\tilde h_{\tilde k_\nu}\Big),$$

причем продолжим нашу функцию так, чтобы она не менялась от перестановки пар местами. Тогда можно пары переставить так, чтобы вторые индексы следовали в возрастающем порядке. Получаем

$$\psi_{\nu-1}\left(0 l_{i_1}, h_1 l_{i_2}, \ldots, h_{r-1} l_{i_r}\right).$$

Еще проще положить

$$\bar{\psi}_{\nu-1}\left(0 l_{i_1}, \bar{h}_1 l_{i_2}, \ldots, h_{r-1} l_{i_r}\right) = \psi_\nu (h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}),$$

$\bar{h}_k = l_{i_{h_k}}$ и $h_k = 0$ при $\bar{h}_k = 0$, $l_{i_1} \leqslant l_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant l_{i_r}$. Таким образом, система $h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}$, содержит перестановку $r - \nu$-ого порядка чисел $1, \ldots, r-1$, а остальные $\nu - 1$ чисел h_k равны нулю. Кроме того, $h_k \leqslant k$. Множество таких систем обозначим $H_{\nu-1}$. Тогда для подинтегрального выражения равенства (2.15) будет справедливо соотношение

$$I_1 = \sum_{\nu=1} (-1)^{\nu-1} [f_n(t)]^{r-\nu} (\nu-1)! \sum^*_{\substack{1 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_\nu \leqslant r \\ k_1 + \ldots + k_\nu = r}} \prod_{j=1}^{\nu} \varphi^{(n)}_{h_{\tilde{k}_{j-1}+1}, \ldots, h_{\tilde{k}_j}} \times$$

$$\times \left(t, d\omega_{\tilde{k}_{j-1}+1}, \ldots, d\omega_{\tilde{k}_j}\right) = \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{\nu-1} (\nu-1)! \times$$

$$\times \sum_{(h_1, \ldots, h_{r-1}) \in H_{\nu-1}} \psi_{\nu-1}(h_1, \ldots, h_{r-1}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \nu! \sum_{(h_1, \ldots, h_{r-1}) \in H_\nu} \psi_\nu (h_1, \ldots, h_{r-1}). \qquad (2.17)$$

Положим

$$\psi_\nu (h_1, \ldots, h_{r-2}, \hat{h}_{r-1}) = \psi_\nu (h_1, \ldots, h_{r-2}, h_{r-1}) - \psi_{\nu+1}(h_1, \ldots, {}_{r-2}, 0),$$

если $h_{r-1} \neq 0$. Далее пусть

$$\psi_\nu (h_1, \ldots, \hat{h}_i, \hat{h}_{i+1}, \ldots, \hat{h}_{r-1}) = \psi_\nu (h_1, \ldots, h_i, \hat{h}_{i+1}, \ldots, \hat{h}_{r-1}) -$$

$$- \psi_{\nu+1}(h_1, \ldots, 0, \hat{h}_{i+1}, \ldots, \hat{h}_{r-1}),$$

где отмеченные числа $\hat{h}_k$ не равны нулю. Возьмем любой член

$$\psi_\nu (h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}). \qquad (2.18)$$

Таких членов всего $u_{0\nu} = \nu!$ и их знак равен $(-1)^\nu$. Среди h_i имеется ν нулей. Пусть это будут $h_{m_1} = h_{m_2} = \ldots = h_{m_\nu} = 0$. Нули будем считать справа, т. е. $m_1 > m_2 > \ldots > m_\nu$. Среди членов суммы

$$(-1)^{\nu+1} (\nu+1)! \sum_{(h_1, \ldots, h_{r-1}) \in H_{\nu+1}} \psi_{\nu+1} (h_1, \ldots, h_{r-1})$$

имеются члены, отличающиеся от члена (2.18) только тем, что на месте h_{r-1} стоит 0. Число таких членов $u_{0, \nu+1} = (\nu+1)! > u_{0, \nu}$ и они входят со знаком $(-1)^{\nu+1}$, противоположным знаку члена (2.18). Вычитая получаем

$$\psi_\nu (h_1, h_2, \ldots, \hat{h}_{r-1}).$$

Здесь h_{r-1} принимает $\nu+1$ значение, поэтому число членов $\psi_{\nu+1}(h_1, h_2, \ldots, h_{1-2}, 0)$ сократится на число $\nu!(\nu+1)=(\nu+1)!$, т. е. таких членов не останется.

Подобным образом действуя далее, получаем

$$\psi_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m_1-1}, \underset{m_1}{0}, \hat{h}_{m_1+1}, \ldots, \hat{h}_{r-1}). \tag{2.19}$$

С другой стороны, несколько слагаемых вида (2.19) потребуются для образования членов

$$\psi_{\nu-1}(h_1, h_2, \ldots, h_{m_1}, \hat{h}_{m_1+1}, \ldots, \hat{h}_{r-1}), \qquad h_{m_1}\neq 0.$$

Здесь $u_{0,\nu-1}=(\nu-1)!$ и h_{m_1} может принимать значения $1, 2, \ldots, m_1$ за исключением совпадающих с $h_{m_1+1}, h_{m_1+2}, \ldots, h_{r-1}$ (пусть число последних p_1) и уже принятых величинами $h_1, h_2, \ldots, h_{m_1-1}$. Таких будет $m_1-1-(\nu-r)=m_1-\nu$, так как $h_i\leqslant i$ и среди чисел $h_1, h_2, \ldots, h_{m_1-1}$ имеется $\nu-1$ ноль. Поэтому h_{m_1} может принять

$$v_{\nu-1}(h_{m_1})=m_1-p_1-(m_1-\nu)=\nu-p_1$$

значений. Следовательно, число оставшихся членов вида (2.19) будет равным

$$u_{1,\nu}=u_{0,\nu}-(\nu-1)!\,v_{\nu-1}(h_{m_1})=\nu!-(\nu-p_1)(\nu-1)!=(\nu-1)!\,p_1>0.$$

Так дойдем до второго нуля h_{m_2} в нашем члене

$$\psi_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m_2-1}, \underset{m_2}{0}, \hat{h}_{m_2+1}, \ldots, \hat{h}_{m_1-1}, \underset{m_1}{0}, \hat{h}_{m_1+1}, \ldots, \hat{h}_{r-1}). \tag{2.20}$$

Если среди чисел $h_{m_2+1}, \ldots, h_{r-1}$ есть p_2 чисел из ряда $1, 2, \ldots, m_2$, то h_{m_2} в члене

$$\psi_{\nu-1}(h_1, \ldots, h_{m_2}, \hat{h}_{m_2+1}, \ldots, \hat{h}_{m_1-1}, \underset{m_1}{0}, \hat{h}_{m_1+1}, \ldots, \hat{h}_{r-2}) \tag{2.21}$$

может принять

$$v_{\nu-1}(h_{m_2})=(\nu-1-p_2)$$

значений. Членов вида (2.21) имеется $u_{1,\nu-1}=(\nu-2)!\,p_2$. Следовательно, выражение (2.20) останется с множителем

$$u_{2,\nu}=u_{1,\nu}-u_{1,\nu-1}v_{\nu-1}(h_{m_2})=(\nu-2)!\,p_1p_2>0.$$

Наконец для j-ого нуля получим

$$v_{\nu-1}(h_{m_j})=\nu-(j-1)-p_j$$

и

$$u_{j,\nu}=u_{j-1,\nu}-u_{j-1,\nu-1}v_{\nu-1}(h_{m_j}); \quad u_{1,\nu}=(\nu-1)!\,p_1,$$

что дает

$$u_{j,\nu}=(\nu-j)!\,p_1p_2\ldots p_j.$$

Здесь $v_{\nu-1}(h_{m_j})$ — число значений, которые может принимать h_{m_j} в члене

$$\psi_{\nu-1}(h_1, \ldots, h_{m_j}, \hat{h}_{m_j+1}, \ldots, \hat{h}_{m_{j+1}-1}, 0, \hat{h}_{m_{j+1}+1}, \ldots, \hat{h}_{r-1})$$

а $u_{j,\nu}$ — число членов вида

$$\psi_\nu(h, \ldots, h_{m_j-1}, \underset{m_j}{0}, \hat{h}_{m_j+1}, \ldots, \hat{h}_{m_{j+1}-1}, \underset{m_{j+1}}{0}, \hat{h}_{m_{j+1}+1}, \ldots, \hat{h}_{r-1}) \tag{2.22}$$

после использования j-ого нуля. Так как $u_{j,\nu}\geqslant 0$, то члены вида (2.22) или останутся, или исчезнут. Если $u_{j,\nu}>0$, то последним шагом будет такой j_0, что $u_{j_0+1\nu}=u_{j_0,\nu}$ или $v_{\nu-1}(h_{m_{j_0}+1})=0$, что дает

$$\nu-j_0=p_{j_0+1}. \tag{2.23}$$

Ясно, что в таком случае все $h_i\neq 0$ будут отмечены знаком $\hat{}$. Действительно, $u_{j,\nu}=0$ только тогда, когда, по крайней мере, один из $p_1, p_2, \ldots, p_j$ равен нулю. А это означает что и члены

$$\psi_{\nu-1}(h_1, \ldots, h_{m_j}, \hat{h}_{m_j+1+1}, \ldots, \hat{h}_{m_{j+1}-1}, 0\,\hat{h}_{m_{j+1}+1}, \ldots, \hat{h}_{r-1})$$

уже отсутствуют. Таким образом, мы доказали, что все члены $\psi_{\nu-1}$ или исчезнут, или будут отмечены, так как в последнем случае $u_{j,\nu}>0$. У нас ν любое, поэтому утверждение доказано.

Итак, если $p_1, p_2, \ldots, p_j$, не равны нулю, а $p_{j_0+1}=\nu-j_0$, то

$$u_{j_0,\nu}=(p_{j_0+1})!\,p_1, p_2\ldots p_{j_0}. \tag{2.23a}$$

Отсюда выводим, что

$$I_1=\sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^{\nu}\nu!\sum_{(h_1,\ldots,h_{r-1})\in H_\nu^*}\psi_\nu(\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{r-1}). \tag{2.24}$$

Здесь H_ν^* содержит только ту часть множества H_ν, которая осталась после наших преобразований.

Для простоты обозначений, не нарушая общности, положим, что (2.16) имеет место при $i_1=1$, $i_2=2$, $\ldots$, $i_r=r$. Пусть $\psi_\nu(\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{r-1})$ — любой член суммы (2.24) с $(h_1, \ldots, h_{r-1})\in H_\nu^*$. Здесь положено $\hat{h}_i=h_i$ в случае $h_i=0$. В дальнейшем положим $h_0=0$ и, кроме того, пусть множество $\mathfrak{M}$ определяется соотношением

$$\mathfrak{M}=\{1, 2, \ldots, r\}-\{h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}\}. \tag{2.25}$$

Тогда, согласно введенным обозначениям, имеем

$$\psi_\nu(\hat{h}_1, \hat{h}_2, \ldots, \hat{h}_{r-1})=\left\{\prod_{\substack{k=1\\ \{h_{k-1}=0\}}}^{r-1} f_{0l_k}(t, d\omega_k)\right\}\times$$

$$\times\left\{\prod_{\substack{k=2\\ \{h_{k-1}\neq 0\}}}^{r}\left[f^{(n)}_{l_{h_{k-1}}l_k}(t, \omega_{h_{k-1}}, d\omega_k)f_n(t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f^{(n)}_{0l_k}(t, d\omega_k)f^{(n)}_{l_{h_{k-1}}n}(t, \omega_{h_{k-1}}, \Omega_n^{(n)})\right]\right\}\cdot\left\{\prod_{k\in\mathfrak{M}} f^{(n)}_{l_k n}(t, \omega_k, \Omega_n^{(n)})\right\}.$$

Принимая во внимание результаты и обозначения лемм 1 и 5, получаем

$$f^{(n)}_{l_{h_{k-1}}l_k}(t, \omega_{h_{k-1}}, d\omega_k)f_n(t)-f^{(n)}_{0l_k}(t, d\omega_k)f^{(n)}_{l_{h_{k-1}}n}(t, \omega_{h_{k-1}}, \Omega_n^{(n)})=$$

$$=\int_{\Omega^{(n)}_{l_{h_{k-1}}}}\int_{\Omega^{(n)}_{l_k}} f^{(n)}_{0l_{h_{k-1}}}(t, dx)\,\nu^{(n)}_{l_{h_{k-1}}l_k}(t, \omega_{h_{k-1}}, x, d\omega_k, dy)f^{(n)}_{l_k n}(t, y, \Omega_n^{(n)});$$

$$x\in\Omega^{(n)}_{l_{h_{k-1}}},\ y\in\Omega^{(n)}_{l_k}.$$

Поэтому

$$I_2=\left|\frac{1}{|f_n(t)|^r}\int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\ldots\int\limits_{\Omega_{l_r}^{(n)}}X_{l_1}^{(n)}(\omega_1)\ldots X_l^{(n)}(\omega_r)\psi_\nu(\hat{h}_1,\ \ldots,\ \hat{h}_{r-1})\right|=$$

$$=\frac{1}{|f_n(t)|^r}\left|\int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\ldots\int\limits_{\Omega_{l_r}^{(n)}}X_{l_1}^{(n)}(\omega_1)\ldots X_{l_r}^{(n)}(\omega_r)\left\{\prod_{\substack{k=1\\ \{h_{k-1}=0\}}}^{r-1}f_{0l_k}^{(n)}(t,\ d\omega_k)\right\}\times\right.$$

$$\times\left\{\prod_{k\in\mathfrak{M}}f_{l_k^n}^{(n)}(t,\ \omega_k,\ \Omega_n^{(n)})\right\}\cdot\left\{\prod_{\substack{k=2\\ \{h_k\neq 0\}}}^{r}\int\limits_{\Omega_{l_{h_{k-1}}}^{(n)}}\int\limits_{\Omega_{l_k}^{(n)}}f_{l_k^n}^{(n)}(t,\ y,\ \Omega_n^{(n)})\right\}\times$$

$$\times f_{0l_{h_{k-1}}}^{(n)}(t,\ dx)\,\nu_{l_{h_{k-1}}l_k}^{(n)}(t,\ \omega_{h_{k-1}},\ x,\ d\omega_k,\ dy\Big). \tag{2.26}$$

Положим

$$d=\sum_{i=2}^{r}d_i;\quad d_i=\begin{cases}l_i-l_{h_{i-1}}, & \text{если}\quad h_{i-1}\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad h_{i-1}=0.\end{cases} \tag{2.27}$$

Оценим число d. В силу того, что

$$(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{r-1})\in H_\nu^*,$$

согласно (2.23а), имеем

$$u_{j_0,\nu}=(p_{j_0+1})!\,p_1p_2\ldots p_{j_0}>0.$$

Пусть $\sigma_k=k-h_{k-1}$, если $d_k=l_k-l_{h_{k-1}}$ и $\sigma_k=0$, если $h_{k-1}=0$. Так как $p_{j_0+1}=\nu-j_0$, то существует множество $\mathfrak{N}$ индексов k, что

$$\sum_{k\in\mathfrak{M}}\sigma_k\geqslant 2j_0+\Big((2+3+\ldots+(\nu-j_0+1)\Big)=2j_0+\frac{\nu-j_0+3}{2}(\nu-j_0).$$

Число элементов множества $\mathfrak{N}$, очевидно, не превосходит $j_0+(\nu-j_0)=\nu$. Среди $\{d_k\}$ имеется ν нулей. Оставшиеся числа не меньше единицы. Поэтому

$$\sum_{k=2}^{r}\sigma_k\geqslant(r-1-2\nu)\,1+2j_0+\frac{\nu-j_0+3}{2}(\nu-j_0)=$$

$$=r-1+(\nu-j_0)\left(\frac{\nu-j_0+3}{2}-2\right)\geqslant r-1.$$

Отсюда уже легко следует, что

$$d\geqslant l_r-l_1,$$

если

$$l_1\leqslant l_2\leqslant\ldots\leqslant l_r.$$

Из соотношений (2.14), (2.16), (2.24), (2.26) – (2.28) следует доказательство леммы.

3. Асимптотическое разложение для характеристической функции суммы

Основной целью этого параграфа будет доказательство теорем 5 и 6. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 7. *Если существуют равномерно по k и n ограниченные абсолютные моменты* $\mathbf{M}|X_k^{(n)}|^3<C$, $\mathbf{M}X_k^{(n)}=0$; $k=1,\ \ldots,\ n$, *и*

$$|X_k^{(n)}|\leqslant\begin{cases}K_n, & \text{если}\quad k\in\mathfrak{M},\\ n, & \text{если}\quad k\bar{\in}\mathfrak{M},\end{cases}$$

где K_n и множество $\mathfrak{M}$ определены соотношениями (3.24), (3.25), *кроме того, если*

$$\varphi(n) = \alpha^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{7}} (\ln\ln n)^{-\frac{1}{7}} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

и $\mathbf{D} X_k^{(n)} \geqslant \sigma > 0$ *для всех k и n, то при*

$$|t| < \frac{\varphi(n)\sqrt{\ln n}}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}$$

имеют место следующие соотношения:

$$1. \qquad f_n(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\mathbf{D} S_n\right\}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)\right) \tag{3.1}$$

$$2. \qquad \frac{\mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{0u}^{(n)} \mid F_u^{(n)}\right)\right| \sup\left|f\left(t,\ S_{vn}^{(n)} \mid F_v^{(n)}\right)\right|}{|f_n(t)|} < 2, \tag{3.2}$$

если только

$$v - u \ll \frac{n\alpha^{(n)4}}{\ln^4 n}.$$

Здесь

$$f\left(t,\ S_{kl}^{(n)} \mid F_l^{(n)}\right) = \mathbf{M}\left\{e^{itS_{kl}^{(n)}} \mid F_l^{(n)}\right\}.$$

При доказательстве леммы 7 мы будем пользоватся следующей леммой 8.

Лемма 8. *Пусть случайные величины $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ связаны в цепь Маркова с n моментами времени и коэффициентом эргодичности $\alpha^{(n)}$. Пусть существуют равномерно ограниченные $\mathbf{M}|X_i^{(n)}|^3$ и, кроме того, $\mathbf{M}X_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда при*

$$l - k \geqslant \frac{1}{\alpha^{(n)}} \tag{3.3}$$

имеет место неравенство

$$\mathbf{M}|S_{kl}^{(n)}|^3 \leqslant L\left(\frac{(l-k)\ln n (\ln\ln n)^2}{\alpha^{(n)2}} + \sqrt{\frac{l-k}{\alpha^{(n)}}}\,\mathbf{D} S_{kl}^{(n)}\right),$$

где $L > 0$ — постоянное.

Доказательство. Применяя неравенство Минковского, имеем

$$\mathbf{M}|S_{kl}^{(n)}|^3 = \mathbf{M}|S_{kk_1}^{(n)} + S_{k_1l_1}^{(n)} + S_{l_1l}^{(n)}|^3 \leqslant \left(\left(\mathbf{M}|S_{k_1k_1}^{(n)} + S_{l_1l}^{(n)}|\right)^{\frac{1}{3}} + \sum_{j=k_1+1}^{l_1}\left(\mathbf{M}|X_j^{(n)}|^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\mathbf{M}|S_{kk_1}^{(n)} + S_{l_1l}^{(n)}|\right)^{\frac{1}{3}} + C_1(l_1 - k_1)\right)^3, \tag{3.4}$$

так как

$$\mathbf{M}|X_i^{(n)}|^3 < C,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $k_1 - k = l - l_1$ и

$$l_1 - k_1 = \left[\frac{\ln\ln n}{\alpha^{(n)}}\right]. \tag{3.5}$$

Если

$$\mathbf{M}|S_{kk_1}^{(n)} + S_{l_1l}^{(n)}|^3 \leqslant \left[\frac{\ln\ln n}{\alpha^{(n)}}\right]^3 C_1^3 \ln n, \tag{3.6}$$

то, как следует из (3.3), (3.4) и (3.5), лемма доказана. Если же

$$\alpha^{(n)3}\ln^{-1} n\,\mathbf{M}|S_{kk_1}^{(n)} + S_{l_1l}^{(n)}|^3 \to \infty \qquad (n \to \infty),$$

то, согласно (3.4), имеем

$$\mathbf{M}|S_{kl}^{(n)}|^3 \leqslant \mathbf{M}|S_{kk_1}^{(n)} + S_{l_1l}^{(n)}|^3\left(1 + \frac{1}{\ln n}\right). \tag{3.7}$$

Из определения k_1 и l_1 вытекает, что случайные величины $S_{kk_1}^{(n)}$, $S_{l_1 l}^{(n)}$ „почти" независимы, т. е. будут справедливы соотношения

$$\left|\mathbf{M}\,|\,S_{kk_1}|^2\,|\,S_{l_1l}^{(n)}| - \mathbf{M}\,S_{kk_1}^{(n)2}\,\mathbf{M}\,|\,S_{l_1l}^{(n)}|\right| \leqslant C_2 e^{-\ln\ln n}\left(\mathbf{M}\,|\,S_{kk_1}^{(n)}|^3\right)^{\frac{2}{3}}\left(\mathbf{M}\,|\,S_{l_1l}^{(n)}|^3\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.8)$$

$$\left|\mathbf{M}\,|\,S_{l_1l}^{(n)}|^2\,|\,S_{kk_1}^{(n)}| - \mathbf{M}\,S_{l_1l}^{(n)2}\,\mathbf{M}\,|\,S_{l_1l}|\right| \leqslant C_3 e^{-\ln\ln n}\left(\mathbf{M}\,|\,S_{l_1l}^{(n)}|^3\right)^{\frac{2}{3}}\left(\mathbf{M}\,|\,S_{k_1k}^{(n)}|^3\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.9)$$

Соотношений (3.8) и (3.9) мы доказывать не будем, так как последние получаются совершенно так же, как и в монографии Дж. Дуба [см. [3], Гл. V, § 7, лемма 7.1] при $r=\frac{2}{3}$, $s=3$. Поэтому из (3.7), (3.8), (3.9) получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\,|\,S_{kl}^{(n)}|^3 &\leqslant \left(1+\frac{1}{\ln n}+C_4 e^{-\ln\ln n}\right)\left(\mathbf{M}\,|\,S_{kk_1}^{(n)}|^3+\mathbf{M}\,|\,S_{l_1l}^{(n)}|^3\right)+\\ &+3\left(1+\frac{1}{\ln n}\right)\left(\mathbf{M}\,S_{kk_1}^{(n)2}\,\mathbf{M}\,|\,S_{l_1l}^{(n)}|+\mathbf{M}\,|\,S_{kk_1}^{(n)}|\,\mathbf{M}\,S_{l_1l}^{(n)2}\right) \leqslant\\ &\leqslant \left(1+\frac{C_5}{\ln n}\right)\left(\mathbf{M}\,|\,S_{kk_1}^{(n)}|^3+\mathbf{M}\,|\,S_{l_1l}^{(n)}|^3\right)+C_6\sqrt{\frac{l-k}{2\alpha^{(n)}}}\left(\mathbf{D}\,S_{kk_1}^{(n)}+\mathbf{D}\,S_{l_1l}^{(n)}\right),\end{aligned}$$

ибо

$$\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)} \leqslant C_6\frac{l-k}{\alpha^{(n)}}, \quad (3.10)$$

если только $l-k>\frac{1}{\alpha^{(n)}}$. Соотношение (3.10) проверяется просто. Пусть

$$S_{kl}^{(n)}=S_1^{(n)}+S_2^{(n)},$$

где

$$S_1^{(n)}=S_{ku_1}^{(n)}+S_{u_2u_3}^{(n)}+\ldots+S_{n_{2m}u_{2m+1}}^{(n)},$$

$$S_2^{(n)}=S_{n_1n_2}^{(n)}+S_{u_3u_4}^{(n)}+\ldots+S_{u_{2m-1}u_{2m}}^{(n)}+S_{u_{2m}l}^{(n)},$$

причем

$$u_i-u_{i-1}=\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right],\quad u_1-k\ll\frac{1}{\alpha^{(n)}},\quad l-u_{2m}\ll\frac{1}{\alpha^{(n)}}.$$

Величины $S_{ku_1}^{(n)}$, $S_{u_2u_3}^{(n)}$, ... образуют последовательность величин, связанных в цепь Маркова, причем коэффициенты эргодичности вероятностей перехода за один шаг меньше числа $1-\eta$, где

$$\eta\leqslant(1-\alpha^{(n)})^{\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right]}<\frac{1}{2}.$$

Поэтому из неравенства (2.39) II-ой главы, § 2 немедленно следует, что

$$\mathbf{D}\,S_1^{(n)}\leqslant C_7\sum_i \mathbf{D}\,S_{u_{2i}u_{2i+1}}^{(n)}\leqslant C_8\frac{m}{\alpha^{(n)2}}$$

и аналогично

$$\mathbf{D}\,S_2^{(n)}\leqslant C_9\frac{m}{\alpha^{(n)2}}$$

или

$$\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)}\leqslant C_6\frac{l-k}{\alpha^{(n)}}.$$

Процесс продолжая дальше, после ν шагов получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\,|\,S_{kl}^{(n)}|^3 &\leqslant \left(1+\frac{C_5}{\ln n}\right)^{\nu}\left(\mathbf{M}\,|\,S_{kk_{\nu_1}}^{(n)}|^3+\mathbf{M}\,|\,S_{k_{\nu_2}k_{\nu_3}}^{(n)}|^3+\ldots+\mathbf{M}\,|\,S_{k_{\nu_{2\nu}}l}^{(n)}|^3+\right.\\ &+C_6\sum_{j=1}^{\nu}\left(1+\frac{C_5}{\ln n}\right)^{j}\sqrt{\frac{l-k}{2^j\alpha^{(n)}}}\left(\mathbf{D}\,S_{kk_{j_1}}^{(n)}+\mathbf{D}S_{k_{j_2}k_{j_3}}^{(n)}+\ldots+\mathbf{D}\,S_{k_{j_{2j}}l}^{(n)}\right).\end{aligned} \quad (3.11)$$

По построению, коэффициент эргодичности между слагаемыми $S^{(n)}_{kk_{j_1}}$, $S^{(n)}_{k_{j_1}k_{j_2}}$, ... не меньше числа $1-\exp(-\ln\ln n) > \frac{1}{2}$, поэтому, учитывая (2.39) § 2, II гл., получаем

$$\mathbf{D}S^{(n)}_{kk_{j_1}} + \mathbf{D}S^{(n)}_{k_{j_1}k_{j_2}} + \ldots + \mathbf{D}S^{(n)}_{k_{j_{2^j}}l} \ll \mathbf{D}\left(S^{(n)}_{kk_{j_1}} + S^{(n)}_{k_{j_1}k_{j_2}} + \ldots + S^{(n)}_{k_{j_{2^j}}l}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\mathbf{D}S^{(n)}_{kl} + \mathbf{D}\left(S^{(n)}_{k_{j_1}k_{j_2}} + S^{(n)}_{k_{j_3}k_{j_4}} + \ldots + S^{(n)}_{k_{j_{2^j-1}}k_{j_{2^j}}l}\right)\right] \ll \mathbf{D}S^{(n)}_{kl} + 2^j\frac{(\ln\ln n)^2}{\alpha^{(n)2}}.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{\nu}\left(1+\frac{C_5}{\ln n}\right)^j\sqrt{\frac{l-k}{2^j\alpha^{(n)}}}\left(\mathbf{D}S^{(n)}_{kk_{j_1}} + \mathbf{D}S^{(n)}_{k_{j_1}k_{j_2}} + \ldots + \mathbf{D}S^{(n)}_{k_{j_{2^j}}l}\right) \ll$$

$$\ll\left(1+\frac{C_5}{\ln n}\right)^{\nu}\left(\sqrt{\frac{l-k}{\alpha^{(n)}}}\,\mathbf{D}S^{(n)}_{kl} + \sqrt{\frac{l-k}{\alpha^{(n)}}}\,\frac{(\ln\ln n)^2}{\alpha^{(n)2}}\,2^{\frac{\nu}{2}}\right). \tag{3.12}$$

Осталось оценить число шагов ν, а тем самым и первое смягаемое суммы (3.11). Как уже отмечалось, процесс прекращается, если все слагаемые удовлетворяют неравенству (3.6). Поэтому первый член суммы (3.11) не превосходит $\left(1+\frac{C_5}{\ln n}\right)^{\nu}2^{\nu}\left(\frac{\ln\ln n}{\alpha^{(n)}}\right)^3 C_1^3\ln n$.

Очевидно, что согласно (3.5)

$$2^{\nu} \leqslant \left[\frac{(l-k)\,\alpha^{(n)}}{\ln n}\right],$$

отсюда

$$\nu \leqslant 3\ln n.$$

Учитывая сказанное, из (3.11) и (3.12) получаем

$$\mathbf{M}\,|S^{(n)}_{kl}|^3 \ll \frac{(\ln\ln n)^2\ln n\,(l-k)}{\alpha^{(n)2}} + \sqrt{\frac{l-k}{\alpha^{(n)}}}\,\mathbf{D}S^{(n)}_{kl}.$$

Этим лемма доказана.

Приступим к доказательству леммы 7. Пусть

$$0 = k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_N < l_N = n$$

набор целых чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

$$k_{i+1} - l_i = \left[\frac{\varphi(n)\ln n}{\alpha^{(n)}}\right], \qquad i = 1, \ldots, N-1, \tag{3.13}$$

и, если определено k_i, то l_i определяется как наименьшее число l, удовлетворяющее условию

$$\mathbf{D}S_{k_il} \geqslant \frac{\mathbf{D}S_n\,\alpha^{(n)2}}{\varphi^8(n)\ln^3 n}, \tag{3.14}$$

причем

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{D}S_n\,\alpha^{(n)2}}{\varphi^8(n)\ln^3 n} \leqslant \mathbf{D}S_{k_Nl_N} < 2\,\frac{\mathbf{D}S_n\,\alpha^{(n)2}}{\varphi^8(n)\ln^3 n}. \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15), согласно оценке дисперсии снизу и (3.10), выводим

$$\frac{n\,\alpha^{(n)4}}{\varphi^8(n)\ln^3 n} \ll \frac{\mathbf{D}S_n\,\alpha^{(n)2}}{\varphi^8(n)\ln^3 n} \ll l_i - k_i \ll \frac{\mathbf{D}S_n\,\alpha^{(n)}}{\varphi^8(n)\ln^3 n}. \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.16}$$

Поэтому соотношение (2.39), § 2, II гл. дает

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}S^{(n)}_{k_il_i} = \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{N}S^{(n)}_{k_il_i}\right) + O\left(e^{-\varphi(n)\ln n}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}S^{(n)}_{k_il_i}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{N-1}\mathbf{D}S^{(n)}_{l_ik_{i+1}} = \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{N-1}S^{(n)}_{l_ik_{i+1}}\right) + O\left(e^{-\varphi(n)\ln n}\right). \tag{3.17}$$

Так как

$$\frac{\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{D} S_{l_i k_{i+1}}^{(n)}}{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D} S_{k_i l_i}^{(n)}} \ll \frac{\frac{\varphi^2(n)\ln n}{\alpha^{(n)2}}}{\frac{\mathbf{D} S_n \alpha^{(n)2}}{\varphi^8(n)\ln^3 n}} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

то из (3.17) выводим, что

$$\mathbf{D} S_n \sim \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D} S_{k_i l_i}^{(n)}. \tag{3.18}$$

Из определения k_i, l_i очевидным образом следует, что

$$\frac{\mathbf{D} S_n \alpha^{(n)2}}{\varphi^8(n)\ln^3 n} \leqslant \mathbf{D} S_{k_i l_i}^{(n)} < \frac{2\mathbf{D} S_n \alpha^{(n)2}}{\varphi^8(n)\ln^3 n}; \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.19}$$

Соотношения (3.18), (3.19) показывают, что

$$N \asymp \frac{\varphi^8(n)\ln^3 n}{\alpha^{(n)2}}, \tag{3.20}$$

а следовательно

$$\left|\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D} S_{k_i l_i}^{(n)} - \mathbf{D} S_n\right| \ll \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{N-1} S_{l_i k_{i+1}}^{(n)}\right) +$$

$$+ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D} S_{k_i l_i}^{(n)}\right)\left(\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{D} S_{l_i k_{i+1}}^{(n)}\right)} \ll N \frac{\varphi^2(n)\ln^2 n}{\alpha^{(n)2}} +$$

$$+ N \frac{1}{\varphi^3(n)\sqrt{\ln n}} \sqrt{\mathbf{D} S_n} \ll \frac{\varphi^5(n)\ln^{\frac{5}{2}} n}{\alpha^{(n)2}} \sqrt{\mathbf{D} S_n}. \tag{3.21}$$

Согласно (1.2a), характеристическую функцию суммы S_n можем предоставить в следующем виде:

$$f_n(t) = \int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}} \int\limits_{\Omega_{l_2}^{(n)}} \cdots \int\limits_{\Omega_{l_N}^{(n)}} f_{0l_1}^{(n)}(t, d\omega_1) f_{l_1 l_2}^{(n)}(t, \omega_1, d\omega_2) \ldots f_{l_{N-1} l_N}^{(n)}(t, \omega_{N-1}, d\omega_N).$$

Отсюда получаем

$$f_n(t) = \int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}} \int\limits_{\Omega_{l_2}^{(n)}} \cdots \int\limits_{\Omega_{l_N}^{(n)}} f\left(t, S_{0l_1}^{(n)} \mid F_{l_1}^{(n)}\right) P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_1) f\left(t, S_{l_1 l_2}^{(n)} \mid F_{l_1}^{(n)} \times F_{l_2}^{(n)}\right) \times$$

$$\times P_{l_1 l_2}^{(n)}(\omega_1, d\omega_2) \ldots f\left(t, S_{l_{N-1} l_N}^{(n)} \mid F_{l_{N-1}}^{(n)} \times F_{l_N}^{(n)}\right) P_{l_{N-1} l_N}^{(n)}(\omega_{N-1}, d\omega_N) \tag{3.22a}$$

или

$$f_n(t) = \int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}} \int\limits_{\Omega_{l_2}^{(n)}} \cdots \int\limits_{\Omega_{l_N}^{(n)}} f\left(t, S_{0l_1}^{(n)} \mid F_{l_1}^{(n)}\right) P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_1) f\left(t, S_{l_1 l_2}^{(n)} \mid F_{l_1}^{(n)} \times F_{l_2}^{(n)}\right) \times$$

$$\times P_{0l_2}^{(n)}(d\omega_2) \ldots f\left(t, S_{l_{N-1} l_N}^{(n)} \mid F_{l_{N-1}}^{(n)} \times F_{l_N}^{(n)}\right) P_{0l_N}^{(n)}(d\omega_N) + O(Ne^{-\varphi(n)\ln n}), \tag{3.22}$$

так как, согласно эргодическому принципу,

$$\sup_{\omega \in \Omega_k^{(n)},\, A \in \tilde{F}_l^{(n)}} \left|P_{kl}(\omega, A) - P_{0l}(A)\right| \leqslant e^{-\alpha^{(n)}(l-k)};$$

Пусть $r<k<l$ есть какая нибудь тройка чисел l_{i-1}, k_i, l_i, $i=1, 2, \ldots, N$.

Имеем, очевидно,

$$\int\limits_{\Omega_l^{(n)}} f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid F_r^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) P(d\omega_l) = f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid F_r^{(n)}\right).$$

Пусть в момент времени r фиксируется какое нибудь состояние $\omega_r \in \Omega_r^{(n)}$. Соответствующее значение случайной величины $f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid F_r^{(n)}\right)$ или $f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid F_r^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)$ обозначим через $f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right)$ или через $f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r \times F_l^{(n)}\right)$ соответственно. Аналогично будем обозначать моменты случайной величины $S_{rl}^{(n)}$ при фиксированном ω_r. Но последние могут быть плохо ограничены или просто не существовать. Для этого в условиях леммы 7 мы и требуем, чтобы было

$$\begin{gathered} |X_i^{(n)}| \leqslant K_n, \quad \text{если} \quad i \in \mathfrak{M}, \\ |X_i^{(n)}| \leqslant n, \quad \text{если} \quad i \bar{\in} \mathfrak{M}, \\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Здесь

$$K_n = \sqrt{\mathbf{D} S_n} \frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^8(n) \ln^{\frac{7}{2}} n} \tag{3.24}$$

и множество индексов

$$\mathfrak{M} = \left\{ i : l_j - \left[\frac{\varphi(n) \ln n}{\alpha^{(n)}} \right] \leqslant i \leqslant l_j + \left[\frac{\varphi(n) \ln n}{\alpha^{(n)}} \right],\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N \right\}. \tag{3.25}$$

Получаем

$$f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right) = 1 - \frac{t^2}{2} \mathbf{D}\left(S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right) + \frac{t^3}{6} \vartheta \mathbf{M}\left(|S_{rl}^{(n)}|^3 \mid \omega_r\right), \tag{3.26}$$

$$\omega_r \in \Omega_r^{(n)}, \quad |\vartheta| \leqslant 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{D}\left(S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right) - \mathbf{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid \omega_r\right)\right| \leqslant \mathbf{D}\left(S_{rk}^{(n)} \mid \omega_r\right) + \\ + 2\sqrt{\mathbf{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid \omega_r\right) \mathbf{D}\left(S_{rk}^{(n)} \mid \omega_r\right)}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Далее

$$\left|\mathbf{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid \omega_r\right) - \mathbf{D} S_{kl}^{(n)}\right| \leqslant \left|\mathbf{M}\left(S_{kl}^{(n)2} \mid \omega_r\right) - \mathbf{M} S_{kl}^{(n)2}\right| + \left(\mathbf{M}\left(S_{kl}^{(n)} \mid \omega_r\right)\right)^2. \tag{3.28}$$

Так как

$$\left|\mathbf{M}\left(S_{kl}^{(n)2} \mid \omega_r\right) - \mathbf{M} S_{kl}^{(n)2}\right| = \left| \int\limits_{\Omega_k^{(n)}} \mathbf{M}\left(S_{kl}^{(n)2} \mid F_k^{(n)}\right) \left(P_{rk}^{(n)}(\omega_r,\ d\omega) - P_{0k}^{(n)}(d\omega)\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup \left|\mathbf{M}\left(S_{kl}^{(n)2} \mid F_k^{(n)}\right)\right| \sup_{\omega_r, A} \left|P_{rk}^{(n)}(\omega_r,\ A) - P_{0k}^{(n)}(A)\right| \ll n^4 e^{-\varphi(n) \ln n}$$

и аналогично

$$\left|\mathbf{M}\left(S_{kl}^{(n)} \mid \omega_r\right)\right| = \left|\mathbf{M}\left(S_{kl}^{(n)} \mid \omega_r\right) - \mathbf{M} S_{kl}^{(n)}\right| \ll n^2 e^{-\varphi(n) \ln n},$$

то из (3.13), (3.19), (3.37) и (3.38), выводим, что

$$\sup_{\omega_r}\left|\mathbf{D}\left(S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right)-\mathbf{D}\, S_{kl}^{(n)}\right| \ll K_n^2(k-r)^2+$$

$$+K_n(k-r)\sqrt{\mathbf{D}\, S_{kl}^{(n)}} \ll \mathbf{D}\, S_n \frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^{11}(n)\ln^4 n} \ll \frac{\mathbf{D}\, S_{kl}^{(n)}}{\varphi^3(n)\ln n}. \qquad (3.29)$$

Покажем, что

$$\sup_{\omega_r}\mathbf{M}\left(|S_{rl}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right) \leqslant 2\,\mathbf{M}\,|S_{kl}^{(n)}|^3. \qquad (3.30)$$

Имеем

$$\mathbf{M}\left(|S_{rl}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right) \leqslant \mathbf{M}\left(|S_{kl}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right)+\mathbf{M}\left(|S_{rk}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right)+$$

$$+3\,\mathbf{M}\left(|S_{kl}^{(n)2}\, S_{rk}^{(n)}|\,\middle|\,\omega_r\right)+3\,\mathbf{M}\left(|S_{kl}^{(n)}\, S_{rk}^{(n)2}|\,\middle|\,\omega_r\right). \qquad (3.31)$$

Согласно неравенству Гёльдера

$$\mathbf{M}\left(|S_{kl}^{(n)2}\, S_{rk}^{(n)}|\,\middle|\,\omega_r\right) \leqslant \left(\mathbf{M}\left(|S_{kl}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right)\right)^{\frac{2}{3}}\left(\mathbf{M}\left(|S_{rl}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right)\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\mathbf{M}\left(|S_{rk}^{(n)2}\, S_{kl}^{(n)}|\,\middle|\,\omega_r\right) \leqslant \left(\mathbf{M}\left(|S_{rk}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right)\right)^{\frac{2}{3}}\left(\mathbf{M}\,|S_{kl}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad (3.32)$$

и в силу эргодичности

$$\left|\mathbf{M}\left(|S_{kl}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right)-\mathbf{M}\,|S_{kl}^{(n)}|^3\right| \ll n^6 e^{-\varphi(n)\ln n}. \qquad (3.33)$$

Поэтому, заменив везде $\mathbf{M}\left(|S_{kl}^{(n)}|^3\,\middle|\,\omega_r\right)$ через $\mathbf{M}\,|S_{kl}^{(n)}|^3$ и учитывая, что

$$\mathbf{M}\,|S_{kl}^{(n)}|^3 \geqslant (\mathbf{D}\, S_{kl})^{\frac{3}{2}} \geqslant \frac{\mathbf{D}\, S_n^{\frac{3}{2}}\,\alpha^{(n)3}}{\varphi^{12}(n)\ln^{\frac{9}{2}} n}, \qquad (3.34)$$

а

$$\mathbf{M}\,|S_{rk}^{(n)}|^3 \ll K_n^3(r-k)^3 \leqslant \frac{\mathbf{D}\, S_n^{\frac{3}{2}}\,\alpha^{(n)3}}{\varphi^{21}(n)\ln^{\frac{15}{2}} n},$$

из (3.31) – (3.33) получаем (3.30).

Полученные оценки (3.29) и (3.30) подставляя в (3.26), получаем

$$f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right)=1-\frac{t^2}{2}\,\mathbf{D}\, S_{kl}^{(n)}+Z_{kl}^{(n)}(\omega_r), \qquad (3.35)$$

где

$$Z_{kl}^{(n)}(\omega_r)=t^2 O\left(\frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^{11}(n)\ln^4 n}\,\mathbf{D}\, S_n\right)+\frac{t^3}{3}\,\vartheta_1\,\mathbf{M}\,|S_{kl}^{(n)}|^3, \qquad |\vartheta_1| \leqslant 1.$$

У нас

$$|t| \leqslant \frac{\psi(n)\sqrt{\ln n}}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}},$$

поэтому, учитывая лемму 8 и (3.16), получаем

$$\mathbf{M}\,|S_{kl}^{(n)}|^3 \ll \frac{\mathbf{D}\, S_n(\ln\ln n)^2}{\varphi^8(n)\ln^2 n\,\alpha^{(n)}}+\frac{(\mathbf{D}\, S_n)^{\frac{3}{2}}\,\alpha^{(n)3}}{\varphi^{12}(n)\ln^{\frac{9}{2}} n}.$$

Таким образом,

$$\sup_{\omega_r}\left|Z_{kl}^{(n)}(\omega_r)\right| \ll \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^9(n)\ln^3 n}+\frac{(\ln\ln n)^2}{\psi^6(n)\sqrt{\ln n}\,\alpha^{(n)}\sqrt{\mathbf{D}S_n}} \ll \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^9(n)\ln^3 n}. \quad (3.36)$$

Подставляя (2.60) в (2.49), при $k=k_N$, $l=l_N$ получаем

$$f_n(t)=\left(1-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}S_{k_Nl_N}^{(n)}\right)\int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\int\limits_{\Omega_{l_2}^{(n)}}\cdots\int\limits_{\Omega_{l_{N-1}}^{(n)}} f\left(t,\ S_{0l_1}^{(n)}\mid F_{l_1}^{(n)}\right)\times$$

$$\times P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_1)f\left(t,\ S_{l_1l_2}^{(n)}\mid F_{l_1}^{(n)}\times F_{l_2}^{(n)}\right)P_{0l_2}^{(n)}(d\omega_2)\ldots f\left(t,\ S_{l_{N-2}l_{N-1}}^{(n)}\mid F_{l_{N-2}}^{(n)}\times F_{l_{N-1}}^{(n)}\right)\times$$

$$\times P_{0l_{N-1}}^{(n)}(d\omega_{N-1})+O\left(\frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^9(n)\ln^3 n}\int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\int\limits_{\Omega_{l_2}^{(n)}}\cdots\int\limits_{\Omega_{l_{N-1}}^{(n)}}\times\right.$$

$$\times\left|f\left(t,\ S_{0l_1}^{(n)}\mid F_{l_1}^{(n)}\right)\right|P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_1)\left|f\left(t,\ S_{l_1l_2}^{(n)}\mid F_{l_1}^{(n)}\times F_{l_2}^{(n)}\right)\right|P_{0l_2}^{(n)}(d\omega_2)\times$$

$$\left.\times\ldots\left|f\left(t,\ S_{l_{N-2}l_{N-1}}^{(n)}\mid F_{l_{N-2}}^{(n)}\times F_{l_{N-1}}^{(n)}\right)\right|P_{0l_{N-1}}^{(n)}(d\omega_{N-1})\right)+O\left(Ne^{-\varphi(n)\ln n}\right). \quad (3.37)$$

Ясно, что процесс можно продолжить, если мы оценим сверху выражение

$$\varphi_n(t)=\int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\int\limits_{\Omega_{l_2}^{(n)}}\cdots\int\limits_{\Omega_{l_N}^{(n)}}\left|f\left(t,\ S_{0l_1}^{(n)}\mid F_{l_1}^{(n)}\right)\right|P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_1)\left|f\left(t,\ S_{l_1l_2}^{(n)}\mid F_{l_1}^{(n)}\times F_{l_2}^{(n)}\right)\right|\times$$

$$\times P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_1)\ldots\left|f\left(t,\ S_{l_{N-1}l_N}^{(n)}\mid F_{l_{N-1}}^{(n)}\times F_{l_N}^{(n)}\right)\right|P_{0l_N}^{(n)}(d\omega_N).$$

Нетрудно заметить, что

$$\varphi_n(t)\leqslant\mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{0l_1}^{(n)}\mid F_{l_1}^{(n)}\right)\right|\cdot\sup_{\omega_1\in\Omega_{l_1}^{(n)}}\mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{l_1l_2}^{(n)}\mid\omega_1\times F_{l_2}^{(n)}\right)\right|\times$$

$$\times\ldots\sup_{\omega_N\in\Omega_{l_N}^{(n)}}\mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{l_{N-1}l_N}^{(n)}\mid\omega_N\times F_{l_N}^{(n)}\right)\right|. \quad (3.38)$$

Пусть, как и раньше, целые числа r, k, l означают одну из троек l_{i-1}, k_i, l_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Всегда

$$b\leqslant 1+\frac{1}{2}(b^2-1).$$

Поэтому в случае

$$b=\left|f\left(t,\ S_{rl}^{(n)}\mid\omega_r\times F_l^{(n)}\right)\right|$$

получаем

$$\left|f\left(t,\ S_{rl}^{(n)}\mid\omega_r\times F_l^{(n)}\right)\right|\leqslant 1+\frac{1}{2}\left(\left|f\left(t,\ S_{rl}^{(n)}\mid\omega_r\times F_l^{(n)}\right)\right|^2-1\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos t(x-y)\,dF_{rl}^{(n)}\left(x\mid\omega_r\times F_l^{(n)}\right)\cdot dF_{rl}^{(n)}\left(y\mid\omega_r\times F_l^{(n)}\right)-1\right).$$

Здесь

$$F_{rl}^{(n)}\left(x\mid\omega_r\times F_l^{(n)}\right)=P\left\{S_{rl}^{(n)}<x\mid\omega_r\times F_l^{(n)}\right\}.$$

Применив формулу Тэйлора, находим

$$\mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{rl}^{(n)}\,|\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right)\right| \leqslant 1-\frac{t^2}{4}\mathbf{MD}\left(S_{rl}^{(n)}-S_{rl}^{(n)\prime}\,|\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right)+$$
$$+\frac{t^3}{6}\vartheta_2\mathbf{M}\left(\mathbf{M}\left(\left|S_{rl}^{(n)}-S_{rl}^{(n)\prime}\right|^3\,\middle|\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right)\right), \tag{3.39}$$

где $S_{rl}^{(n)\prime}$ есть второй независимый экземпляр случайной величины $S_{rl}^{(n)}$.

Очевидно, что

$$\mathbf{MD}\left(S_{rl}^{(n)}-S_{rl}^{(n)\prime}\,|\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right)=2\mathbf{MD}\left(S_{rl}^{(n)}\,|\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right),$$
$$\mathbf{M}\left(\mathbf{M}\,|\,S_{rl}^{(n)}-S_{rl}^{(n)\prime}\,|^3\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right)\leqslant 8\mathbf{M}\left(|\,S_{rl}^{(n)}\,|^3\,\omega_r\right), \tag{3.40}$$
$$\mathbf{MD}\left(S_{rl}^{(n)}\,|\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right)\leqslant\mathbf{D}\left(S_{rl}^{(n)}\,|\,\omega_r\right).$$

Пусть целое ν определяется равенством

$$l-\nu=k-r=\left[\frac{\varphi(n)\ln n}{\alpha^{(n)}}\right].$$

Учитывая (3.23) и (3.40), получаем

$$\left|\mathbf{MD}\left(S_{rl}^{(n)}\,|\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right)-\mathbf{MD}\left(S_{k\nu}^{(n)}\,|\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right)\right|\ll$$
$$\ll\mathbf{D}\left(S_{\nu l}^{(n)}\,|\,\omega_r\right)+2\sqrt{\mathbf{D}\left(S_{\nu l}^{(n)}\,|\,\omega_r\right)\mathbf{D}\left(S_{k\nu}^{(n)}\,|\,\omega_r\right)}\ll$$
$$\ll K_n^2(l-\nu)^2+K_n(l-\nu)\sqrt{\mathbf{D}\left(S_{k\nu}^{(n)}\,|\,\omega_r\right)}\ll\mathbf{D}\,S_n\,\frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^{11}(n)\ln^4 n}, \tag{3.41}$$

так как

$$\mathbf{D}\left(S_{k\nu}^{(n)}\,|\,\omega_r\right)=\mathbf{D}\left(S_{k\nu}^{(n)}\right)+O\left(n^2e^{-\varphi(n)\ln n}\right)$$

и $\mathbf{D}\,S_{k\nu}^{(n)}\sim\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)}$ в силу

$$\left|\mathbf{D}\,S_{k\nu}^{(n)}-\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)}\right|\ll\mathbf{D}\,S_n\,\frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^{11}(n)\ln^4 n}. \tag{3.42}$$

Далее, из эргодичности цепи следует

$$\sup_{\omega_r}\left|\mathbf{MD}\left(S_{k\nu}^{(n)}\,|\,\omega_r\times F_l^{(n)}\right)-\mathbf{MD}\left(S_{k\nu}^{(n)}\,|\,F_l^{(n)}\right)\right|\leqslant n^2e^{-\varphi(n)\ln n}. \tag{3.43}$$

Покажем, что

$$\mathbf{MD}\left(S_{k\nu}^{(n)}\,|\,F_l^{(n)}\right)=\mathbf{D}\,S_{k\nu}^{(n)}+O\left(n^2e^{-\varphi(n)\ln n}\right). \tag{3.44}$$

У нас $\mathbf{M}\,S_{k\nu}^{(n)}=0$, поэтому

$$-\mathbf{MD}\left(S_{k\nu}^{(n)}\,|\,F_l^{(n)}\right)+\mathbf{D}\,S_{k\nu}^{(n)}=\mathbf{M}\left(\mathbf{M}\left(S_{k\nu}^{(n)}\,|\,F_l^{(n)}\right)\right)^2. \tag{3.45}$$

Имеем для $j<l$

$$\mathbf{M}\left|\mathbf{M}\left(X_j^{(n)}\,|\,F_l^{(n)}\right)\right|=\int\limits_{H^+}\mathbf{M}\left(X_j^{(n)}\,|\,F_l^{(n)}\right)P_{0l}^{(n)}(d\omega)-\int\limits_{H^-}\mathbf{M}\left(X_j^{(n)}\,|\,F_l^{(n)}\right)P_{0l}(d\omega),$$

где

$$H^+=\left\{\omega:\ \mathbf{M}\left(X_j^{(n)}\,|\,F_l^{(n)}\right)\geqslant 0\right\},\quad H^-=\Omega_l^{(n)}\setminus H^+.$$

Разумеется, что

$$H^+\in F_l^{(n)},\quad H^-\in F_l^{(n)}.$$

Тогда

$$\mathbf{M}\left|\mathbf{M}\left(X_j^{(n)} \mid F_l^{(n)}\right)\right| = \int\limits_{\Omega_j^{(n)}} \int\limits_{H^+} X_j^{(n)}(\tilde{\omega}) P_{jl}^{(n)}(\tilde{\omega},\ d\omega) P_{0j}(d\tilde{\omega}) -$$

$$- \int\limits_{\Omega_j^{(n)}} \int\limits_{H^-} X_j^{(n)}(\omega) P_{jl}^{(n)}(\tilde{\omega},\ d\omega) P_{0j}^{(n)}(d\tilde{\omega}) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_j^{(n)}} X_j^{(n)}(\tilde{\omega}) \left(P_{jl}^{(n)}(\tilde{\omega},\ H^+) - P_{jl}^{(n)}(\tilde{\omega},\ H^-)\right) P_{0j}^{(n)}(d\tilde{\omega}) =$$

$$= 2 \int\limits_{\Omega_j^{(n)}} X_j^{(n)}(\tilde{\omega}) P_{jl}^{(n)}(\tilde{\omega},\ H^+) P_{0j}(d\tilde{\omega}), \tag{3.46}$$

так как

$$\int\limits_{\Omega_\nu^{(n)}} X_j^{(n)}(\tilde{\omega}) P_{0j}^{(n)}(d\tilde{\omega}) = 0. \tag{3.47}$$

Подставляя

$$P_{jl}^{(n)}(\tilde{\omega},\ \ H^+) = P_{0l}^{(n)}(H^+) + O(e^{-\varphi(n)\ln n})$$

в (3.46) и учитывая (3.47), находим

$$\mathbf{M}\left|\mathbf{M}\left(X_j^{(n)} \mid F_l^{(n)}\right)\right| \ll \mathbf{M}\left|X_j^{(n)}\right| e^{-\varphi(n)\ln n}.$$

Если вместо $X_j^{(n)}$ положить $S_{k\nu}^{(n)}$, то, очевидно, получим

$$\mathbf{M}\left|\mathbf{M}\left(S_{k\nu}^{(n)} \mid F_l^{(n)}\right)\right| \ll \mathbf{M}\left|S_{k\nu}^{(n)}\right| e^{-\varphi(n)\ln n}.$$

У нас $|X_i^{(n)}| \leqslant n$, поэтому

$$\mathbf{M}\left(\mathbf{M}\left(S_{k\nu}^{(n)} \mid F_l^{(n)}\right)\right)^2 \ll n(\nu-k)\,\mathbf{M}\left|\mathbf{M}\left(S_{k\nu}^{(n)} \mid F_l^{(n)}\right)\right| \ll e^{-\frac{1}{2}\varphi(n)\ln n}.$$

Полученное подставляя в (3.45), получаем (3.44), после чего из (3.41), (3.43), (3.44) и, наконец, из (3.42) выводим

$$\sup_{\omega_r} \mathbf{MD}\left(S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r \times F_l^{(n)}\right) = \mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)} + O\left(\mathbf{D}\,S_n \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^{11}(n)\ln^4 n}\right). \tag{3.48}$$

Тогда из соотношений (3.39), (3.40), (3.48) получаем

$$\sup_{\omega_r} \mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r \times F_l^{(n)}\right)\right| \leqslant 1 - \frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)} + Z_{kl}^{(n)}; \tag{3.49}$$

$$|Z_{kl}^{(n)}| \ll t^2 \mathbf{D}\,S_n \frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^{11}(n)\ln^4 n} + |t|^3 \mathbf{M}\,|S_{kl}^{(n)}|^3$$

и, как и в случае (3.35),

$$|Z_{kl}^{(n)}| \ll \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^9(n)\ln^3 n}. \tag{3.50}$$

У нас выражение $x = -\frac{1}{2}t^2\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)} + Z_{kl}^{(n)}$ по обсолютной величине меньше $\frac{1}{2}$, поэтому

$$\ln(1+x) = x + \vartheta_3 x^2,\quad |\vartheta_3| \leqslant 1, \tag{3.51}$$

или

$$\sup_{\omega_r} \mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{rl}^{(n)} \mid \omega_r \times F_l^{(n)}\right)\right| \leqslant e^{\ln(1+x)} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)} + Z_{kl}^{(n)} + \frac{t^4}{2}\mathbf{D}^2 S_{kl}^{(n)} + 2Z_{kl}^{(n)2}\right\}. \qquad (3.52)$$

Тогда из (3.38), (3.52) следует

$$\varphi_n(t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}\,S_{k_il_i}^{(n)} + \sum_{i=1}^{N} Z_{k_il_i}^{(n)} + \frac{t^4}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}^2 S_{k_il_i}^{(n)} + 2\sum_{i=1}^{N} Z_{k_il_i}^{(n)2}\right). \qquad (3.53)$$

Соотношения (3.19), (3.20), (3.50) показывают, что

$$\sum_{i=1}^{N} \left| Z_{k_il_i}^{(n)}\right| \ll \frac{1}{\varphi(n)},$$

$$t^4 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}^2 S_{k_il_i}^{(n)} \ll \frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^4(n)\ln n},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left| Z_{k_il_i}^{(n)2}\right| \ll \frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^{10}(n)\ln^3 n},$$

и, наконец, вспоминая (3.21), из (3.53) выводим

$$\varphi_n(t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_n + O\left(\frac{\varphi^7(n)\ln^{\frac{7}{2}} n}{\alpha^{(n)2}\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}}\right) + O\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_n + O\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)\right).$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{0l_1}^{(n)} \mid F_{l_1}^{(n)}\right)\right| \sup_{\omega_{l_1}} \mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{l_1l_2}^{(n)} \mid \omega_1 \times F_{l_2}^{(n)}\right)\right| \ldots$$

$$\sup_{\omega_{N-1}} \mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{l_{N-1}l_N}^{(n)} \mid \omega_{N-1} \times F_{l_N}^{(n)}\right)\right| \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_n + O\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)\right), \qquad (3.54)$$

и из всего хода доказательства видно, что оно не нарушится, если из левой части выбросим фиксированное число множителей

$$\sup_{\omega_j} \mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{l_jl_{j+1}}^{(n)} \mid \omega_j \times F_{l_{j+1}}^{(n)}\right)\right|,$$

более того, из (2.78) выводим, что

$$\mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{0l_1}^{(n)} \mid F_{l_1}^{(n)}\right)\right| \sup_{\omega_1} \mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{l_1l_2}^{(n)} \mid \omega_1 \times F_{l_2}^{(n)}\right)\right| \ldots$$

$$\sup_{\omega_{j-1}} \mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{l_{j-1}l_j}^{(n)} \mid \omega_{j-1} \times F_{l_j}^{(n)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_{0l_j}^{(n)} + O\left(j\,\frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^9(n)\ln^3 n}\right)\right\}, \qquad (3.55)$$

ибо из (3.17), (3.18), как и в случае (3.21), имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{j}\mathbf{D}\,S_{k_il_i}^{(n)} - \mathbf{D}\,S_{0l_j}^{(n)}\right| \ll j\,\frac{\varphi^2(n)\ln^2 n}{\alpha^{(n)2}} + \frac{j}{\varphi^3(n)\sqrt{\ln n}}\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}.$$

Поэтому

$$\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{j}\mathbf{D}\,S^{(n)}_{k_i l_i}=\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_{0l_j}+O\Big(j\frac{\sqrt{\ln n}}{\sqrt{\alpha^{(n)}n}}\,\frac{1}{\varphi(n)}\Big) \qquad (3.56)$$

и тем самым окончательно убеждаемся в справедливости (3.55).

Теперь, пользуясь соотношениями (3.35), (3.36), (3.38), (3.50) – (3.52) и, наконец, (3.55), (3.56), можем продолжать в соотношении (3.37) начатый процесс. Получаем

$$f_n(t)=\Big(1-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S^{(n)}_{k_N l_N}\Big)\dots\Big(1-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S^{(n)}_{k_1 l_1}\Big)+$$
$$+O\Big(N\sup_{\omega,\ 1\leqslant i\leqslant N}\big|Z^{(n)}_{k_i l_i}(\omega_i)\big|\prod_{i=1}^{N}\Big(1-\frac{t^2}{2}DS^{(n)}_{k_i l_i}\Big)\Big)+$$
$$+O\Big(N\sup_{\omega_i,\ 1\leqslant i\leqslant N}\big|Z^{(n)}_{k_i l_i}(\omega_i)\big|\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_n+O\Big(\frac{1}{\psi(n)}\Big)\Big)\Big)=$$
$$=\exp\Big\{-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_n+O\Big(\frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^4(n)\ln n}\Big)\Big\}+$$
$$+O\Big(\frac{1}{\varphi(n)}\Big)\exp\Big\{-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S_n+O\Big(\frac{1}{\varphi(n)}\Big)\Big\}, \qquad (3.57)$$

так как, согласно (3.51),

$$\prod_{i=1}^{N}\Big(1-\frac{t^2}{2}\mathbf{D}\,S^{(n)}_{k_i l_i}\Big)=e^{-\frac{t^2}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbf{D}S^{(n)}_{k_i l_i}+\frac{t^4}{2}\vartheta_1\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbf{D}^2S^{(n)}_{k_i l_i}},$$

а

$$t^4\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}^2S^{(n)}_{k_i l_i}\ll\frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^4(n)\ln n};$$

Из (3.57) следует первое утверждение леммы.

Мы уже упомянули, что неравенство (3.54) не изменится, если из него левой части выбросим фиксированное число множителей. Сравнивая (3.54) и (3.57), наконец учитывая, что, согласно (3.16), всегда

$$l_i-l_{i-1}\gg\frac{n\,\alpha^{(n)4}}{\ln^4 n},$$

получаем второе утверждение леммы. Итак лемма 7 доказана. Из нее и леммы 6 нетрудно получить оценку сверху для $|\varkappa_r^{(n)}(t)|$, $r=1,\ 2,\ \dots,\ s$.

Положим

$$M_k=\begin{cases}\Big[\dfrac{\varphi(n)\ln n}{\alpha^{(n)}}\Big], & \text{если}\quad l_k>\Big[\dfrac{\varphi(n)\ln n}{\alpha^{(n)}}\Big],\\[2mm] l_k, & \text{если}\quad l_k\leqslant\Big[\dfrac{\varphi(n)\ln n}{\alpha^{(n)}}\Big].\end{cases}$$

Тогда из (2.26) и леммы 1 выводим

$$I_2\leqslant\frac{1}{|f_n(n)|^2}\Big(\prod_{\substack{k=1\\ \{h_{k-1}=0\}}}^{r-1}\mathbf{M}\Big|f\Big(t,\ S^{(n)}_{0l_k-M_k}\,\big|\,F^{(n)}_{l_k-M_k}\Big)\Big|\Big)\times$$
$$\times\Big(\prod_{k\in\mathfrak{M}}\sup\Big|f\Big(t,\ S^{(n)}_{l_k n}\,\big|\,F^{(n)}_{l_k}\Big)\Big|\Big)\Big|\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_1}}\dots\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_r}}X^{(n)}_{l_1}(\omega_1)\dots X^{(n)}_{l_r}(\omega_r)\times$$

$$\times\Big(\prod_{\substack{k=1\\ \{h_{k-1}=0\}}}^{r-1}\sup_{\omega}P^{(n)}_{l_k-M_k,\,l_k}(\omega,\ d\omega_k)\Big)\Big(\prod_{\substack{k=2\\ \{h_{k-1}\neq 0\}}}^{r}\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_{h_{k-1}}}}\cdots\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_k}}f^{(n)}_{l_k^n}(t,\ y,\ \Omega^{(n)}_n)\Big)\times$$

$$\times f^{(n)}_{0l_{h_{k-1}}}(t,\ dx)\,\nu^{(n)}_{l_{h_{k-1}}l_k}(t,\ \omega_{h_{k-1}},\ x,\ d\omega_k,\ dy)\Big|, \tag{3.58}$$

где считается, что $P^{(n)}_{0l_k}(\omega,\ A)=P^{(n)}_{0l_k}(A)$.

Рассмотрим 3 случая.

1. Пусть

$$l_k-l_{h_{k-1}}\leqslant\Big[\frac{C_{10}\ln n}{\alpha^{(n)}}\Big],\qquad k=2,\ \ldots,\ r,$$

где C_{10} — достаточно большое.

Из определения $\nu^{(n)}_{kl}(t,\ x,\ y,\ A\times B)$ следует, что

$$|\nu^{(n)}_{kl}(x,\ y,\ A\times B)|\leqslant P^{(n)}_{kl}(x,\ A)\,P^{(n)}_{kl}(y,\ B)+P^{(n)}_{kl}(x,\ B)\,P^{(n)}_{kl}(y,\ A).$$

Поэтому имеем

$$\Big|\prod_{\substack{k=2\\ \{h_{k-1}\neq 0\}}}^{r}\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_{h_{k-1}}}}\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_k}}f^{(n)}_{l_k^n}(t,\ y,\ \Omega^{(n)}_n)\,f^{(n)}_{0l_{h_{k-1}}}(t,\ dx)\,\nu^{(n)}_{l_{h_{k-1}}l_k}(t,\ \omega_{h_{k-1}}\times A,\ dy)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{\substack{k=2\\ \{h_{k-1}\neq 0\}}}^{r}\mathbf{M}\Big|f\Big(t,\ S^{(n)}_{0l_{h_{k-1}}-M_{h_{k-1}}}\,\Big|\,F^{(n)}_{l_{n_{k-1}}M_{h_{k-1}}}\Big|\sup\Big|f\Big(t,\ S^{(n)}_{l_k^n}\,\Big|\,F^{(n)}_{l_k}\Big)\Big|\times$$

$$\times\Big(P^{(n)}_{l_{h_{k-1}}l_k}(\omega_{h_{k-1}},\ A)+\sup_x P^{(n)}_{l_{h_{k-1}}-M_{h_{k-1}}l_k}(x,\ A)\Big).$$

Так как

$$\sum_k(l_k-l_{h_{k-1}})<\frac{n\,\alpha^{(n)4}}{\ln^4 n},$$

то, используя лемму 8, получаем

$$I_2\leqslant 2\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_1}}\cdots\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_r}}\Big|X^{(n)}_{l_1}(\omega_1)\ldots X^{(n)}_{l_r}(\omega_r)\Big|\times$$

$$\times\prod_{\substack{k=1\\ \{h_{k-1}=0\}}}^{r-1}P^{(n)}_{0l_k}(d\omega_k)\Big[\prod_{\substack{k=2\\ \{h_{k-1}\neq 0\}}}^{r}P^{(n)}_{l_{h_{k-1}},\,l_k}(\omega_{h_{k-1}},\ d\omega_k)+\prod_{\substack{k=2\\ \{h_{k-1}\neq 0\}}}^{r}P^{(n)}_{0l_k}(d\omega_k)\Big]+$$

$$+O\Big(e^{-\frac{C_{10}}{2}\ln n}\Big)\ll\prod_{i=1}^{r}\mathbf{M}\,|X^{(n)}_{l_i}|^r\ll 1. \tag{3.59}$$

2. Если

$$l_k-l_{h_{k-1}}\leqslant\Big[\frac{\varphi^3(n)\ln n}{\tilde\alpha^{(n)}}\Big],\qquad k=2,\ \ldots,\ r,$$

то для пары $l_{h_{k-1}}$, l_k, удовлетворяющей неравенству

$$\Big[\frac{C_{10}\ln n}{\tilde\alpha^{(n)}}\Big]<l_k-l_{h_{k-1}}\leqslant\Big[\frac{\varphi^3(n)\ln n}{\tilde\alpha^{(n)}}\Big],$$

согласно лемме 5, будем иметь

$$\sup_{x,\, \omega_{h_{k-1}},\, |\varphi_t| \leqslant 1} \left| \int_{\Omega_{l_k}^{(n)}} \int_{\Omega_{l_k}^{(n)}} \varphi_t(\omega_k, y) \left| X_{l_k}^{(n)r}(\omega_k) \right| \nu_{l_{h_{k-1}} l_k}^{(n)}(t, \omega_{h_{k-1}}, x, d\omega_k, dy) \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\tilde{\alpha}^{(n)}\left(l_k - \left[\frac{C_{10} \ln n}{\tilde{\alpha}^{(n)}}\right] - l_{h_{k-1}}\right)} \left(\int_{\Omega_{l_k}^{(n)}} P_{0 l_k}^{(n)}(d\omega_k) \left| X_k^{(n)}(\omega_k) \right|^r \left(1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + O\left(n^2 e^{-C_{10} \ln n}\right)\right) \ll e^{-\tilde{\alpha}^{(n)}\left(l_k - \left[\frac{C_{10} \ln n}{\tilde{\alpha}^{(n)}}\right] - l_{h_{k-1}}\right)}.$$

Отсюда, действуя как и в случае 1, получаем

$$I_2 \ll \prod_{k=2}^{r} e^{-\tilde{\alpha}^{(n)}\left(l_k - l_{h_{k-1}} - \left[\frac{C_{10} \ln n}{\tilde{\alpha}^{(n)}}\right]\right)}. \tag{3.60}$$

$$\left\{ l_k - l_{h_{k-1}} > \left[\frac{C_{10} \ln n}{\tilde{\alpha}^{(n)}}\right] \right\}.$$

3. Если же хоть одна пара

$$l_k - l_{h_{k-1}} > \left[\frac{\varphi^3(n) \ln n}{\tilde{\alpha}^{(n)}}\right],$$

то учитывая, что

$$\sup_{\omega_{h_{k-1}},\, x} \left\| \nu_{l_{h_{k-1}} l_k}^{(n)}(t, \omega_{h_{k-1}}, x, \cdot, \cdot) \right\| \leqslant e^{-\tilde{\alpha}^{(n)}(l_k - l_{h_{k-1}})},$$

$$\sup \left| X_k^{(n)}(\omega) \right| \leqslant n, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

и, согласно (3.1),

$$|f_n(t)| \gg e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(n) \ln n},$$

из (3.58) выводим

$$I_2 \ll \prod_{k=2}^{r} e^{-\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n)}(l_k - l_{h_{k-1}})}, \tag{3.61}$$

$$\left\{ l_k - l_{h_{k-1}} \quad \frac{\varphi^3(n) \ln n}{\tilde{\alpha}^{(n)}} \right\}.$$

Из (3.59), (3.60), (3.61), (2.26) и леммы 6 окончательно получаем

$$\left| \varkappa_r^{(n)}(t) \right| \ll \frac{n \ln^{r-1} n}{(\alpha^{(n)})^{r-1}} + \sum_{L \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_r \leqslant n} e^{-\frac{1}{2}\alpha^{(n)}(l_r - l_1)} \ll$$

$$\ll \frac{n \ln^{r-1} n}{(\tilde{\alpha}^{(n)})^{r-1}}; \qquad r = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.62}$$

Замечание. Если условные моменты

$$\mathbf{M}\left(|X_k|^s \middle| F_{k-1}^{(n)} \right), \quad k = 2, \ldots, n, \quad \mathbf{M}|X_1|^s \quad (s \geqslant 3)$$

с вероятностью 1 равномерно ограничены по k и n, то из хода доказательства неравенства (3. 62) легко следует, что в этом случае

$$\left| \varkappa_r^{(n)}(t) \right| \ll \frac{n}{(\tilde{\alpha}^{(n)})^{r-1}}; \qquad r = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.63}$$

Последняя оценка просто следует из лемм 5, 6 и (3.58), если положить

$$M_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad l_k > 1, \\ l_k, & \text{если} \quad l_k \leqslant 1. \end{cases}$$

Теперь можно непосредственно приступить к доказательству теоремы 5. Лемму 7, а тем самым оценки (3.62), (3.63), мы доказали при условии (3.23). Но упомянутое ограничение не нарушает справедливости утверждений теоремы 5. Действительно, в противном случае мы можем случайные величины $X_i^{(n)}$ заменить величинами

$$Y_i^{(n)} = \begin{cases} X_i^{(n)}, & \text{если} \quad |X_i^{(n)}| \leqslant K_n \quad \text{при} \quad i \in \mathfrak{M}, \\ & \text{если} \quad |X_i^{(n)}| \leqslant n \quad \text{при} \quad i \notin \mathfrak{M}, \\ 0 & \text{в других случаях}, \end{cases}$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда

$$X_i^{(n)} = Y_i^{(n)} + Z_i^{(n)}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

и ошибка от замены характеристической функции суммы S_n характеристическою функцией суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^{(n)}$ не превосходит выражения

$$\left| f_n(t) - \mathbf{M}\, e^{it \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^{(n)}} \right| \ll |t| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M} |Z_i^{(n)}| \ll$$

$$\ll \left(\sum_{i \in \mathfrak{M}} \int\limits_{|x| > K_n} |x|\, dF_i^{(n)}(x) + \sum_{i \notin \mathfrak{M}} \int\limits_{|x| \geqslant n} |x|\, dF_i^{(n)}(x) \right) \ll$$

$$\ll |t| \left(N \frac{\varphi(n) \ln n}{\alpha^{(n)}} \frac{1}{K_n^{s-1}} + \frac{1}{n^{s-2}} \right) \ll |t| \frac{\varphi^{8s+1}(n) \ln^{\frac{7}{2}s + \frac{1}{2}} n}{(\sqrt{\mathbf{D}S_n}\, \alpha^{(n)\,2})^{s-1} \alpha^{(n)\,3} \sqrt{\mathbf{D}S_n}}, \tag{3.64}$$

входящего в остаточный член соотношения (20), если только в лемме 7 вместо функции $\varphi(n)$ положить функцию $\psi(n)$ из теоремы 5. Все выводы леммы 7 останутся справедливыми, так как очевидно, что $\psi(n) \leqslant \varphi(n)$.

Как уже отмечалось, существуют логарифмические производные

$$\varkappa_k^{(n)}(t) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \ln f_n(t)$$

характеристической функции $f_n(t)$ суммы S_n и

$$|\varkappa_k^{(n)}(t)| \leqslant C_k \frac{n \ln^{k-1} n}{\tilde{\alpha}^{(n)\,k-1}}. \tag{3.65}$$

Здесь

$$|t| \leqslant \frac{\psi(n) \sqrt{\ln n}}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} = \Theta_n, \qquad 1 \leqslant k \leqslant s,$$

постоянное C_k зависит только от k. Поэтому для $|t| \leqslant \Theta_n$ имеем

$$\ln f_n(t) = \sum_{\nu=2}^{s-1} \frac{\varkappa_\nu^{(n)}}{\nu!} (it)^\nu + \frac{1}{s!} \varkappa_s^{(n)}(\vartheta t)(it)^s,$$

где

$$0 < \vartheta < 1, \quad \varkappa_\nu^{(n)} = \varkappa_\nu^{(n)}(0).$$

Отсюда при $|t| \le \sqrt{D_n}\,\Theta$, положив для краткости $D_n = \mathbf{D}\,S_n$, получаем

$$\ln f_n\left(\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{\nu=3}^{s-1} \frac{\varkappa_\nu^{(n)}}{\nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{D_n}}\right)^\nu + \frac{1}{s!}\varkappa_s^{(n)}\left(\vartheta\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right)\left(i\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right)^s.$$

В силу (3.65) величины

$$\lambda_{\nu+2}^{(n)} = \frac{\varkappa_{\nu+2}^{(n)} D_n^{\nu-1}\tilde{\alpha}^{(n)2\nu}}{n^\nu \ln^{2\nu} n} \ll \left(\frac{D_n\tilde{\alpha}^{(n)}}{n\ln n}\right)^{\nu-1} \ll \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s-3,$$

а также и величина

$$\lambda_s^{(n)}\left(\vartheta\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right) = \frac{\varkappa_s^{(n)}\left(\vartheta\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right) D_n^{s-3}\tilde{\alpha}^{(n)2(s-2)}}{n^{s-2}\ln^{2(s-2)} n}$$

будут ограничены по n. Если

$$L^{(n)} = \sup_{\left|\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right| \le \Theta} \left|\lambda_s^{(n)}\left(\vartheta\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right)\right|,$$

то в дальнейшем полагаем

$$K = \max\left(L^{(n)}, |\lambda_3^{(n)}|, \ldots, |\lambda_{s-1}^{(n)}|\right). \tag{3.66}$$

После новых обозначений имеем

$$\ln f_n\left(\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{\lambda_{\nu+2}^{(n)}}{\nu!}(it)^{\nu+2}\left(\frac{1}{\tilde{r}_n}\right)^\nu +$$

$$+ \frac{\vartheta_1}{s!}\lambda_s^{(n)}\left(\vartheta\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right)|t|^s\left(\frac{1}{\tilde{r}_n}\right)^{s-2},$$

$$\tilde{r}_n = \frac{r_n}{\ln^2 n}, \quad r_n = \frac{(\sqrt{D_n})^3\,\tilde{\alpha}^{(n)2}}{n};$$

Так как

$$\tilde{\alpha}^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{7}} (\ln\ln n)^{\frac{1}{7}} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

то

$$\frac{1}{\tilde{r}_n} \ll \frac{n\ln^2 n}{n^{\frac{3}{2}}\tilde{\alpha}^{(n)\frac{7}{2}}} = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}\,\tilde{\alpha}^{(n)\frac{7}{2}}} = o\left(\left(\sqrt{\ln n\ln\ln n}\right)^{-1}\right).$$

Пусть

$$V = V(z) = \ln\left\{f_n\left(\frac{tz}{\sqrt{D_n}}\right)^{\frac{1}{z^2}} e^{\frac{t^2}{2}}\right\} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{\lambda_{\nu+2}^{(n)}(it)^{\nu+2}}{(\nu+2)!}\left(\frac{z}{\tilde{r}_n}\right)^\nu + \frac{t^s}{s!}\vartheta_1\lambda_s^{(n)}\left(\vartheta\frac{tz}{\tilde{r}_n}\right)^{s-2}, \tag{3.67}$$

причем $|z| \le 1$ и действительное.

Если t считать фиксированным, то последняя формула дает разложение $V(z)$ в ряд по степеням z с остаточным членом порядка z^{s-2}. Следовательно, существует подобное разложение и для функции $e^{V(z)}$ в интервале $|z| \le 1$:

$$e^{V(z)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\cdot-3} P_{n\nu}(it)\left(\frac{z}{\tilde{r}_n}\right)^\nu + R_{s-z}^{(n)}(z),$$

причем

$$P_{n1}(it) = \frac{\lambda_3^{(n)}}{3!}(it)^3,$$

$$P_{n2}(it)\,P_{n1}^2(it) + \frac{1}{12}\lambda_4^{(n)}$$

и т. д., где $R_{s-2}(z)=O(z^{s-2})$ при $z\to 0$. Учитывая (3.66), замечаем, что выражение (3.67) для $V(z)$ мажорируется соотношением

$$K\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{|t|^{\nu+2}}{(\nu+2)!}\left(\frac{|z|}{\tilde r_n}\right)^{\nu}$$

или, тем более, рядом

$$K\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|t|^{\nu+2}}{(\nu+2)!}\left(\frac{|z|}{\tilde r_n}\right)^{\nu}\leqslant K\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|t|^{\nu+3}}{(\nu+3)!}\left(\frac{|z|}{\tilde r_n}\right)^{\nu+1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K}{6}|t|^3\frac{|z|}{\tilde r_n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{|t|\,|z|}{\tilde r_n}\right)^{\nu}=K_1|t|^3\frac{|z|}{\tilde r_n}e^{\frac{|t|\,|z|}{\tilde r_n}},$$

где

$$K_1=\frac{K}{6}.$$

Следовательно ряд для $v^j(z)$ мажорируется рядом

$$K_1^j|t|^{3j}\left(\frac{|z|}{\tilde r_n}\right)^j\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(j\frac{|t|\,|z|}{\tilde r_n}\right)^{\nu}\leqslant K_1^j|t|^{3j}\left(\frac{|z|}{\tilde r_n}\right)^j e^{j\frac{|t|\,|z|}{\tilde r_n}}. \tag{3.68}$$

Последние замечания позволяют оценить $R^{(n)}_{s-2}(2)$. Имеем

$$e^{V(z)}=\sum_{\nu=0}^{s-3}\frac{V^{\nu}(z)}{\nu!}+\vartheta_3V^{(s-2)}(z)e^{|V(z)|},\qquad |\vartheta_3|\leqslant\frac{1}{(s-2)!}.$$

Пусть далее

$$\sum_{\nu=0}^{s-3}\frac{V^{\nu}(z)}{\nu!}-\left(1-\sum_{\nu=1}^{s-3}P_{\nu n}(it)\left(\frac{z}{\tilde r_n}\right)^{\nu}\right)=\omega(z).$$

Кроме того очевидно, что

$$\omega(z)=R^{(n)}_{s-2}(z)-\vartheta^3\left(V(z)\right)^{s-2}e^{|V(z)|} \tag{3.69}$$

и содержит степени z только начиная с $s-2$-ой.

$$|\omega(r)|\leqslant\sum_{j-1}^{s-2}K_1^j\left(\frac{|t|^3|z|}{\tilde r_n}\right)^j\sum_{\nu=s-2-j}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(j\frac{|tz|}{\tilde r_n}\right)^{\nu}.$$

У нас

$$\frac{j|t|\,|z|}{\tilde r_n}=o\left(\frac{\psi(n)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)$$

и

$$\sum_{\nu=s-z-j}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{j|tz|}{\tilde r_n}\right)\leqslant\left(\frac{j|tz|}{\tilde r_n}\right)^{s-z-j}.$$

$$\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+s-z-)!}\left(o\left(\frac{\psi(n)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)\right)^{\nu}\leqslant 2\left(\frac{s|tz|}{\tilde r_n}\right)^{s-z-j};$$

Поэтому

$$|\omega(z)|\leqslant 2\left(\frac{s|tz|}{\tilde r_n}\right)^{s-2}\sum_{j=1}^{s-2}K_1^j|t|^{3j}\left(\frac{|z|}{\tilde r_n}\right)^j\left(\frac{s|tz|}{\tilde r_n}\right)^{-j}\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{s|tz|}{\tilde r_n}\right)^{s-2}\sum_{j=1}^{s-2}K_1^j\left(|t|^2\frac{1}{s}\right)^j;$$

Последняя сумма является суммой членов геометрической прогресии и поэтому

$$\sum_{j=1}^{s-2} K_1^j\left(|t|^2\frac{1}{s}\right)^j < (s-2)\left(K_1|t|^2\frac{1}{s}+K_1^{s-2}t^{2(s-2)}\frac{1}{s^{s-2}}\right).$$

Таким образом окончательно получаем

$$|\omega(z)| < 2\left(\frac{s|t||z|}{\tilde{r}_n}\right)^{s-2}(s-2)\left(K_1|t|^2\frac{1}{s}+K_1^{s-2}|t|^{2(s-2)}\frac{1}{s^{s-2}}\right) <$$

$$< 2K_1s^{s-2}\left(\frac{1}{\tilde{r}_n}\right)^{s-2}\left(|t|^s+\left(\frac{K_1}{s}\right)^{s-2}|t|^{3(s-2)}\right). \qquad (3.70)$$

Что касается $V^{(s-2)}(z)e^{|V(z)|}$, то, согласно (3.68), имеем

$$\left|\left(V(z)\right)^{s-2}e^{|V(z)|}\right| < K_1^{s-2}\left(\frac{|t|^3|z|}{\tilde{r}_n}\right)^{s-2}e^{\frac{(s-2)|tz|}{\tilde{r}_n}+|V(z)|} \ll$$

$$\ll (K_1|t|^3)^{s-2}\left(\frac{1}{\tilde{r}_n}\right)^{s-2}e^{o\left(\frac{\psi(n)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)+|V(z)|}$$

и ввиду того, что

$$|V(z)| \ll K_1|t|^3\frac{1}{\tilde{r}_n} = o\left(|t|^2\frac{\psi(n)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right),$$

окончательно получаем

$$|V(z)|^{s-2}e^{|V(z)|} < K_1^{s-2}|t|^{s-2}|t|^{3(s-2)}\left(\frac{1}{\tilde{r}_n}\right)^{s-2}e^{o\left(t^2\frac{\psi(n)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)}. \qquad (3.71)$$

Соотношения (3.69)—(3.71) дают

$$|R^{(n)}(z)| < 2K_1s^{s-2}\left(\frac{1}{\tilde{r}_n}\right)^{s-2}\left(|t|^s+\left|\frac{K_1}{s}\right|^{s-3}|t|^{3(s-2)}+\right.$$

$$\left.+K_2^{s-2}|t|^{3(s-2)}e^{o\left(t^2\frac{\psi(n)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)}\right).$$

Согласно (3.67) и (3.67а), имеем

$$\left|J_n\left(\frac{tz}{\sqrt{D_n}}\right)^{\frac{1}{z^2}}-e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_{\nu n}(it)\left(\frac{z}{\tilde{r}_n}\right)^{\nu}\right)\right| = |R(z)|e^{-\frac{t^2}{2}},$$

Отсюда при $z=1$ получаем

$$f_n\left(\frac{t}{\sqrt{D_n}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_\nu(it)\left(\frac{1}{\tilde{r}_n}\right)^{\nu}\right)+$$

$$+\Theta\cdot\left(\frac{1}{\tilde{r}_n}\right)^{s-2}\left(|t|^s+|t|^{3(s-2)}+|t|^{3(s-2)}e^{o\left(t^2\frac{\psi(n)}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)}\right)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}};$$

Здесь Θ ограничена по n, зависит от s и, кроме того,

$$|\Theta| \ll \max\left(L^{(n)}, |\lambda_3^{(n)}|, \ldots, |\lambda_{s-1}^{(n)}|\right),$$

где

$$\left|\lambda_{\nu+z}^{(n)}\right| = \frac{|\varkappa_{\nu+2}|D_n^{v-1}\tilde{\alpha}^{(n)2v}}{n^\nu\ln^{2\nu}n}, \quad \nu=1, 2, \ldots, s-3,$$

и

$$L^{(n)} \ll \left(\frac{D_n\tilde{\alpha}^{(n)}}{n\ln n}\right)^{s-3}.$$

Полученное, вместе с (3.64), доказывает теорему 5.

Доказательство теоремы 6 следует из хода доказательства теоремы 5. Действительно, вместо оценки (3.62) в этом случае имеем оценку (3.63), согласно замечанию на странице 256. Кроме того, на странице 248 отмечалось цель ограничений (3.23). В этом случае достаточно только требования $\left|X_k^{(n)}\right| \leqslant n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, нужного для вывода равенства (3.44). Следовательно, вместо оценки (3.54) получаем оценку

$$\left| f_n(t) - \mathbf{M}e^{it\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^{(n)}} \right| \ll \frac{|t|}{n^{s-2}};$$

Этим теорема 6 доказана.

ГЛАВА II

ЛОКАЛНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

1. Некоторые леммы

Пусть как и прежде $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ — последовательность случайных величин, связанных в цепь Маркова с n моментами времени, пространствами состояний $\left(\Omega_i^{(n)}, \tilde{F}_i^{(n)}\right)$ и коэффициентом эргодичности $\alpha^{(n)}$, причем

$$0 < \sigma \leqslant \mathbf{D}X_k^{(n)} < \infty, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

В дальнейшем будем считать, что при любом $k = 1, \ldots, n$ среднее $\mathbf{M}X_k^{(n)} = 0$. Пусть

$$S_{kl}^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} + \ldots + X_l^{(n)}$$

при $0 \leqslant k < l \leqslant n$. Определим число $\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)$ как математическое ожидание условной дисперсии $\mathbf{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)$ и $\tilde{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)$ — как дисперсию случайной величины $\mathbf{M}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)$, т. е

$$\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) = \mathbf{MD}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right),$$

$$\tilde{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) = \mathbf{DM}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right). \tag{1.2}$$

Под $F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}$ здесь понимается декартовое произведение.

Известно, что

$$\mathbf{D}S_{kl}^{(n)} = \bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) + \tilde{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right). \tag{1.3}$$

Лемма 1. *Если выполнено* (1.1), *то существует постоянное* $c_1 > 0$ *такое, что*

$$\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \geqslant c_1 \alpha^{(n)} \sum_{j=k+1}^{l-1} \alpha_{kj}^{(n)}. \tag{1.4}$$

Р. Л. Добрушиным изучалась дисперсия $\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_l^{(n)}\right)$. Им получена оценка

$$\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_l^{(n)}\right) \geqslant c_2 \alpha^{(n)} (l - k), \tag{1.5}$$

где c_2 — положительное постоянное. Оценка (1.4) является своего рода обобщением (1.5). И вообще результаты настоящего параграфа представляют нам нужные обобщения или некоторые изменения результатов Р. Л. Добрушина. А так как эти обобщения местами не очевидны, то нам придется их доказать.

Доказательство леммы 1. Для простоты мы обобщим результат (1.5) в случае счетного числа состояний, так как в общем случае все делается совершенно так же. Нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть задача цепь Маркова с тремя моментами времени и счетными множествами состояний Ω_1, Ω_2, Ω_3. Пусть F_1, F_2, F_3. σ — алгебры подмножеств из Ω_1, Ω_2, Ω_3, соответственно и A_k^i событие, состоящее в том, что в k-й момент времени система находится в состоянии $\omega^i \in \Omega_k$, $k=1, 2, 3$, $i=1, 2, \ldots$. Положим*

$$p_k(i)=P\left\{A_k^i\right\}, \quad p_{kl}(i, j)=P\left\{A_l^j | A_k^i\right\},$$

$$\alpha_{kl}=\inf_{i, r}\sum_{j=1}^{\infty}\min\left(p_{kl}(i, j), p_{kl}(r, j)\right), \tag{1.6}$$

$$i=1, 2, \ldots, \quad k, l=1, 2, 3, \quad k<l.$$

Пусть, наконец, на Ω_2 задача случайная величина X, имеющая конечную дисперсию. Тогда

$$\overline{D}(X | F_1 \times F_3) \geqslant \frac{1}{32}\alpha_{12}\alpha_{23}DX. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть условие (A_k^i) состоит в том, что событие A_k^i фиксированно. Пусть m^i — медиана случайной величины X при условии (A_1^i) и

$$H^i=\{j: X(\omega^j)\leqslant m^i\},$$

$$\overline{H}^i=\{j: X(\omega^j)<m^i\}. \tag{1.8}$$

Так как

$$\mathbf{D}(X | A_1^i)=\sum_j\left(X(\omega^j)-\mathbf{M}(X | A_1^i)\right)^2 p_{12}(i, j)\leqslant\sum_j\left(X(\omega^j)-m^i\right)^2 p_{12}(i, j),$$

то для определенности допустим, что

$$\sum_{j\in\overline{H}_1^i}\left(X(\omega^j)-m^i\right)^2 p_{1,2}(i, j)\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{D}(X | A_1^i). \tag{1.9}$$

Здесь номер i берется таким, чтобы $\mathbf{D}(X | A_1^i)$ было конечной. Пусть

$$M^{ik}=\mathbf{M}(X | A_1^i A_3^k).$$

1 случай: $M^{ik}\geqslant m^i$. Имеем:

$$p_{13}(i, k)\mathbf{D}(X | A_1^i A_3^k)=p_{13}(i, k)\sum_j\mathbf{P}\{A_2^j | A_1^i A_3^k\}\left(X(\omega^j)-M^{ik}\right)^2=$$

$$=\sum_j p_{12}(i, j)p_{23}(j, k)\left(X(\omega^j)-M^{ik}\right)^2\geqslant\sum_{j\in\overline{H}^i}p_{12}(i, j)p_{23}(j, k)\left(X(\omega^j)-\right.$$

$$\left.-M^{ik}\right)^2+(m^i-M^{ik})^2\sum_{j\in H^i}p_{12}(i, j)p_{23}(j, k).$$

Пусть

$$p_{12}(i,\ H^i)=\sum_{j\in H^i} p_{12}(i,\ j),$$

$$p_{23}(H^i,\ k)=\frac{1}{p_{12}(i,\ H^i)}\sum_{j\in H^i} p_{12}(i,\ j)p_{23}(j,\ k).$$

Из (1.8) следует, что

$$p_{12}(i,\ H^i)\geqslant\sum_{j\in\overline{H}^i} p_{12}(i,\ j) \tag{1.10}$$

и, по определению,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\min\left(p_{23}(j,\ k),\ p_{23}(H^i,\ k)\right)\geqslant\inf_{i,r}\sum_{k=1}^{\infty}\min\left(p_{23}(i,\ k),\ p_{23}(r,\ k)\right). \tag{1.11}$$

Учитывая (1.10) и то, что для любых a и b всегда $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$ имеем

$$p_{13}(i,\ k)\mathbf{D}(X\,|\,A_1^iA_3^k)\geqslant\sum_{j\in\overline{H}^i} p_{12}(i,j)p_{23}(j,k)\left(X(\omega^j)-M^{ik}\right)^2+$$

$$+(m^i-M^{ik})^2p_{23}(H^i,\ k)\sum_{j\in\overline{H}^i} p_{12}(i,\ j)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j\in\overline{H}^i} p_{12}(i,\ j)\min\left(p_{23}(j,\ k),\ p_{23}(H_{i,k})\right)\left(X(\omega^j)-m^i\right)^2. \tag{1.12}$$

В случае $M^{ik}<m^i$ последнее неравенство справедливо очевидным образом. Поэтому, суммируя (1.12) по всем k и учитывая (1.11), (1.6), (1.19) получаем

$$\mathbf{MD}(X\,|\,A_1^i\times F_3)\geqslant\frac{1}{4}\alpha_{23}D(X\,|\,A_1^i),$$

это после усреднения по i дает

$$\overline{D}(X\,|\,F_1\times F_3)\geqslant\frac{1}{4}\alpha_{23}\mathbf{MD}(X\,|\,F_1). \tag{1.13}$$

Оценим снизу $\mathbf{MD}\ (X\,|\,F_1)$. Покажем, что

$$\mathbf{MD}(X\,|\,F_1)\geqslant\frac{1}{8}\alpha_{12}\mathbf{D}X. \tag{1.14}$$

Случайная величина $\mathbf{M}(X\,|\,F_1)$ принимает значения $M^i=\mathbf{M}(X\,|\,A_1^i)$ с вероятностями $p_1(i)$. Пусть m — ее медиана,

$$H=\{\,i:M^i\leqslant m\,\},$$

$$\overline{H}=\{\,i:M^i>m\,\}. \tag{1.8}$$

Как и раньше, не нарушая общности, можно допустить, что

$$\sum_{i\in\overline{H}}(M^i-m)^2p_1(i)\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{DM}(X\,|\,F_1), \tag{1.9}$$

ибо в противоположном случае доказательство аналогично.

Имеем

$$\mathbf{MD}(X\mid F_1)=\sum_i p_1(i)\,\mathbf{D}(X\mid A_1^i)=\sum_j\sum_i p_1(i)\,p_{12}(i,j)\Big(X(\omega^j)-M^i\Big)^2. \quad (1.15)$$

Обозначив

$$p_1(H)=\sum_{i\in H}p_1(i),\qquad p_{12}(H,j)=\frac{1}{p_1(H)}\sum_{i\in H}p_1(i)\,p_{12}(i,j),$$

в случае $X(\omega^j)\geqslant m$ получаем

$$\sum_i p_1(i)\,p_{12}(i,j)\Big(M^i-X(\omega^j)\Big)^2\geqslant\sum_{i\in\bar H}p_1(i)\,p_{1,2}(i,j)\Big(M^i-X(\omega^j)\Big)^2+$$

$$+\Big(X(\omega^j)-m\Big)^2 p_1(H)\,p_{12}(H,j)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i\in\bar H}p_1(i)\min\Big(p_{12}(i,j),\ p_{12}(H,j)\Big)(M^i-m)^2. \quad (1.12')$$

В случае $X(\omega^j)<m$ неравенство (1.12) очевидно. Подставляя (1.12) и (1.15), с силу (1.9) и (1.6) получаем

$$\mathbf{MD}(X\mid F_1)\geqslant\frac{1}{4}\,\alpha_{12}\,\mathbf{DM}(X\mid F_1). \quad (1.16)$$

Из соотношения $\mathbf{D}X=\mathbf{DM}\{X\mid F_1\}+\mathbf{DM}(X\mid F_1)$ и (1.16) следует (1.14), а последнее вместе с (1.13) дает утверждение (1.17) леммы 2. Положим

$$\gamma_{kl}^{(n)}=\mathbf{M}\Big(S_{kl}^{(n)}\mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\Big),\qquad \delta_{kl}^{(n)}=S_{kl}^{(n)}-\gamma_{kl}^{(n)}.$$

Тогда, согласно (1.2) и (1.3),

$$\tilde D\Big(S_{kl}^{(n)}\mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\Big)=\mathbf{D}\gamma_{kl}^{(n)},$$

$$\bar D\Big(S_{kl}^{(n)}\mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\Big)=\mathbf{D}\,\delta_{kl}. \quad (1.17)$$

При $k<r<l$ имеет место соотношение

$$\bar D\Big(S_{kl}^{(n)}\mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\Big)=\bar D\Big(S_{kr}^{(n)}\mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\Big)+$$

$$+\bar D\Big(\gamma_{kr}^{(n)}+X_{r+1}^{(n)}+\ldots+X_{l-1}^{(n)}\mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\Big). \quad (1.18)$$

Действительно, имеем, что величины $\delta_{kr}^{(n)}$ и $\gamma_{kr}^{(n)}+\sum_{r+1}^{l}X_i^{(n)}$ не коррелированы при любом условии $A_k^iA_l^j$ (обозначения из леммы 2), ибо из того, что

$$\mathbf{M}\Big(\delta_{kr}^{(n)}\mid A_k^iA_r^j\Big)=0$$

в силу марковости цепи следует, что и

$$\mathbf{M}\Big(\delta_{kr}^{(n)}\mid A_k^iA_l^jA_{r+1}^m\ldots A_l^p\Big)=0, \quad (1.19)$$

в то время, как величина $\gamma_{kr}^{(n)} + \sum_{r+1}^{p} X_j^{(n)}$ при условии $A_k^i A_r^j A_{r+1}^m \cdots A_l^p$ принимает постоянное значение. Итак

$$\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) = \bar{D}\left(\delta_{kr}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) +$$

$$+ \bar{D}\left(\gamma_{kr}^{(n)} + \sum_{i=l+1}^{l} X_i^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right). \tag{1.20}$$

Из (1.19) следует, что

$$\mathbf{M}\left(\delta_{kr}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_r^{(n)}\right) \equiv \mathbf{M}\left(\delta_{kr}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \equiv 0.$$

Поэтому

$$\bar{D}\left(\delta_{kr}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) = \mathbf{D}\,\delta_{kr}^{(n)} - \mathbf{DM}\left(\delta_{kr}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) = D\delta_{kr}^{(n)} =$$

$$= \bar{D}\left(S_{kr}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right).$$

Отсюда, в силу (1.20), уже следует (1.18).

В соотношении (1.18) положим $r = l-2$ и оценим снизу

$$\bar{D}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} + X_{l-1}^{(n)} + X_l^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) = \bar{D}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} + X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right).$$

Обозначив случайную величину $\gamma_{k,l-2}^{(n)} + X_{l-2}^{(n)}$ через X, к ней можем применить все рассуждения, проведенные для доказательства соотношения (1.13) леммы 2. [Из доказательства (1.13) следует, что для справедливости оценки (1.13) не имеет значения определена случайная величина X на Ω_2 или на $\Omega_1 \times \Omega_2$.] Получаем

$$\bar{D}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} + X_{l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{4}\,\alpha_{l-1,l}^{(n)}\,\mathbf{MD}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} + X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right). \tag{1.21}$$

Если $\mathbf{MD}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right) < \frac{1}{16}\mathbf{MD}\left(X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right)$, то, в силу неравенства

$$\left|\mathbf{MD}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} + X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right) - \left(\mathbf{MD}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right) + \mathbf{MD}\left(X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{\mathbf{MD}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right)\mathbf{MD}\left(X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right)} \leqslant \frac{1}{2}\mathbf{MD}\left(X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right),$$

имеем, что

$$\mathbf{MD}\left(X_{k,l-2}^{(n)} + X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{MD}\left(X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right). \tag{1.22}$$

Согласно оценке (1.14) леммы 2,

$$\mathbf{MD}\left(X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{8}\,\alpha_{k,l-1}^{(n)}\,\mathbf{D}\,X_{l-1}^{(n)}, \tag{1.23}$$

что с (1.21) и (1.22) дает

$$\bar{D}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} + X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{64}\,\alpha_{k,l-1}^{(n)}\,\alpha_{l-1,l}^{(n)}\,\mathbf{D}\,X_{l-1}^{(n)}. \tag{1.24}$$

Если же

$$\mathbf{MD}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right) \geqslant \frac{15}{16}\mathbf{MD}\left(X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right) \geqslant \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{8}\,\alpha_{k,l-1}^{(n)}\,\mathbf{D}\,X_{l-1}^{(n)},$$

то, аналогично как и в случае (1.21), будем иметь

$$\bar{D}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)}+X_{l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_{l-1}^{(n)}\right)=\bar{D}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_{l-1}^{(n)}\right)\geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\,\alpha_{l-2,l-1}^{(n)}\,\mathbf{MD}\left(\gamma_{k,l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\right)\geqslant \frac{1}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{8}\,\alpha_{l-2,l-1}^{(n)}\,\alpha_{k,l-1}^{(n)}\,\mathbf{D}\,X_{l-1}^{(n)}. \quad (1.25)$$

Из соотношения (1.18) и оценок (1.24), (1.25) вытекает, что имеет место по крайней мере одно из двух неравенств

$$\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\right)-\bar{D}\left(S_{k,l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_{l-2}^{(n)}\right)\geqslant \frac{1}{64}\,\alpha_{k,l-2}^{(n)}\,\alpha_{l-1,l}^{(n)}\,\mathbf{D}\,X_{l-1}^{(n)} \quad (1.26)$$

или

$$\bar{D}\left(S_{k,l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_{l-1}^{(n)}\right)-\mathbf{D}\left(S_{k,l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_{l-2}^{(n)}\right)\geqslant$$

$$\geqslant \frac{15}{16\cdot 32}\,\alpha_{k,l-1}^{(n)}\,\alpha_{l-2,l}^{(n)}\,\mathbf{D}\,X_{l-1}^{(n)}. \quad (1.27)$$

Так как, согласно (1.18),

$$\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\right)\geqslant \mathbf{D}\left(S_{k,l-1}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_{l-1}^{(n)}\right),$$

то из (1.26), (1.27) получаем оценку

$$\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\right)-\bar{D}\left(S_{k,l-2}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_{l-2}^{(n)}\right)\geqslant \frac{1}{64}\,\alpha_{k,l-1}^{(n)}\,\alpha^{(n)}\,\mathbf{D}\,X_{l-1}^{(n)}. \quad (1.28)$$

У нас везде предполагается, что $\mathbf{D}\,X_i^{(n)} \geqslant \sigma > 0$, поэтому из (1.28) следует, что

$$\bar{D}\left(S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\right)\geqslant c_1\,\alpha^{(n)}\left(\alpha_{k,l-1}^{(n)}+\alpha_{k,l-3}^{(n)}+\ldots+\alpha_{k,k+1}^{(n)}\right).$$

Этим лемма 1 доказана.

Лемма 3. *Пусть на пространстве* (Ω, F) *с вероятностной мерой* $\mathbf{P}(A)$ *заданы случайные величины* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, $S=Y_1+Y_2+\ldots+Y_2$ *с функциями распределения* $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), F(x)$ *соответственно. Тогда для любого* $a>0$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{|x|>a} x^2\,dF(x)\leqslant r^2\sum_{i=1}^{r}\int\limits_{|x|>\frac{a}{r}} x^2\,dF_r(x). \quad (1.29)$$

Доказательство. Имеем

$$I=\int\limits_{|x|>a} x^2\,dF(x)=\int\limits_{\{\omega:|S|>a\}} S^2\,d\mathbf{P}\leqslant r\sum_{i=1}^{r}\int\limits_{\{\omega:|S|>a\}} Y_i^2\,d\mathbf{P}.$$

Пусть

$$B_i=\left\{\omega:\left|Y_i(\omega)\right|>\frac{a}{r},\quad \left|Y_\nu(\omega)\right|<\infty,\qquad \nu=1,\ldots,r,\ \nu\neq i\right\},$$

$$C_i=\left\{\omega:\left|Y_i(\omega)\right|\leqslant\frac{a}{r}\right\}\cap\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{r}\left\{\omega:\left|Y_\nu(\omega)\right|>\frac{a}{r}\right\}.$$

Очевидно, что при любом i

$$\left\{\omega : |S| > a\right\} \in B_i + C_i.$$

Поэтому

$$I \leqslant r \sum_{i=1}^{r} \left(\int_{B_i} Y_i \, d\mathbf{P} + \int_{C_i} \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2 d\mathbf{P} \right) \leqslant r \sum_{i=1}^{r} \left(\int_{|x| > \frac{a}{r}} x^2 \, dF_i(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{r} \int_{|x| > \frac{a}{2}} x^2 \, dF_\nu(x) \right) = r^2 \sum_{\nu=1}^{r} \int_{|v| > \frac{a}{r}} x^2 \, dF_\nu(x).$$

Этим лемма доказана.

Приведем без доказательства одну лемму Р. Л. Добрушина ([2], лемма 11, стр. 410).

Лемма 4. *Пусть последовательность величин* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *образует цепь Маркова с* n *моментами времени и пространствами состояний* (Ω_i, F_i), *причем все коэффициенты эргодичности переходных вероятностей не меньше* $1 - \eta$, *где* $\eta \leqslant \frac{1}{2}$ *и*

$$\mathbf{M} Y_i = 0, \quad DY_i < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathbf{D} Y_1 + \mathbf{D} Y_2 + \ldots + \mathbf{D} Y_n = 1.$$

Пусть, наконец, с вероятностью 1 *при всех* i

$$|Y_i| \leqslant \varepsilon.$$

Положим

$$S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \quad \text{и} \quad F(x) = \mathbf{P}\{S < x\}.$$

Тогда для любого $a > 0$ *и любого целого* $r \geqslant 1$ *имеет место оценка*

$$\int_{|x| > a} x^2 \, dF(x) \leqslant L_1 r^3 \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{2}}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + 12 a^2 \varepsilon^{\frac{1}{8}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{4\varepsilon + \sigma^2 \eta} + \left(\frac{7}{8}\right)^{r-1} \right), \tag{1.30}$$

где $L_1 < \infty$ — *некоторое постоянное.*

Замечание. Оценка (1.30) немножко отличается от оценки Р. Л. Добрушина $\Big($[2], оценка (7.36), стр. 410$\Big)$, а именно, вместо $L_1 r^3$ в (1.30), в [2] стоит множитель $\frac{Lr^3}{a^2}$. Но множитель $\frac{1}{a^2}$ появляется потому, что при доказательстве своей леммы Р. Л. Добрушин пользуется оценкой

$$\int_{|x| > a} x^2 \, dF(x) \leqslant r \left(1 + \frac{r}{a^2}\right) \sum_{i=1}^{r} \int_{|x| > \frac{a}{2}} x^2 \, dF_i(x)$$

$\Big($см. [2], соотношение (6.9) стр. 394$\Big)$ вместо оценки (1.29).

2. Оценка характеристической функции суммы во втором интервале

Из интегральной теоремы следует, что

$$f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}}\right) \sim e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (n \to \infty) \tag{2.1}$$

в любом конечном интервале значений t, где $f_n(t) = \mathbf{M}\, e^{itS_n}$. Целью настоящего параграфа является получение оценки сверху для $\left|f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}}\right)\right|$ при $|t| \leqslant \frac{\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}}{2C_n}$, если с вероятностью 1

$$\left|X_i^{(n)}\right| \leqslant C_n; \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Согласно леммам 1—4, при любом наборе целых чисел

$$1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots l_N = n$$

справедливо неравенство

$$\left|f_n(t)\right| \leqslant \left\|f_{0l_1}^{(n)}(t,\ \cdot)\right\| \cdot \sup_{\omega_{l_1}} \left\|f_{l_1 l_2}^{(n)}(t,\ \omega_{l_1},\ \cdot)\right\| \cdots$$

$$\cdots \sup_{\omega_{l_{N-1}}} \left\|f_{l_{N-1} l_N}^{(n)}(t,\ \omega_{l_{N-1}}\ \cdot)\right\|. \tag{2.2}$$

Пусть $\sup\left\|f_{sl}^{(n)}(t,\ \omega,\ \cdot)\right\|$ — один из множителей правой части соотношения (2.2). Имеем при $s < k < l$

$$\left\|f_{sl}^{(n)}(t,\ \omega,\ \cdot)\right\| = \sup_{\left|\varphi_t^{(n)}\right| \leqslant 1} \left| \int\limits_{\Omega_l^{(n)}} \varphi_t^{(n)}(\tilde{\omega})\, f_{sl}^{(n)}(t,\ \omega,\ d\tilde{\omega}) \right| =$$

$$= \sup_{\left|\varphi_t^{(n)}\right| \leqslant 1} \left| \int\limits_{\Omega_l^{(n)}} \varphi_t^{(n)}(\tilde{\omega}) \int\limits_{\Omega_k^{(n)}} f_{kl}^{(n)}(t,\ \tilde{\tilde{\omega}},\ d\tilde{\omega}) f_{sk}^{(n)}(t,\ \omega,\ d\tilde{\tilde{\omega}}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_k^{(n)}} \left\|f_{kl}^{(n)}(t,\ \tilde{\tilde{\omega}})\right\| P_{sk}^{(n)}(\omega,\ d\tilde{\tilde{\omega}}) \leqslant \mathbf{M}\left(\left|f\left(t,\ S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right|\right) +$$

$$+ \sup_{A \in \tilde{F}_k^{(n)}} \left|P_{sk}^{(n)}(\omega,\ A) - P_{0k}^{(n)}(A)\right|. \tag{2.3}$$

В силу неравенства

$$b \leqslant a + \frac{1}{2a}(b^2 - a^2),$$

справедливого для любых b и $a > 0$, получаем

$$\mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right| \leqslant 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right|^2\right), \tag{2.4}$$

если только

$$b = \left|f\left(t,\ S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right|.$$

Учитывая (2.4) и неравенство

$$\mathbf{M}\left|f\left(t,\ S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right|^2 = \mathbf{M} f\left(t,\ S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)$$

$$f\left(t,\ S_{kl}^{(n)} \mid f\left(t,\ S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right),$$

из (2.3) получаем

$$\left\| f_{sl}^{(n)}(t,\omega,\cdot) \right\| \leqslant \mathbf{M}\left| f\left(t, S_{kl}^{(n)} \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right| + \sup_A \left| P_{sk}^{(n)}(\omega, A) - P_{0k}^{(n)}(A) \right| =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\mathbf{M}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \cos(x-y)t\right) \times \right.$$

$$\left. \times\, dF_{kl}^{(n)}\left(x \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) dF_{kl}^{(n)}\left(y \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right) +$$

$$+ \sup_A \left| P_{sk}^{(n)}(\omega, A) - P_{0k}^{(n)}(A) \right|. \tag{2.5}$$

Здесь $F_{kl}^{(n)}\left(x \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)$ есть условная функция распределения суммы, т. е.

$$F_{kl}^{(n)}\left(x \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) = \mathbf{P}\left\{ S_{kl}^{(n)} < x \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)} \right\}.$$

Так как по определению коэффициентов эргодичности

$$\sup_{\omega, A} \left| P_{ks}^{(n)}(\omega, A) - P_{0s}^{(n)}(A) \right| \leqslant 1 - \alpha_{ks}^{(n)},$$

то из (2.5) следует, что

$$\sup_\omega \left\| f_{se}(t,\omega,\cdot) \right\| \leqslant 1 - \mathbf{M}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{x-y}{2} t \times \right.$$

$$\left. \times\, dF_{kl}^{(n)}\left(x \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) dF_{kl}^{(n)}\left(x \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right) + \left(1 - \alpha_{sk}^{(n)}\right). \tag{2.6}$$

Положим

$$R_{kl}(t) = \mathbf{M}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{x-y}{2} t\, dF_{kl}^{(n)}\left(x \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times\, dF_{kl}^{(n)}\left(y \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right). \tag{2.7}$$

Соотношения (2.2), (2.6), (2.7) показывают, что для любого набора целых чисел

$$k_0 = 0 < l_0 < k_i < l_1 < \ldots < k_N < l_N = n$$

будем иметь

$$\left| f_n(t) \right| \leqslant e^{-\sum_{i=0}^{N} R_{k_i l_i}^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{N-1} \left(1 - \alpha_{l_i k_{i+1}}^{(n)}\right)}. \tag{2.8}$$

Воспользуемся соотношением (2.8) при доказательстве следующей леммы.

Лемма 5. *Если с вероятностью* 1 $|X_i^{(n)}| \leqslant C^{(n)}$, $\mathbf{D}X_i^{(n)} \geqslant \sigma > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *причем*

$$\alpha^{(n)3} n (C^{(n)})^{-2} \ln^{-2} n \to \infty \qquad (n \to \infty),$$

то можно найти постоянное $c_2 > 0$ *и функцию* $f(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ *такие, что*

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{DS_n}} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2C^{(n)}}} \left| f_n(t) \right| dt \leqslant \max\left(e^{-c_2 A^2}, e^{-f(n)\ln n}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant \mathbf{M}\left(\int\limits_{|x|\leqslant\frac{1}{|t|}} \int\limits_{|y|\leqslant\frac{1}{|t|}} \sin^2 \frac{x-y}{2} t dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(y \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{t^2}{36} \mathbf{M}\left(\int\limits_{|x|\leqslant\frac{1}{|t|}} \int\limits_{|y|\leqslant\frac{1}{|t|}} (x-y)^2 dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(y \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right)\right). \tag{2.9}$$

Имеем

$$Q_{k_i l_i}^{(n)} = \mathbf{M}\left(\int\limits_{|x|>|t|^{-1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-y)^2 dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(y \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right)\right) \leqslant 2\mathbf{M}\left(\int\limits_{|x|>|t|^{-1}} x^2 dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) + \right.$$

$$+ \int\limits_{|x|>|t|^{-1}} \int\limits_{|y|>|t|^{-1}} y^2 dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(y \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) +$$

$$\left. + \int\limits_{|x|>\quad|^{-2}} \int\limits_{|y|>|t|^{-1}} y_2 dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(y \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right)\right)$$

или учитывая, что

$$\mathbf{M}\left(\int\limits_{|x|>|t|^{-1}} \int\limits_{|y|\leqslant|t|^{-1}} y^2 dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(y \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \leqslant \right.$$

$$\leqslant \mathbf{M} \int\limits_{|x|>|t|^{-1}} x^2 dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) = \int\limits_{|x|>|t|^{-1}} x^2 dF_{k_i l_i}^{(n)}(x),$$

окончательно получаем

$$Q_{k_i l_i}^{(n)} \leqslant 6 \int\limits_{|x|>|t|^{-1}} x^2 dF_{k_i l_i}^{(n)}(x), \tag{2.10}$$

где

$$F_{k_i l_i}^{(n)}(x) = \mathbf{P}\left\{ S_{k_i l_i}^{(n)} < x \right\}.$$

Согласно лемме 2

$$Q_{k_i l_i}^{(n)} \leqslant 6 (l_i - k_i)^2 \sum_{j=k_i+1}^{l_i} \int\limits_{|x|>\frac{1}{(l_i-k_i)|t|}} x^2 dF_j^{(n)}(t). \tag{2.11}$$

Отсюда, в силу

$$|X_i^{(n)}| \leqslant C^{(n)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

при

$$l_i - k_i \leqslant \frac{1}{C^{(n)}|t|}$$

будет

$$Q^{(n)}_{k_i l_i}=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{2.13}$$

Поэтому, при соблюдении (2.12), к правой части (2.9), не нарушая неравенства, можем прибавить $2t^2 Q^{(n)}_{k_i l_i}$. Получаем

$$R^{(n)}_{k_i l_i}(t) \geqslant \frac{t^2}{36}\mathbf{M}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2\,dF^{(n)}_{k_i l_i}\left(x \mid F^{(n)}_{k_i}\times F^{(n)}_{l_i}\right)dF^{(n)}_{k_i l_i}\left(y \mid F^{(n)}_{k_i}\times F^{(n)}_{l_i}\right)=$$

$$=\frac{t^2}{18}\bar{D}\left(S^{(n)}_{k_i l_i} \mid F^{(n)}_{k_i}\times F^{(n)}_{l_i}\right). \tag{2.14}$$

Отсюда, учитывая (1.4), выводим, что

$$R^{(n)}_{k_i l_i}(t) \geqslant \frac{t^2}{18}c_2\,\alpha^{(n)}\left(\alpha^{(n)}_{k_i\, l_i-1}+\alpha^{(n)}_{k_i\, l_i-3}+\ldots+\alpha^{(n)}_{k_i\, k_i+1}\right). \tag{2.15}$$

Из (1) следует, что

$$1-\alpha^{(n)}_{kl} \leqslant (1-\alpha^{(n)})^{l-k} \leqslant e^{-\alpha^{(n)}(l-k)},$$

а, следовательно,

$$\alpha^{(n)}_{k_i\, l_i-2}+\alpha^{(n)}_{k_i\, l_i-3}+\ldots+\alpha^{(n)}_{k_i\, k_i+1} \geqslant c_3\,\alpha^{(n)}(l_i-k_i)^2,$$

если только

$$l_i-k_i \leqslant \frac{1}{\alpha^{(n)}}, \tag{2.16}$$

Поэтому при условии (2.16) имеет место неравенство

$$R^{(n)}_{k_i l_i}(t) \geqslant C_4 t^2 \alpha^{(n)2}(l_i-k_i)^2. \tag{2.17}$$

Если же

$$l_i-k_i > \frac{1}{\alpha^{(n)}}, \tag{2.18}$$

то из (2.15) выводим, что

$$R^{(n)}_{k_i l_i}(t) \geqslant C_5 t^2 \alpha^{(n)}(l_i-k_i). \tag{2.19}$$

Согласно условиям нашей леммы, существует функция $\varphi(n)$ такая, что $1 \leqslant \varphi(n)\to\infty$ $(n\to\infty)$ и

$$C^{(n)} \leqslant \frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}(n)\ln n}. \tag{*}$$

Следовательно,

$$\alpha^{(n)} \geqslant \frac{C^{(n)\frac{2}{3}}\varphi(n)\ln^{\frac{2}{3}} n}{n^{\frac{1}{3}}}; \tag{**}$$

В соотношении (2.8) положим

$$k_{i+1}-l_i=\left[\frac{\varphi(n)\ln n}{\alpha^{(n)}}\right] \tag{2.20}$$

(здесь и в дальнейшем символ $[x]$ будет означать целую часть x) и

$$l_i-k_i=\left[\frac{1}{C^{(n)}|t|}\right], \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.21}$$

Тогда в случае

$$\frac{\alpha^{(n}}{C^{(n)}} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2C^{(n)}} \tag{2.22}$$

из соотношений (2.8), (2.17) выводим

$$\sum_{i=0}^{N} R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant C_4(N+1)\, t^2 \alpha^{(n)2} \frac{1}{C^{(n)2}\,|t|^3} \geqslant$$

$$\geqslant C_5 \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\ln^{\frac{1}{3}} n} \frac{\varphi^2(n) \ln^{\frac{4}{3}} n}{n^{\frac{2}{3}}} \geqslant C_6 \varphi^2(n) \ln n, \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left(1 - \alpha_{l_i k_{i+1}}^{(n)}\right) \leqslant n e^{-\varphi(n) \ln n}, \tag{2.24}$$

так как из (2.20), (2.21) и определения числа N получаем

$$N \gg \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\ln^{\frac{1}{3}} n}.$$

Из (2.23), (2.24) при условиях (2.22), (2.8) получаем

$$|f_n(t)| \leqslant e^{-C_7 \varphi^2(n) \ln n} \tag{2.25}$$

для $\frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)}} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2C^{(n)}}$.

Если же

$$\frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)} \varphi^{\frac{5}{3}}(n)} \leqslant |t| < \frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)}}, \tag{2.26}$$

то следует пользоватся уже оценкой (2.19). Тогда имеем

$$\sum_{i=0}^{N} R_{k_i l}^{(n)}(t) \geqslant c_5 (N+1)\, t^2 \frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)}\,|t|} \geqslant c_8 \frac{n^{\frac{2}{3}}\,|t|\,\alpha^{(n)}}{C^{(n)} \ln^{\frac{1}{3}} n} = c_8 \sqrt[6]{\varphi(n)} \ln n. \tag{2.27}$$

Таким образом из (2.25) и (2.27) выводим, что *в интервале*

$$\frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)} \varphi^{\frac{5}{3}}(n)} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2C^{(n)}}$$

имеет место неравенство

$$|f_n(t)| \leqslant e^{-c_9 \sqrt[6]{\varphi(n)} \ln n}. \tag{2.28}$$

Осталось получить оценку для $|f_n(t)|$ в оставшемся интервале

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}} \leqslant |t| < \frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)} \varphi^{\frac{5}{3}}(n)}. \tag{2.29}$$

Для этого воспользуемся леммой 4. Определим набор целых чисел

$$k_0 = 0 < l_0 < k_1 < l_2 < \ldots < k_{N-1} < l_N = n$$

следующим образом. Пусть l_0 — наименьшее из чисел $l \leqslant n$, удовлетворяющих условию $\mathbf{D}\, S_{0l}^{(n)} \geqslant \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{2}}(n)\, t^2}$, что является возможным, ибо $\mathbf{D}\, S_{0n}^{(n)} \gg$ $\gg n\alpha^{(n)}$, $\mathbf{D}\, S_{0l}^{(n)} \geqslant \frac{\varphi^3(n)\, C^{(n)2}}{\alpha^{(n)2}}$, а

$$\frac{n\alpha^{(n)}}{\varphi^3(n)\, C^{(n)-2} \alpha^{(n)-2}} = \frac{n\alpha^{(n)3}}{\varphi^3(n)\, C^{(n)-2}} \ll \ln^{\frac{3}{2}} n \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

После определения l_0 число k_1 определяется при помощи равенства

$$k_{i+1} - l_i = \left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}\right]; \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{2.30}$$

Так процесс можно продолжить дальше, т. е. после определения k_i величина l_i определяется как непревосходящее n наименьшее целое число, удовлетворяющее условию

$$\mathbf{D}\, S^{(n)}_{k_i l_i} \geqslant \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2}, \tag{2.30^a}$$

а число k_{i+1} — удовлетворяющее условию (2.30).

Пусть

$$\Delta_n = \max_{\substack{l,k \\ 0<k-l\leqslant\left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}\right]}} \mathbf{D}\, S^{(n)}_{lk}. \tag{2.31}$$

Положим

$$S_n = \tilde{S}_n + \tilde{\tilde{S}}_n, \tag{2.32}$$

где

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=0}^{N} S^{(n)}_{k_i l_i}, \tag{2.33}$$

$$\tilde{\tilde{S}}_n = \sum_{i=0}^{N-1} S^{(n)}_{l_i k_{i+1}}. \tag{2.34}$$

Имеет место неравенство

$$\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2} \leqslant \mathbf{D}\, S^{(n)}_{k_i l_i} \leqslant 2\, \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2}, \tag{2.35}$$

$i = 0, 1, \ldots, N$. Действительно, по определению l_i, всегда $\mathbf{D}\, S^{(n)}_{k_i l_{i-1}} < \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2}$, следовательно,

$$\mathbf{D}\, S^{(n)}_{k_i l_i} \leqslant \mathbf{D}\, S^{(n)}_{k_i l_i - 1} + \mathbf{D} X^{(n)}_{l_i} + 2\sqrt{\mathbf{D}\, S^{(n)}_{k_i\, l_{i-1}}\, \mathbf{D} X^{(n)}_{l_i}} \leqslant \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2} +$$
$$+ C^{(n)2} + 2\frac{C^{(n)}}{\varphi^{\frac{1}{6}}(n)\,|t|} \leqslant 2\, \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2}.$$

Из (2.31) — (2.35) следует, что

$$\mathbf{D}\, S_n \sim \mathbf{D}\, \tilde{S}_n \tag{2.36}$$

так как

$$\mathbf{D}\, S_n = \mathbf{D}\, \tilde{S}_n + \mathbf{D}\, \tilde{\tilde{S}}_n + 2\rho^{(n)}\sqrt{\mathbf{D}\, \tilde{S}_n \cdot \mathbf{D}\, \tilde{\tilde{S}}_n}, \qquad |\rho^{(n)}| \leqslant 1,$$

$$\mathbf{D}\, \tilde{S}_n \sim \sum_{i=0}^{N} \mathbf{D}\, S^{(n)}_{k_i l_i} \asymp \frac{N+1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\,|t|^2} \geqslant N \frac{\varphi^3(n)}{\alpha^{(n)3}} C^{(n)2}, \tag{2.37}$$

$$\mathbf{D}\, \tilde{\tilde{S}}_n \sim \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{D}\, S^{(n)}_{l_i k_i+1} \leqslant N \Delta_n \leqslant N \frac{\varphi^2(n)}{\alpha^{(n)2}} C^{(n)2}. \tag{2.38}$$

Справедливость соотношений (2.37) и (2.38) следует из неравенства (5.28) работы [2], где показано, что если $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ — совокупность случайных величин с конечными дисперсиями, связанных в цепь Маркова с n моментами времени, причем все коэффициенты эргодичности вероятностей перехода за один шаг не меньше числа $1-\eta$, где $\eta \leqslant \frac{1}{2}$, то существует постоянная $K < \infty$, что

$$\left|\mathbf{D}(Z_1+\ldots+Z_m)-(\mathbf{D}\,Z_1+\ldots+\mathbf{D}\,Z_m)\right| \leqslant K\sqrt{\eta}\sum_{k=1}^{m}\mathbf{D}\,Z_k. \quad (2.39)$$

В нашем случае коэффициент эргодичности последовательности $\{S^{(n)}_{k_i l_i}\}$ или последовательности $\{S^{(n)}_{l_i k_{i+1}}\}$ не меньше числа

$$1-e^{-\alpha^{(n)}\left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}\right]} \leqslant 1-e^{-\frac{1}{2}\varphi(n)},$$

так что

$$\eta = e^{-\frac{1}{2}\varphi(n)} \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Пусть $S^{(n)}_{kl}$ — одно из слагаемых $S^{(n)}_{k_i l_i}$. Р. Л. Добрушин $\left[[2], \S\,6, \text{стр. } 395\right]$ показал, что если положить

$$\tilde{\varphi}^{(n)}_i = \tilde{\gamma}^{(n)}_{i-1} + S^{(n)}_{r_{i-1}, r_i} - \tilde{\gamma}^{(n)}_i; \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$$\tilde{\gamma}^{(n)}_i = \begin{cases} \min\left(\gamma^{(n)}_i,\ 2C^{(n)}\left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}+1\right]\right), & \text{если } \gamma^{(n)}_i \geqslant 0,\\ \max\left(\gamma^{(n)}_i,\ -2C^{(n)}\left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}+1\right]\right), & \text{если } \gamma^{(n)}_i < 0,\end{cases}$$

$$\gamma^{(n)}_i = \mathbf{M}\left(S^{(n)}_{kr_i} \mid F^{(n)}_{r_i}\right); \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \qquad \gamma_0=0,$$

$$r_i = k+i\left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}+1\right]; \qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,$$

где число m определяется из неравенства

$$r_{m-1} < l \leqslant r_{m-1}+\left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}+1\right],$$

то

$$S^{(n)}_{kl} < \varphi^{(n)}_1+\varphi^{(n)}_2+\ldots+\varphi^{(n)}_{m+1}, \quad (2.40)$$

и

$$\mathbf{D}\,S^{(n)}_{kl} \geqslant \frac{1}{10\,000}\sum_{k=1}^{m+1}\mathbf{D}\,\varphi^{(n)}_k, \quad (2.41)$$

где

$$\varphi^{(n)}_i = \tilde{\varphi}^{(n)}_i - \mathbf{M}\,\tilde{\varphi}^{(n)}_i, \qquad i=1,\ \ldots,\ m,$$

$$\tilde{\varphi}^{(n)}_{m+1} = \tilde{\gamma}^{(n)}_m.$$

Если отдельно рассмотреть сумму

$$S_1 = \varphi^{(n)}_1+\varphi^{(n)}_3+\ldots+\varphi^{(n)}_{\tilde{m}}, \qquad \tilde{m} < m+1, \quad (2.42)$$

в которую включены слагаемые суммы (2.40) с нечетными номерами, то при фиксированном n слагаемые будут образовать последовательность величин, связанных в цепь Маркова (см. определение цепи), причем коэффициент эргодичности за один шаг будет не меньше числа

$$1-e^{-\alpha^{(n)}\left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}\right]} \leqslant 1-e^{-\frac{1}{2}\varphi(n)}. \quad (2.43)$$

Тогда, согласно (2.39),

$$\mathbf{D}\, S_1 \sim D_n = \mathbf{D}\, \varphi_1^{(n)} + \mathbf{D}\, \varphi_3^{(n)} + \ldots + \mathbf{D}\, \varphi_{\tilde{m}}^{(n)}. \tag{2.44}$$

Положим

$$S = \frac{S_1}{\sqrt{D_n}}, \quad Y_i = \frac{\varphi_i}{\sqrt{D_n}}, \quad i = 1, 3, \ldots, \tilde{m}, \quad F(x) = \mathbf{P}\{S < x\}.$$

Если

$$D_n \geqslant \frac{1}{\varphi^{\frac{2}{3}}(n)\, t^2} \geqslant \frac{\varphi^{\frac{8}{3}}(n)\, C^{(n)2}}{\alpha^{(n)2}}, \tag{2.45}$$

то

$$|Y_i| \leqslant \varepsilon^{(n)} \ll \frac{C^{(n)}\varphi(n)(\alpha^{(n)})^{-1}}{C^{(n)}\varphi^{\frac{4}{3}}(n)(\alpha^{(n)})^{-1}} = \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)}, \tag{2.46}$$

$$\eta^{(n)} \leqslant e^{-\frac{1}{2}\varphi(n)}. \tag{2.47}$$

Поэтому, применяя к сумме

$$S = Y_1 + Y_3 + \ldots + Y_{\tilde{m}}$$

лемму 4, получаем оценку

$$\int\limits_{|x|>a} x^2\, dF(x) \leqslant L_1 r^3 \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + 12a^2 \varepsilon^{(n)\frac{1}{8}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{4\varepsilon^{(n)} + \sigma^2\eta^{(n)}} + \left(\frac{7}{8}\right)^{r-1} \right), \tag{2.48}$$

справедливую для любого $a > 0$ и целого $r > 1$. Возвращаясь к сумме S_1 с функцией распределения $F_1(x) = \mathbf{P}\{S_1 < x\}$ при $r = r^{(n)} = \varphi^{\frac{1}{1000}}(n)$, а $a = a^{(n)} = \varphi^{\frac{1}{100}}(n)$, получаем

$$\frac{1}{D_n} \int\limits_{|x| > \varphi^{\frac{1}{100}}(n)\sqrt{D_n}} x^2\, dF_1(x) \leqslant \delta(n)$$

или, согласно (2.44) и (2.35), (2.41), (2.46),

$$\int\limits_{|x| > \varphi^{\frac{1}{50}}(n)\sqrt{\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2}}} x^2\, dF_1(x) \leqslant \delta(n) D_n, \tag{2.49}$$

где $\delta(n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Если неравенство (2.45) не выполняется, то согласно (2.44), (2.35),

$$\mathbf{D}\, S_1 \ll \frac{1}{\varphi^{\frac{2}{3}}(n)\, t^2} \ll \frac{\mathbf{D}\, S_{kl}^{(n)}}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)}. \tag{2.50}$$

Имея в виду (2.49), (2.50) и (2.41), окончательно выводим

$$\int\limits_{|x| > \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{7}}(n)|t|}} x^2\, dF_1(x) \leqslant \delta_1(n)\, \mathbf{D}\, S_{kl}^{(n)}, \tag{2.51}$$

где $\delta_1(n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Пусть величина

$$S_2=\varphi_2^{(n)}+\varphi_4^{(n)}+\ldots+\varphi_{\tilde{\tilde{m}}}^{(n)}, \qquad \tilde{\tilde{m}}<m+1, \tag{2.52}$$

является суммой слагаемых (2.40) с четными индексами и $F_2(x)=\mathbf{P}\{S_2<x\}$. Совсем аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{|x|>\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{7}}(n)|t|}} x^2\,dF_2(x)\leqslant\delta_2(n)\,\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)}, \tag{2.53}$$

где $\delta_2(n)\to 0$ $(n\to\infty)$.

Случайную величину $S_{kl}^{(n)}$, как следует из (2.40), (2.42), (2.52), можно представить как сумму трех слагаемых

$$S_{kl}^{(n)}=S_1+S_2+S_3, \tag{2.54}$$

где

$$S_3=\varphi_{m+1}^{(n)}.$$

Так как

$$\mathbf{D}\,S_3=\mathbf{D}\,\varphi_{m+1}^{(n)}\leqslant\mathbf{M}\,\tilde{\gamma}_m^{(n)2}\leqslant 5C^{(n)2}\frac{\varphi^2(n)}{\alpha^{(n)2}}\leqslant 10\cdot C^{(n)2}\frac{\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)}}{\varphi(n)},$$

то для

$$F_3(x)=\mathbf{P}\{S_3<x\}$$

оценка

$$\int\limits_{|x|>\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{7}}(n)|t|}} x^2\,dF_3(x)\leqslant\delta_3(n)\,\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)}; \tag{2.55}$$

$\delta_3(n)\to 0$ $(n\to\infty)$ будет тривиальной. К сумме (2.54) применяя лемму 3 при $r=3$, окончательно получаем

$$\int\limits_{|x|>\frac{3}{\varphi^{\frac{1}{7}}(n)|t|}} x^2\,dF_{kl}^{(n)}(x)\leqslant\delta_4(n)\,\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)}, \tag{2.56}$$

где $\delta_4(n)\to 0$ $(n\to\infty)$ независимо от выбора пары k, l. Здесь

$$F_{kl}^{(n)}(x)=\mathbf{P}\left\{S_{kl}^{(n)}<x\right\}.$$

Получив (2.56) мы уже в состоянии оценить $f_n(t)$ в интервале (2.29). Согласно оценке (2.10)

$$Q_{k_il_i}^{(n)}\leqslant 6\int\limits_{|x|>\frac{1}{|t|}} x^2\,dF_{k_il_i}^{(n)}(x), \tag{2.57}$$

где

$$F_{k_il_i}^{(n)}(x)=\mathbf{P}\left\{S_{k_il_i}^{(n)}<x\right\}.$$

У нас $\frac{1}{|t|}>\frac{3}{\varphi^{\frac{1}{7}}(n)|t|}$, поэтому из (2.56) получаем, что

$$Q_{k_il_i}^{(n)}\leqslant 6\delta_4(n)\,\mathbf{D}\,S_{k_il_i}^{(n)}. \tag{2.58}$$

Нетрудно проверить, что

$$R_{k_i l_i}^{(n)} = \mathbf{M}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2\,dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right)dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(y \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right)\right) =$$

$$= 2\bar{D}\left(S_{k_i l_i}^{(n)} \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right)$$

имеет тот же порядок, что и $\mathbf{D}\,S_{k_i l_i}^{(n)}$. Действительно, сумму $S_{k_i l_i}^{(n)}$ представим в следующем виде:

$$S_{k_i l_i}^{(n)} = S_{k_i, k_i+b}^{(n)} + S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)} + S_{l_i-b, l_i}^{(n)},$$

$$b = \left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}\right].$$

Тогда

$$\left|\bar{D}\left(S_{k_i l_i}^{(n)} \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) - \bar{D}\left(S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)} \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right)\right| \leqslant \bar{D}\left(S_{k_i, k_i+b}^{(n)} + S_{l_i-b, l_i}^{(n)}\right) +$$

$$+ 2\sqrt{\mathbf{D}\left(S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)}\right)\mathbf{D}\left(S_{k_i, k_i+b}^{(n)} + S_{l_i-b, l_i}^{(n)}\right)} \leqslant 4C^{(n)2}\left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}\right]^2 +$$

$$+ C^{(n)2}\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}\sqrt{\mathbf{D}\,S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)}}. \tag{2.59}$$

В лемме 2 вместо X, Ω_1, Ω_2, Ω_3 пологая соответственно $S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)}$, $\Omega_{k_i}^{(n)}$, $\Omega_{k_i+b}^{(n)} \times \ldots \times \Omega_{l_i-b}^{(n)}$, $\Omega_{l_i}^{(n)}$, получаем

$$\bar{D}\left(S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)} \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{32}\,\alpha_{k_i, k_i+b}^{(n)}\,\alpha_{l_i-b, l_i}^{(n)}\,\mathbf{D}\,S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)}.$$

Далее из определения числа b следует, что

$$\alpha_{k_i, k_i+b}^{(n)}, \quad \alpha_{l_i-b, l_i}^{(n)}$$

не меньше числа $1 - e^{-\alpha^{(n)} b} \geqslant 1 - e^{-\varphi(n)} > \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\bar{D}\left(S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)} \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{130}\mathbf{D}\,S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)}, \tag{2.60}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{D}\,S_{k_i l_i}^{(n)} = \mathbf{D}\,S_{k_i+b, l_i-b}^{(n)} \qquad \left(1 + o(1)\right), \tag{2.61}$$

ибо $\mathbf{D}\,S_{k_i l_i}^{(n)} \geqslant \frac{\varphi^3(n)}{\alpha^{(n)3}}C^{(n)2}$, а

$$\mathbf{D}\left(S_{k_i, k_i+b}^{(n)} + S_{l_i-b, l_i}^{(n)}\right) \leqslant 4C^{(n)2}\frac{\varphi^2(n)}{\alpha^{(n)2}}.$$

Из (2.59) и (2.61) следует, что

$$\bar{D}\left(S_{k_i l_i}^{(n)} \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{130}\mathbf{D}\,S_{k_i l_i}^{(n)} \qquad \left(1 + o(1)\right). \tag{2.62}$$

Обратное неравенство

$$\bar{D}\left(S_{k_i l_i}^{(n)} \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \leqslant \mathbf{D}\,S_{k_i l_i}^{(n)} \tag{2.63}$$

тривиально.

Таким образом, из определения $Q_{k_i l_i}^{(n)}$, $R_{k_i l_i}^{(n)}$ и соотношений (2.9), (2.58), (2.62), (2.63) выводим

$$R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant \frac{t^3}{36}\left(R_{k_i l_i}^{(n)} - 2Q_{k_i l_i}^{(n)}\right) \geqslant c_{10}t^2\,\mathbf{D}\,S_{k_i l_i}^{(n)} \tag{2.63'}$$

или, согласно (2.36), (2.37),

$$\sum_{i=0}^{N} R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant c_{11} t^2 \mathbf{D}\, S_n. \tag{2.64}$$

В нашем случае $N \asymp \mathbf{D}\, S_n t^2 \varphi^{\frac{1}{3}}(n)$,

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left(1-\alpha_{l_i k_{i+1}}^{(n)}\right) \leqslant N e^{-\alpha^{(n)}\left[\frac{\varphi(n)}{\alpha^{(n)}}\right]} < \mathbf{D}\, S_n t^2 e^{-\frac{1}{2}\varphi(n)} \tag{2.65}$$

поэтому из (2.8), (2.64) и (2.65) окончательно получаем

$$|f_n(t)| \leqslant e^{-c_{11}t^2 \mathbf{D}\, S_n} \tag{2.66}$$

при

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}} \leqslant |t| < \frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)} \varphi^{\frac{5}{3}}(n)}.$$

Из неравенств (2.1), (2.25), (2.66) следует лемма.

Замечание. *Если*

$$|X_i^{(n)}| < C < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то соотношения (*) *и* (*, *) *показывают, что достаточно положить*

$$\alpha^{(n)} \geqslant \frac{\varphi(n) \ln^{\frac{2}{3}} n}{n^{\frac{1}{3}}},$$

$\varphi(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, *для того, чтобы была верна оценка*

$$\sqrt{\mathbf{D}\, S_n} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{\mathbf{D}}} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2C^{(n)}}} |f_n(t)|\, dt < e^{-\min\left(c_{11} A^2,\, f_n(n) \ln n\right)},$$

где $f(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Обобщим лемму 5 для случая необязательно ограниченных слагаемых.

Лемма 6. *Если случайные величины* $X_i^{(n)}$ *таковы, что*

$$0 < \sigma \leqslant \mathbf{D} X_i^{(n)} < C < \infty,$$

$$\frac{1}{\alpha^{(n)2}} \int\limits_{|x| \geqslant a \frac{\sqrt{n}\, \alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\ln n}} x^2\, dF_i^{(n)}(x) \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{2.67}$$

равномерно по i *для любого* $a > 0$ *и равномерно по* i *и* n

$$\frac{1}{\mathbf{MD}\left(X_i^{(n)} \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right)} \mathbf{M} \int\limits_{\left|x - \mathbf{M}\left(X_i^{(n)} \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right)\right| > b} \left(x - \mathbf{M}\left(X_i^{(n)} \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right)\right)^2 \times$$

$$\times\, dF_i^{(n)}\left(x \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right) \to 0, \tag{2.68}$$

когда $b \to \infty$, *то при достаточно малом* $\varepsilon > 0$

$$\sqrt{\mathbf{D}\, S_n} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}} \leqslant |t| \leqslant \varepsilon} |f_n(t)|\, dt \leqslant e^{-\min\left(c_{11} A^2,\, f(n) \ln n\right)}.$$

Здесь $F_i^{(n)}(x)$ *и* $F_i^{(n)}\left(X \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right)$ — *функция распределения и условная функция распределения, соответственно, случайной величины* $X_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $f(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Доказательство. Из условия (2.67) следует, что $\frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\ln n} \to \infty$, когда $n \to \infty$. Действительно, если бы $\frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\ln n} < C_3$, то при $a = \frac{1}{C_3}\,\frac{\sqrt{\sigma}}{2}$ получили бы, что

$$\int\limits_{|x| \geqslant \frac{\sqrt{\sigma}}{2}} x^2\, dF_i(x) \to 0,$$

что невозможно в силу $\mathbf{D} X_i^{(n)} \geqslant \sigma > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому всегда можно найти такую функцию $\varphi(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, чтобы было

$$\frac{1}{\alpha^{(n)2}} \int\limits_{|x| \geqslant C^{(n)}} x^2\, dF_i^{(n)}(x) \leqslant \frac{1}{\varphi^4(n)}, \tag{2.69}$$

где

$$C^{(n)} = \frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}(n) \ln n}.$$

Чтобы доказать лемму нам следует оценить $\sum\limits_{i=0}^{N} R_{k_i l_i}^{(n)}(t)$ в выражении (2.8). Сначала это сделаем в интервале

$$\frac{1}{2C^{(n)}} \leqslant |t| \leqslant \varepsilon. \tag{2.70}$$

В этом случае положим

$$l_i - k_i = 2, \qquad k_{i+1} - l_i = \left[\frac{\varphi(n) \ln n}{\alpha^{(n)}}\right]. \tag{2.71}$$

Согласно условию (2.68), для сколь угодно маленького $\delta > 0$ найдется b_0 такое, что

$$\mathbf{M}\left(\int\limits_{|x| > b_0} \left(x - \mathbf{M}\left(X_i^{(n)} \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right)\right)^2 dF_i^{(n)}\left(x \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right) \geqslant \right.$$

$$\geqslant \delta \bar{D}\left(X_i^{(n)} \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.72}$$

Тогда из (2.7) следует

$$R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant \frac{t^2}{32} \mathbf{M}\left(\int\limits_{|x| \leqslant 2b_0} \int\limits_{|y| \leqslant 2b_0} (x-y)^2\, dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times\, dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(y \mid F_k^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right)\right), \tag{2.73}$$

если только $|t| < b_0$. Учитывая (2.14), (2.72), (2.73), получаем

$$R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant \frac{t^2}{32}\left(\bar{D}\left(X_{k_i+1}^{(n)} \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) - 6\delta \bar{D}\left(X_{k_i+1}^{(n)} \mid F_{k_i-1}^{(n)} \times F_{k_i+1}^{(n)}\right)\right).$$

Отсюда, при помощи леммы 2, выводим

$$R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \gg \alpha^{(n)2} t^2; \qquad |t| < b_0.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{N} R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \gg N\alpha^{(n)2} t^2 \gg \frac{n\alpha^{(n)3}}{\varphi(n)\ln n\, C^{(n)2}} = \varphi^2(n)\ln n,$$

в интервале (2.70) при $\varepsilon = b_0$. Что касается суммы $\sum_{i=0}^{N-1}\left(1-\alpha_{l_i k_i+1}^{(n)}\right)$, то, согласно подбору (2.72), она не превосходит $Ne^{-\frac{1}{2}\varphi(n)\ln n} \to 0$ $(n\to\infty)$. Итак

$$|f_n(t)| \leqslant e^{-c_{11}\varphi^2(n)\ln n} \tag{2.74}$$

в интервале $\frac{1}{2C^{(n)}} \leqslant |t| \leqslant \varepsilon$.

Для оценки $|f_n(t)|$ в других интервалах мы будем урезывать случайные величины, как это, напр., делается в работе [2] при доказательстве интегральной теоремы. Положим

$$X_i^{(n)} = U_i^{(n)} + V_i^{(n)},$$

где

$$U_i^{(n)} = \begin{cases} X_i^{(n)}, & \text{если} \quad |X_i^{(n)}| \leqslant C^{(n)}, \\ 0, & \text{если} \quad |X_i^{(n)}| > C^{(n)}. \end{cases}$$

Тогда

$$S_{kl}^{(n)} = U_{kl}^{(n)} + N_{kl}^{(n)},$$

$$U_{kl}^{(n)} = \sum_{i=k+1}^{l} U_i^{(n)}, \quad N_{kl}^{(n)} = \sum_{i=k+1}^{l} V_i^{(n)}.$$

Случайные величины $U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)}$ определены на цепи, причем

$$|U_i^{(n)}| \leqslant C^{(n)}$$

и

$$\mathbf{D}\,U_i^{(n)} = \mathbf{D}\left(X_i^{(n)} - V_i^{(n)}\right) = \mathbf{D}\,X_i^{(n)} + \mathbf{D}\,V_i^{(n)} + 2\rho_i^{(n)}\sqrt{\mathbf{D}\,X_i^{(n)}\,\mathbf{D}\,V_i^{(n)}} > \frac{\sigma}{2},$$

ибо

$$\mathbf{D}\,V_i^{(n)} = \int\limits_{|x| > C^{(n)}} x^2\,dF_i^{(n)}(x) \leqslant \frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^2(n)} \to 0 \qquad (n\to\infty), \tag{2.75}$$

а

$$\mathbf{D}\,X_i^{(n)} \geqslant \sigma > 0, \; i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Потому для последовательности $U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)}$ справедливы все нами раньше для цепи $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ в случае $|X_i^{(n)}| < C^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, полученные результаты. Этим замечанием мы и будем везде пользоватся.

Пусть

$$\frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)}\varphi^{\frac{5}{3}}(n)} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2C^{(n)}}. \tag{2.76}$$

Набор целых чисел $k_0, l_0, k_1, l_1, \ldots, k_N, l_N$ определим по формулам (2.20) и (2.21). Из (2.7) и (2.10) получаем

$$R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant \frac{t^2}{64}\mathbf{M} \int\limits_{|x|\leqslant\frac{2}{|t|}} \int\limits_{|y|\leqslant\frac{2}{|t|}} (x-y)^2\, dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(x \,|\, F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) dF_{k_i l_i}^{(n)}\left(y \,|\, F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{t^2}{64}\left(\bar{D}\left(S_{k_i l_i}^{(n)} \,|\, F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) - 6 \int\limits_{|x| > \frac{2}{|t|}} x^2\, dF_{k_i l_i}^{(n)}(x)\right). \tag{2.77}$$

Если положить $G^{(n)}_{k_i l_i}(x) = \mathbf{P}\{U^{(n)}_{k_i l_i} < x\}$, то с помощью леммы 3 находим

$$\int\limits_{|x| > \frac{2}{|t|}} x^2\, dF^{(n)}_{k_i l_i}(x) \leqslant 4 \int\limits_{\left|x - \mathbf{M}U^{(n)}_{k_i l_i}\right| > \frac{1}{|t|}} \left(x - \mathbf{M}\, U^{(n)}_{k_i l_i}\right)^2 dG^{(n)}_{k_i l_i}(x) + 4\,\mathbf{D}\, N^{(n)}_{k_i l_i}. \quad (2.78)$$

Из (2.21), (2.12), (2.13) следует, что первый член правой части (2.78) равен нулю. Что касается второго, то, учитывая (2.75), получаем

$$t^2 D V^{(n)}_{k_i l_i} \leqslant t^2 (l_i - k_i)^2 \max_{k_i + 1 \leqslant i \leqslant l_i} \mathbf{D}\, V^{(n)}_i \leqslant \frac{t^2}{C^{(n)2} t^2} \, \frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^2(n)} = \frac{\alpha^{(n)2}}{C^{(n)2} \varphi^2(n)},$$

в то время, как, согласно (2.17), (см. также 2.16)

$$t^2 \overline{D}\left(S^{(n)}_{k_i l_i} \mid F^{(n)}_{k_i} \times F^{(n)}_{l_i}\right) \geqslant c_{14} t^2 \alpha^{(n)2} (l_i - k_i)^2 \geqslant c_{14} \frac{\alpha^{(n)2}}{C^{(n)2}} \quad \text{при} \quad \frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)}} \leqslant$$

$$\leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2C^{(n)}}$$

и

$$t^2 \overline{D}\left(S^{(n)}_{k_i l_i} \mid F^{(n)}_{k_i} \times F^{(n)}_{l_i}\right) \geqslant c_{15} t^2 \alpha^{(n)} (l_i - k_i) \geqslant c_{15} \frac{\alpha^{(n)} |t|}{C^{(n)}} \geqslant c_{15} \frac{\alpha^{(n)2}}{C^{(n)2} \varphi^{\frac{5}{3}}(n)}$$

при

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\varphi^{\frac{5}{3}}(n)\, C^{(n)}} \leqslant |t| \leqslant \frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)}}.$$

Таким образом, всегда

$$R^{(n)}_{k_i l_i}(t) \geqslant c_{16} \frac{\alpha^{(n)2}}{C^{(n)2} \varphi^{\frac{5}{3}}(n)}$$

или

$$\sum_{i=0}^{N} R^{(n)}_{k_i l_i}(t) \geqslant c_{16} (N+1) \frac{\alpha^{(n)2}}{C^{(n)2} \varphi^{\frac{5}{3}}(n)} \geqslant$$

$$\geqslant c_{17} \frac{n \alpha^{(n)3}}{\varphi(n) \ln n\, \varphi^{\frac{5}{3}}(n)\, C^{(n)2}} = c_{17} \sqrt[6]{\varphi(n)} \ln n.$$

Оценка для $\sum\limits_{i=0}^{N-1} \left(1 - \varphi^{(n)}_{k_i l_i}\right)$ останется такой же как и раньше, поэтому

$$|f_n(t)| \leqslant e^{-c_{18} \sqrt[6]{\varphi(n)} \ln n} \quad (2.79)$$

в интервале (2.76).

Остался интервал

$$|t| \leqslant \frac{\alpha^{(n)}}{C^{(n)} \varphi^{\frac{3}{2}}(n)}. \quad (2.80)$$

Согласно нашим замечаниям, для величин $U^{(n)}_1, U^{(n)}_2, \ldots, U^{(n)}_n$ имеют силу все результаты (2.29) — (2.64), если в последних $X^{(n)}_i$ заменить через $U^{(n)}_i$ и $S^{(n)}_{k_i l_i}$ — через $U^{(n)}_{k_i l_i}$. Определим набор $k_0, l_0, k_1, l_1, \ldots, k_N, l_N$, как и в (2.30) и (2.30а), только уже исходя из величин $U^{(n)}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Тогда для $U^{(n)}_{k_i l_i}$ будет верна оценка (5.56), т. е. будет

$$\int\limits_{\left|x - \mathbf{M}U^{(n)}_{k_i l_i}\right| > \frac{3}{\varphi^{\frac{1}{7}}(n)|t|}} \left(x - \mathbf{M}\, U^{(n)}_{k_i l_i}\right)^2 dG^{(n)}_{k_i l_i}(x) \leqslant \delta_5(n)\, \mathbf{D}\, U^{(n)}_{k_i l_i}, \quad (2.80^a)$$

где $\delta_5(n)\to\infty$ $(n\to\infty)$. Тогда из (2.80^a) и (2.78) получаем

$$\int\limits_{|x|>\frac{2}{|t|}} x^2\,dF^{(n)}_{k_i l_i}(x)\leqslant 4\delta_5(n)\,\mathbf{D}\,U^{(n)}_{k_i l_i}+4\,\mathbf{D}\,V^{(n)}_{k_i l_i}.$$

Имеем

$$\left|\bar D\left(S^{(n)}_{k_i l_i}\,|\,F^{(n)}_{k_i}\times F^{(n)}_{l_i}\right)-\bar D\left(U^{(n)}_{k_i l_i}\,|\,F^{(n)}_{k_i}\times F^{(n)}_{l_i}\right)\right|\leqslant \mathbf{D}\,V^{(n)}_{k_i l_i}+$$
$$+2\sqrt{\mathbf{D}\,V^{(n)}_{k_i l_i}\,\mathbf{D}\,U^{(n)}_{k_i l_i}}.$$

Из (2.77) выводим, что

$$R^{(n)}_{k_i l_i}(t)\geqslant\frac{t^2}{64}\left(\bar D\left(U^{(n)}_{k_i l_i}\,|\,F^{(n)}_{k_i}\times F^{(n)}_{l_i}\right)-25\,\mathbf{D}\,V^{(n)}_{k_i l_i}-24\delta_5(n)\,\mathbf{D}\,U^{(n)}_{k_i l_i}-\right.$$
$$\left.-2\sqrt{\mathbf{D}\,V^{(n)}_{k_i l_i}\,\mathbf{D}\,U^{(n)}_{k_i l_i}}\right). \tag{2.81}$$

Для окончательной оценки правой части (2.81) нам придется оценить дисперсию $\mathbf{D}\,V^{(n)}_{kl}$, где k, l есть одна какая нибудь пара k_i, l_i, $i=1,2,\ldots,N$.

Пусть

$$V^{(n)}_{kl}=W^{(n)}_1+W^{(n)}_2+\ldots+W^{(n)}_m,$$

где положено

$$W^{(n)}_j=V^{(n)}_{k+(j-1)\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right],\ k+j\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right]}.$$

Грубо говоря, сумму $V^{(n)}_{kl}$ разбиваем на „куски“ длиною $\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right]$. Пусть

$$V^{(n)}_{kl}=\tilde V^{(n)}_{kl}+\tilde{\tilde V}^{(n)}_{kl},$$

где

$$\tilde V^{(n)}_{kl}=\sum_j W^{(n)}_{2j+1},\quad \tilde{\tilde V}_{kl}=\sum_j W^{(n)}_{2j};$$

Слагаемые суммы $\tilde V^{(n)}_{kl}$ связаны в цепь Маркова с коэффициентом эргодичности $1-\eta$, где

$$\eta\leqslant e^{-\alpha^{(n)}\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right]}<\frac{1}{2},$$

поэтому, применяя (3.29), находим

$$\mathbf{D}\,\tilde V^{(n)}_{kl}\ll\sum_j \mathbf{D}\,W^{(n)}_{2j+1}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для $\mathbf{D}\,\tilde{\tilde V}^{(n)}_{kl}$. Следовательно, имеем

$$\mathbf{D}\,V^{(n)}_{k_i l_i}\ll\sum_{j=1}^{m}\mathbf{D}\,W_j\ll m\left(\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right)^2\max_{1\leqslant j\leqslant n}\mathbf{D}\,V^{(n)}_j\ll\frac{m}{\alpha^{(n)2}}\,\frac{\alpha^{(n)2}}{\varphi^2(n)}\ll$$
$$\ll\frac{(l_i-k_i)\,\alpha^{(n)}}{\varphi^2(n)},$$

откуда

$$\sum_{i=0}^{N}\mathbf{D}\,V^{(n)}_{k_i l_i}\ll\frac{n\alpha^{(n)}}{\varphi^2(n)}. \tag{2.82}$$

Согласно (2.62), (2.33), (2.36) и (2.35), имеют место соотношения

$$\bar{D}\left(U_{k_i l_i}^{(n)} \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{140} \mathbf{D}\, U_{k_i l_i}^{(n)},$$

$$\mathbf{D}\, U_{0n}^{(n)} \sim \sum_{i=0}^{N} \mathbf{D}\, U_{k_i l_i}^{(n)},$$

$$\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2} \leqslant \mathbf{D}\, U_{k_i l_i}^{(n)} < \frac{2}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2}.$$

Поэтому

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} (l_i - k_i) \ll \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2 \alpha^{(n)}},$$

а

$$\max_i \mathbf{D}\, V_{k_i l_i}^{(n)} \ll \frac{\alpha^{(n)}}{\varphi^3(n)\, \varphi^{\frac{1}{3}}(n)\, t^2 \alpha^{(n)}} = \frac{1}{\varphi^{\frac{7}{3}}(n)\, t^2};$$

Таким образом из (2.81) получаем

$$R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant c_{18} t^2 \left(\mathbf{D}\, U_{k_i l_i}^{(n)} - C_4 \frac{1}{\varphi^{\frac{7}{3}}(n)\, t^2} - C_5 \frac{1}{\varphi^{\frac{4}{3}}(n)\, |t|^2}\right) \geqslant c_{19} t^2\, \mathbf{D}\, U_{k_i l_i}^{(n)},$$

или

$$\sum_{i=0}^{N} R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant c_{20} t^2\, \mathbf{D}\, U_{0n}^{(n)}.$$

Заметим, что для суммы $\sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{D}\, V_{l_i k_{i+1}}^{(n)}$ можно таким же способом получить оценку (2.82).

Итак знаем, что $\mathbf{D}\, V_{0n}^{(n)} \ll \frac{n\alpha^{(n)}}{\varphi^2(n)}$, а $\mathbf{D}\, S_n \geqslant c_{21} n\alpha^{(n)}$, следовательно,

$$\mathbf{D}\, S_n \sim D U_{0n}^{(n)}$$

и

$$\sum_{i=0}^{N} R_{k_i l_i}^{(n)}(t) \geqslant c_{22} t^2\, \mathbf{D}\, S_n.$$

Последнее вместе с (2.65) означает, что

$$|f_n(t)| \leqslant e^{-c_{23} t^2 \mathbf{D} S_n} \tag{2.83}$$

при $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}} \leqslant |t| \leqslant \frac{\alpha^{(n)}}{\varphi^{\frac{5}{3}}(n)\, C^{(n)}}$.

Оценки (2.74), (2.79), (2.83) вместе доказывают справедливость леммы.

Примечание к лемме 6. *Условие* (2.68) *может быть заменено более общим требованием, чтобы*

$$\frac{1}{\mathbf{M}\mathbf{D}\left(X_i^{(n)} \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right)} \mathbf{M} \iint\limits_{|x-y|>b} (x-y)^2\, dF_i^{(n)}\left(x \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right) \times$$

$$\times\, dF_i^{(n)}\left(y \mid F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\right) \to 0 \tag{2.68а}$$

равномерно по i *и* n, *когда* $b \to \infty$, так как, доказывая лемму, мы пользовались только последним.

3. Оценка характеристической функции суммы в третьем интервале

Лемма 7. *Пусть случайные величины* $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ *принимают своими значениями только целые числа и удовлетворяют всем условиям леммы 6. Пусть, кроме того, существует подпоследовательность* $X_{\nu_1}^{(n)}, X_{\nu_2}^{(n)}, X_{\nu_3}^{(n)} \ldots$ *такая, что*

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{\substack{i \\ 1 \leqslant \nu_i \leqslant n}} \mathbf{M}\left(\min_r P\left\{X_{\nu_i}^{(n)} \not\equiv r \bmod (q) \mid F_{\nu_i-1}^{(n)} \times F_{\nu_i+1}^{(n)}\right\}\right) \to \infty \qquad (n \to \infty) \quad (3.1)$$

для всех $q \geqslant 2$, *где*

$$\left[\frac{\ln n}{\alpha^{(n)}}\right] \leqslant \nu_j - \nu_{j-1} \ll \left[\frac{\ln n}{\alpha^{(n)}}\right], \qquad j = 1, 2, \ldots \quad (3.2)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *имеет место неравенство*

$$\sqrt{\mathbf{D} S_n} \int_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi} |f_n(t)|\, dt \ll \frac{1}{n^m},$$

где m — *любое постоянное.*

Доказательство. Как и раньше, исходимым пунктом будут соотношения (2.2), (2.7) и (2.8). Так как случайные величины принимают своими значениями только целые числа, то положим

$$A_k^j = \left\{\omega : X_k^{(n)}(\omega) = j\right\}, \qquad P\{X_k^{(n)} = j\} = \mathbf{P}\{A_k^j\},$$

$$P_{kl}^{(n)}\left(m \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) = P\left\{S_{kl}^{(n)} = m \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right\}.$$

Тогда будем иметь

$$R_{kl}^{(n)}(2\pi t) = \mathbf{M}\left(\sum_{m_1}\sum_{m_2} \sin^2 \pi (m_1 - m_2)\, t\, P_{kl}^{(n)}\left(m_1 \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \times \right.$$
$$\left. \times P_{kl}^{(n)}\left(m_2 \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\right).$$

Каждое t, где $|t| \in \left[\frac{\varepsilon}{2\pi}, \frac{1}{2}\right]$, можно представить в виде

$$t = \frac{a}{q} + \delta, \quad \text{где} \quad \text{о. н. д.}(a, q) = 1, \quad a \leqslant 2q, \quad |\delta| \leqslant \frac{1}{q\tau},$$
$$0 < \tau < \infty, \qquad q \leqslant \tau.$$

Таким образом, отрезок $\left\{t : |t| \in \left[\frac{\varepsilon}{2\pi}, \frac{1}{2}\right]\right\}$ распадается на конечное число отрезков $I_{\frac{a}{q}}$ с центрами $\frac{a}{q}$. Границей между двумя отрезками $I_{\frac{a}{q}}$ и $I_{\frac{a_1}{q_1}}$ будем считать точку $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{q} + \frac{a_1}{q_1}\right)$. Во всем дальнейшем пусть $t \in I_{\frac{a}{q}}$, $q > 1$.

Если τ подобрать большим, то

$$R_{kl}^{(n)}(2\pi t) \geqslant \mathbf{M}\left(\sum_{\substack{m_1 \\ |m_1 - m_2| \leqslant \frac{\tau}{4}}}\sum_{m_2} \sin^2 \pi\left(\frac{a}{q}(m_1 - m_2) + \left(t - \frac{a}{q}\right)(m_1 - m_2)\right)\right) \times$$

$$\times P_{kl}^{(n)}\left(m_1 \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) P_{kl}^{(n)}\left(m_2 \mid F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \geqslant \frac{1}{q^2} a_{kl}^{(n)} + c_{21}\left(t - \frac{a}{q}\right)^2 b_{kl}^{(n)}, \quad (3.3)$$

где

$$a_{kl}^{(n)} = \mathbf{M}\Bigg(\sum_{\substack{m_1 \\ |m_1 - m_2| \leqslant \frac{\tau}{4}}} \sum_{\substack{m_2 \\ m_1 \not\equiv m_2 \,(\mathrm{mod}\, q)}} P_{kl}^{(n)}\left(m_1 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) P_{kl}^{(n)}\left(m_2 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\Bigg), \qquad (3.4)$$

$$b_{kl}^{(n)} = \mathbf{M}\Bigg(\sum_{\substack{m_1 \\ |m_1 - m_2| \leqslant \frac{\tau}{4}}} \sum_{\substack{m_2 \\ m_1 \equiv m_2 \,(\mathrm{mod}\, q)}} (m_1 - m_2)^2 P_{kl}^{(n)}\left(m_1 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) P_{kl}^{(n)}\left(m_2 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\Bigg).$$

В дальнейшем будем считать, что $k_i = \nu_i - 1$, $l_i = \nu_i + 1$, где ν_i определены в условиях леммы. Таким образом,

$$1 \leqslant \frac{k_{i+1} - l_i}{\left[\frac{\ln n}{\alpha^{(n)}}\right]} < C_6. \qquad (3.5)$$

В силу (2.68) или (2.68a) (см. примечание к лемме 6), при достаточно большом τ

$$\mathbf{M}\Bigg(\sum_{|m_1 - m_2| > \frac{\tau}{4}} \sum (m_1 - m_2)^2 \mathbf{P}\left\{ X_{k+1}^{(n)} = m_1 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)} \right\} \mathbf{P}\left\{ X_{k+1}^{(n)} = \right.$$

$$\left. = m_2 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)} \right\}\Bigg) \leqslant \varepsilon \bar{D}\left(X_{k+1}^{(n)} \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right), \qquad (3.6)$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое, независящее от k. Тогда из (3.3) и (3.4) выводим, что

$$\frac{\tau^2}{16} a_{kl}^{(n)} + b_{kl}^{(n)} \geqslant \mathbf{M}\Bigg(\sum_{\substack{m_1 \\ m_1 \not\equiv m_2 \,(\mathrm{mod}\, q)}} \sum_{m_2} (m_1 - m_2)^2 P_{kl}^{(n)}\left(m_1 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \times$$

$$\times P_{kl}^{(n)}\left(m_2 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) + \sum_{\substack{m_1 \\ m_1 \equiv m_2 \,(\mathrm{mod}\, q)}} \sum_{m_2} (m_1 - m_2)^2 P_{kl}^{(n)}\left(m_1 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \times$$

$$\times P_{kl}^{(n)}\left(m_2 \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)\Bigg) - 2\varepsilon \bar{D}\left\{ X_{k+1}^{(n)} \,|\, F_k^{(n)} \times F_k^{(n)} \right\}\Bigg) =$$

$$= 2\bar{D}\left(X_{k+1}^{(n)} \,|\, F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}\right)(1 - \varepsilon).$$

Согласно лемме 2, отсюда получаем, что

$$a_{kl}^{(n)} + b_{kl}^{(n)} \geqslant c_{22}\, \alpha^{(n)2}. \qquad (3.7)$$

Поэтому из (3.5) и (3.7) выводим

$$\sum_{i=1}^{N} \left(a_{k_i l_i}^{(n)} + b_{k_i l_i}^{(n)}\right) \geqslant c_{22}(N+1)\, \alpha^{(n)^2} \geqslant c_{23} \frac{n\alpha^{(n)3}}{\ln n}. \qquad (3.8)$$

Будем различать два случая. Если

$$A_n = \sum_{i=0}^{N} a_{k_i l_i}^{(n)} \geqslant \frac{c_{23}}{2} \frac{n\alpha^{(n)3}}{\ln n}, \qquad (3.9)$$

то лемма доказана, ибо из (2.8), (3.2), (3.9) получаем, что

$$|f_n(2\pi t)| \leqslant e^{-\frac{c_{23}}{2q^2}\frac{n\alpha^{(n)^3}}{\ln n} + \frac{n\alpha^{(n)}}{\ln n} e^{-\ln n}} \leqslant e^{-c_{24}\varphi^3(n)\ln n} \ll \frac{1}{n^m}, \qquad (3.10)$$

где m — любое постоянное.

Поэтому пусть

$$B_n = \sum_{i=0}^{N} b_{k_i l_i}^{(n)} > \frac{1}{2} \frac{c_{23} n \alpha^{(n)3}}{\ln n}. \tag{3.11}$$

Функция

$$Z_n(t) = \frac{1}{\ln n} \sum_{i=0}^{N} \mathbf{M} \Biggl(\sum_{\substack{m_1 \quad m_2 \\ m_1 \not\equiv m_2 \pmod q}} \sum \sin^2 \pi (m_1 - m_2) t P_{k_i l_i}^{(n)} \left(m_1 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right) \times$$

$$\times P_{k_i l_i}^{(n)} \left(m_2 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right) \Biggr).$$

В точке $t = \frac{a}{q}$ стремится к ∞, когда $n \to \infty$, так как

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{\ln n} \mathbf{M} \Biggl(\sum_{\substack{m_1 \quad m_2 \\ m_1 \not\equiv m_2 \pmod q}} \sum P_{k_i l_i}^{(n)} \left(m_1 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right) P_{k_i l_i}^{(n)} \left(m_2 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right) \Biggr) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{q^2} \sum_{i=0}^{N} \mathbf{M} \Biggl(\sum_{m_2} \Biggl(\min_r \sum_{\substack{m_1 \\ m_1 \not\equiv r \pmod q}} P \left\{ X_{k_i+1}^{(n)} = m_1 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right\} \Biggr) \times$$

$$\times P \left\{ X_{k_i+1}^{(n)} = m_2 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right\} \Biggr) =$$

$$= \frac{1}{\ln n} \frac{1}{q^2} \sum_{i=0}^{N} \mathbf{M} \left(\min_r P \left\{ X_{k_i+1}^{(n)} \not\equiv r \pmod q \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right\} \right). \tag{3.12}$$

Последнее же стремится к ∞, когда $n \to \infty$, согласно (3.1), потому, что по определению $k_{i+1} = \nu_i$.

В случае, когда число состояний счетное и множества A_k^i состоят просто из одной точки $\omega^i \in \Omega_k^{(n)}$, соотношение (3.1) или (3.12) примет вид

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{i=0}^{N} \sum_{i} \sum_{j} \Biggl(\min_r \sum_{\substack{m \\ m \not\equiv r \pmod q}} p_{0k_i}^{(n)}(i) p_{k_i+1}^{(n)}(i, m) p_{k_i+2}^{(n)}(m, j) \Biggr). \tag{3.13}$$

Из условия (2.67), как мы уже раньше доказали, следует справедливость неравенства (2.69). Тогда, применяя лемму 3 и неравенство (2.10), получаем

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{i=0}^{N} \mathbf{M} \Biggl(\sum_{\substack{m_1 \quad m_2 \\ |m_1 - m_2| \geqslant 2 \frac{\sqrt{n} \alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}(n) \ln n}}} \sum \mathbf{P} \left\{ X_{k_i+1}^{(n)} = m_1 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right\} \mathbf{P} \left\{ X_{k_i+1}^{(n)} = m_2 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right\} \Biggr) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln n} \sum_{i=0}^{N} \frac{\varphi^3(n) \ln^2 n}{n \alpha^{(n)3}} \mathbf{M} \Biggl(\sum_{\substack{m_1 \quad m_2 \\ |m_1 - m_2| \geqslant \frac{2\sqrt{n} \alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}(n) \ln n}}} \sum (m_1 - m_2)^2 \mathbf{P} \left\{ X_{k_i+1}^{(n)} = m_1 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right\} \times$$

$$\times \mathbf{P} \left\{ X_{k_i+1}^{(n)} = m_2 \mid F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \right\} \Biggr) \ll \frac{\varphi^3(n) \ln^2 n}{\ln n \, n \alpha^{(n)3}} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{N} \mathbf{M} \int\limits_{|x| > \frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}(n)\ln n}} x^2\, dF^{(n)}_{k_i+1}\left(x \,\middle|\, F^{(n)}_{k_i} \times F^{(n)}_{l_i}\right) \ll \frac{\varphi^3(n)\ln n}{n\alpha^{(n)3}} \cdot \frac{n\alpha^{(n)}\alpha^{(n)2}}{\ln n\,\varphi^4(n)} =$$

$$= \frac{1}{\varphi(n)} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{3.14}$$

Если $t \in \left[\frac{a}{q} - \frac{\delta_n}{q}, \frac{a}{q} + \frac{\delta_n}{q}\right]$, где $\delta_n = \frac{1}{4} \frac{\ln n \cdot \varphi^{\frac{3}{2}}(n)}{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}$, то при $|m_1 - m_2| \leqslant$ $\leqslant \frac{2\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}(n)\ln n}$, получаем

$$\sin^2 \pi\left((m_1 - m_2)\frac{a}{q} + (m_1 - m_2)\left(t - \frac{a}{q}\right)\right) \geqslant \sin^2 \pi\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2q}\right) \geqslant \frac{1}{q^2}. \tag{3.15}$$

Тогда из (3.12), (3.14) и (3.15) следует, что

$$Z_n(t) \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

равномерно в интервале $t \in \left[\frac{a}{q} - \frac{\delta_n}{q}, \frac{a}{q} + \frac{\delta_n}{q}\right] = \tilde{I}_{\frac{a}{q}}$. Поэтому существует функция $\varphi_q(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, что

$$Z_n(t) \geqslant \varphi_q(n), \tag{3.16}$$

в выше упомянутом интервале.

Таким образом, в случае (3.11), согласно (2.8), (3.3) и (3.16), будем иметь

$$\sqrt{\mathbf{D} S_n} \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2\pi} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}} |f_n(2\pi t)| \leqslant \sqrt{\mathbf{D} S_n} \sum_{\frac{a}{q}} \int\limits_{I_{\frac{a}{q}}} |f_n(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\mathbf{D} S_n}\, e^{N\varepsilon^{-\ln n}} \sum_{\frac{a}{q}} \left(\int\limits_{I_{\frac{a}{q}}} e^{-c_{11}\varphi_q(n)\ln n - c_{11}B_n\left(t - \frac{a}{q}\right)^2} dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{I_{\frac{a}{q}} \setminus \tilde{I}_{\frac{a}{q}}} e^{-c_{11}B_n\left(t - \frac{a}{q}\right)^2} dt \right). \tag{3.17}$$

У нас q целое и ограниченное, $1 < q < \tau$. Поэтому существует $\varphi_1(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ такая, что $\varphi_q(n) \geqslant \varphi_1(n)$ для любого q. Тогда, расширяя пределы интегрирования первого интеграла (3.17) по всей прямой, при большом n получаем

$$\sqrt{\mathbf{D} S_n} \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2\pi} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}} |f_n(2\pi t)|\, dt \ll \sqrt{\mathbf{D} S_n} \left(e^{-c_{11}\varphi_1(n)\ln n} \frac{1}{\sqrt{B_n}} + \right.$$

$$\left. + e^{-c_{11}\delta_n^2 B_n} \right) \ll \frac{1}{n^m}, \tag{3.18}$$

где $m > 0$ любое, так как

$$\delta_n^2 B_n \gg \frac{n\alpha^{(n)3}}{\ln n} \cdot \frac{\ln^2 n\, \varphi^3(n)}{n\alpha^{(n)3}} = \varphi^2(n) \ln n.$$

Этим лемма доказана.

Замечание к лемме 7. 1) Как видно из доказательства, *условие* (3.1) *можно заменить следующим*

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\ln^2 n}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{M}\left(\min_r \mathbf{P}\left\{X_k^{(n)}\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right\}\right)\to\infty, \qquad (3.1')$$

когда $n\to\infty$.

Действительно, из (3.1′) очевидным образом следует существование подпоследовательности $X_{v_1}^{(n)}, X_{v_2}^{(n)}, \ldots$, удовлетворяющей (3.1) и (3.2).

2) Если *величины ограничены*, т.е. $|X_k^{(n)}|<C$, то правая часть (3.14) будет равна нулю, если только $|m_1-m_2|>2C$. Следовательно, можно положить $\delta_n=\frac{1}{4C}$. Так как в (3.18)

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\left(e^{-c_{11}\varphi_1(n)\left(\ln\frac{1}{\alpha^{(n)}}+\ln\ln n\right)}\frac{1}{\sqrt{B_n}}+e^{-c_{11}\delta_n^2B_n}\right)\ll$$

$$\ll e^{-c_{11}\varphi_1(n)\left(\ln\frac{1}{\alpha^{(n)}}+\ln\ln n\right)}\frac{\ln n}{\alpha^{(n)2}}=o(1),$$

то достаточно, для $\sqrt{\mathbf{D}S_n}\int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi}|f_n(t)|\,dt\to0$ $(n\to\infty)$, *чтобы*

$$\frac{1}{\ln n\left(\ln\frac{1}{\alpha^{(n)}}+\ln\ln n\right)}\sum_{\substack{i\\ v_i\leqslant n}}\mathbf{M}\left(\min_r\mathbf{P}\left\{X_{v_i}^{(n)}\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\,|\,F_{v_i-1}^{(n)}\times F_{v_i+1}^{(n)}\right\}\right)\to\infty$$

или

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\ln n\left(\ln\frac{1}{\alpha^{(n)}}+\ln\ln n\right)}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\left(\min_r\mathbf{P}\left\{X_i^{(n)}\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\,|\,F_{i-1}^{(n)}\times F_{i+1}^{(n)}\right\}\right)\to\infty,$$

когда $n\to\infty$ *для всех* $q\geqslant2$, *где последовательность* $v_1, v_2, \ldots$ *определяется соотношением* (3.2).

4. Доказательство теорем 1 — 4 и их уточнений

Не нарушая общности, как и в леммах, положим, что $\mathbf{M}X_k^{(n)}=0$; $k=1, 2, \ldots, n$.

Имеем

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\,\mathbf{P}\{S_n=m\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{m^2}{2\mathbf{D}S_n}}=\int\limits_{-\pi\sqrt{\mathbf{D}S_n}}^{\pi\sqrt{\mathbf{D}S_n}}\left(f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}}dt=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4, \qquad (4.1)$$

где

$$I_1=\int\limits_{|t|\leqslant A}\left(f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}}dt,$$

$$I_2=\int\limits_{A<|t|\leqslant\varepsilon\sqrt{\mathbf{D}S_n}}e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}}f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}\right)dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon\sqrt{\mathbf{D}S_n} < |t| \leqslant \pi\sqrt{\mathbf{D}S_n}} e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}} f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}\right) dt,$$

$$I_4 = -\int\limits_{A < |t| \leqslant \pi\sqrt{\mathbf{D}S_n}} e^{-\frac{t^2}{2} - it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}} dt.$$

Здесь A и ε — положительные числа, которые определим позднее.

В условиях теорем 1 — 3 для S_n имеет место центральная предельная теорема (см. [2], теоремы 1 — 8). Следовательно, в силу (2.1) равномерно относительно m при любом постоянном A,

$$I_1 \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{4.2}$$

Очевидно, что

$$|I_2| \leqslant \sqrt{\mathbf{D}S_n} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} < |t| \leqslant \varepsilon} |f_n(t)|\, dt.$$

Тогда из леммы 6 и примечания к ней следует, что при соблюдении условий (8), (9), (10) теоремы 2 можно найти такую функцию $f(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ и $\varepsilon > 0$, что

$$|I_2| \leqslant e^{-\min\left(c_{11}A^2, f(n)\ln n\right)}. \tag{4.3}$$

Нетрудно заметить, что (4.3) имеет место и при условиях теоремы 1, ибо из равномерной ограниченности случайных величин $X_k^{(n)}$, условия (3) и из соотношения

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} \ln^{-\frac{2}{3}} n \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

вытекают соотношения (8) — (10).

Дело обстоит аналогично и в случае теоремы 3, так как из (13) и равномерной ограниченности по k и n моментов $\mathbf{M}|X_k^{(n)}|^\gamma$ следует, что равномерно по k выполняется соотношение

$$\frac{1}{\alpha^{(n)2}} \int\limits_{|x| > a\frac{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{\ln n}} x^2\, dF_k^{(n)}(x) \leqslant \frac{a^{\gamma-2}\ln^{\gamma-2} n}{n^{\frac{\gamma-2}{2}} \alpha^{(n)\frac{3}{2}(\gamma-2)+2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^\gamma\, dF_k^{(n)}(x) \ll$$

$$\ll \left(\frac{\ln^2 n}{n\alpha^{(n)\frac{3\gamma-2}{\gamma-2}}}\right)^{\gamma-2} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

при любом постоянном $a > 0$.

Учитывая наши замечания по поводу взаимных соотношений соответствующих условий теорем 1 — 3, из леммы 7 и замечаний к ней выводим, что

$$|I_3| \leqslant \sqrt{\mathbf{D}S_n} \int\limits_{\varepsilon < |t| \leqslant \pi} |f_n(t)|\, dt = o(1), \tag{4.4}$$

равномерно по m.

Наконец, очевидно, что для сколь угодно маленького $\varepsilon_1 > 0$ можно A подобрать настолько большим, чтобы было

$$|I_4| < \varepsilon_1. \tag{4.5}$$

Соотношения (4.1) — (4.5) показывают, что при соблюдении условий теорем 1 — 3

$$\sup_m \left| \sqrt{\mathbf{D} S_n}\, \mathbf{P}\{ S_n = m \} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2\mathbf{D} S_n}} \right| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Этим теоремы 1 — 3 доказаны полностью.

Чтобы доказать теорему 4 нам несколько придется изменить доказательство лемм 6 и 7. Итак пусть выполнены условия теоремы 4. Не нарушая общности, за i_{k0} можем считать 0, т. е. $p_k^{(n)}(0) \geqslant p_k^{(n)}(m)$ для любого целого m. Нам нужно доказать, что $p_k^{(n)}(0) \geqslant \delta_1 > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Согласно (15) имеем

$$p_k^{(n)}(0) \geqslant \frac{1}{2b} \sum_{|m| \leqslant b} p_k^{(n)}(m) \geqslant \frac{1}{2b^3} \sum_{|m| \leqslant b} m^2 p_k^{(n)}(m) \geqslant \frac{1}{2b^3}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2\right) = \delta_2 > 0,$$

если $\mathbf{D} X_k^{(n)} \geqslant \frac{1}{2}$.

Очевидно, что $p_k^{(n)}(0) \geqslant \delta_3 > 0$ при $\mathbf{D} X_k^{(n)} < \frac{1}{2}$. Поэтому всегда $p_k^{(n)}(0) \geqslant \delta_1 > 0$ для всех k и n. Отсюда, принимая во внимание (14), получаем, что

$$\mathbf{D} X_k^{(n)} \geqslant \sigma > 0. \tag{4.6}$$

Из (4.6) и (15) следует, что

$$\mathbf{D} X_k^{(n)} < C \tag{4.7}$$

для всех k и n. Поэтому, учитывая (2) и то, что $\alpha^{(n)} \geqslant \alpha > 0$ выводим

$$\mathbf{D} S_n \asymp n. \tag{4.8}$$

Согласно (3.22) (гл. 1, § 3) имеем

$$\begin{aligned} f_n(t) = \int_{\Omega_{l_1}^{(n)}} \int_{\Omega_{l_2}^{(n)}} \cdots \int_{\Omega_{l_N}^{(n)}} & f\left(t, S_{0l_1}^{(n)} \mid F_{l_1}^{(n)}\right) P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_1) f\left(t, S_{l_1 l_2}^{(n)} \mid F_{l_1}^{(n)} \times F_{l_2}^{(n)}\right) \times \\ & \times P_{l_1 l_2}^{(n)}(\omega_1, d\omega_2) \ldots f_{l_{N-1} l_N}^{(n)}\left(t, S_{l_{N-1} l_N}^{(n)} \mid F_{l_{N-1}}^{(n)} \times F_l^{(n)}\right) \times \\ & \times P_{l_N \, l_N}^{(n)}(\omega_{N+1}, d\omega_N) \end{aligned} \tag{4.9}$$

причем пусть набор

$$l_0 = 0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_N = n$$

такой, что

$$l_{i+1} - l_i = M_0, \tag{4.10}$$

где целое M_0 удовлетворяет условию

$$e^{-\alpha M_0} \leqslant \frac{1}{2}\delta_1.$$

Согласно эргодическому принципу,

$$\sup_i \left| p_{kl}^{(n)}(i, 0) - p_l^{(n)}(0) \right| \leqslant e^{-\alpha(l-k)},$$

поэтому

$$\sup_i \mathbf{P}\left\{ X_{rM_0}^{(n)} = 0 \mid X_{r-2M}^{(n)} = i \right\} \geqslant \frac{1}{2}\delta_1, \tag{4.11}$$

так как $p_l^{(n)}(0) \geqslant \delta_1 > 0$; $l_i = 1, \ldots, n$.

Выражение (4.9) в действительности есть сумма, так как множества состояний цепи счетные. Число

$$P_\Delta^{(n)} = P_{0l_1}^{(n)}(\omega_1) P_{l_1 l_2}^{(n)}(\omega_1, \omega_2) \ldots P_{l_{N-1} l_N}^{(n)}(\omega_{N-1}, \omega_N)$$

представляет вероятность того, что система в своей эволюции прошла по следующему пути:

$$\Lambda = \{\rightarrow \omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_3 \rightarrow \ldots \rightarrow \omega_N\}; \qquad \omega_i \in \Omega_{l_i}^{(n)}.$$

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — множество „путей“, в которых состояние ω^0 (событие $X_{l_i}^{(n)} = 0$) встречается не меньше чем $[\varepsilon_3 n]$ раз, где $\varepsilon_3 > 0$ — достаточно маленькое. Через $\mathfrak{M}_2$ обозначим оставшиеся „пути“. (Все это есть не что иное, как сечения Бернштейна — Линника.)

Оценим $\sum\limits_{\Lambda \in \mathfrak{M}_1} P_\Lambda^{(n)}$. Пусть $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ — последовательность независимых одинакого расспределенных случайных величин, причем

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } \frac{1}{4}\delta_1, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \frac{1}{4}\delta_1. \end{cases}$$

Тогда вероятность того, что

$$\zeta_N = Z_1 + \ldots + Z_N \leqslant [\varepsilon n]$$

будет оценкой сверху для $\sum\limits_{\Lambda \in \mathfrak{M}_1} P_\Lambda^{(n)}$. Если

$$F_N(x) = \mathbf{P}\left\{ \frac{\zeta_N - \frac{1}{4}\delta_1 N}{\sqrt{\frac{1}{4}\delta_1\left(1 - \frac{1}{4}\delta_1\right)N}} < x \right\},$$

то, согласно теоремам больших уклонений для независимых слагаемых,

$$\frac{F_N(x)}{\Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)}\left(1 + O\left(\frac{|x|}{\sqrt{N}}\right)\right). \tag{4.12}$$

Здесь $\Phi(x)$ — нормальный закон, $-o(\sqrt{N}) < x < -1$, а $\lambda(\tau)$ сходится при малых τ. Из (4.6) следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N \leqslant \frac{1}{4}\delta_r N + x\sqrt{\frac{1}{4}\delta_1\left(L - \frac{1}{4}\delta_2\right)N} \leqslant \right.$$
$$\leqslant C_4 \frac{1}{|x|} e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{N}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)}\left(1 + O\left(\frac{|x|}{\sqrt{N}}\right)\right).$$

Отсюда при $x = -\frac{\sqrt{N}}{\ln n}$ получаем, что

$$\sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}_1} \mathbf{P}_\Lambda^{(n)} < e^{-c_{17}\frac{n}{\ln n}}, \tag{4.13}$$

ибо $N \asymp n$.

Из (4.9) и (4.13) выводим

$$f_n(t) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}_1} f\left(t, S_{0l_1}^{(n)} \mid \omega_1\right) P_{0l_1}^{(n)}(\omega_1) f\left(t, S_{l_1 l_2}^{(n)} \mid \omega_1, \omega_2\right) P_{l_1 l_2}^{(n)}(\omega_1, \omega_2) \ldots$$
$$\ldots f\left(t, S_{l_{N-1} l_N}^{(n)} \mid \omega_{N-1}, \omega_N\right) P_{l_{N-1} l_N}^{(n)}(\omega_{N-1}, \omega_N) + O\left(e^{-c_{17}\frac{n}{\ln n}}\right). \tag{4.14}$$

Пусть k, l — какая нибудь пара l_i, l_{i+1}. Как и в (2.6) — (2.8) будем иметь

$$\mathbf{M}\left| f\left(t, S_{kl}^{(n)} \mid \omega^0 \times F_l^{(n)}\right)\right| \leqslant 1 - R_{kl}^{(n)}(t),$$

где

$$R_{kl}^{(n)} = \mathbf{M}\left(\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sin^2\left(\frac{m_1-m_2}{2}\quad t\right)P_{kl}^{(n)}\left(m_1\,|\,\omega^0\times F_0^{(n)}\right)P_{kl}^{(n)}\left(m_2\,|\,\omega^0\times F_l^{(n)}\right)\right);$$

$$P_{kl}^{(n)}\left(m\,|\,\omega^0\times F_l^{(n)}\right)=\mathbf{P}\left\{S_{kl}^{(n)}=m\,|\,\omega^0\times F_l^{(n)}\right\}.$$

Тогда из (4.14) получаем

$$|f_n(t)|\leqslant e^{-\sum\limits_{i=1}^{N}{}^{*} R_{k_i l_i}^{(n)}(t)}+O\left(e^{-c_{27}\frac{n}{\ln n}}\right).$$

Здесь * означает, что суммируются такие слагаемые $R_{k_i l_i}^{(n)}(t)$, для которых в сечении $\Lambda X_{k_i}^{(n)}=0$. Таких слагаемых будет не меньше $[\varepsilon_3 n]$.

Нетрудно заметить, что выполняется условие (2.67), (2.68) леммы 6, следует только выражения типа $\{\ldots\,|\,F_k^{(n)}\times F_l^{(n)}\}$ заменить выражениями типа $\{\ldots\,|\,\omega^0\times F_l^{(n)}\}$. Далее,

$$\mathbf{D}\,S_n\asymp n,\quad \overline{D}\left\{X_k^{(n)}\,|\,\omega^0\times F_{k+1}^{(n)}\right\}\geqslant\frac{1}{4}\alpha^{(n)}\overline{D}\left(X_k^{(n)}\,|\,\omega^0\right)>\frac{1}{4}\alpha\sigma_1>0,$$

согласно лемме 2. Следовательно

$$\overline{D}\left(S_{kl}^{(n)}\,|\,\omega^0\times F_l^{(n)}\right)\geqslant c_{28}(l-k).$$

Проследим оценки (3.8) — (3.18). Будем иметь

$$A_n+B_n\geqslant c_{29}n.$$

Поэтому в случае

$$A_n\geqslant\frac{1}{2}c_{29}n,$$

имеем

$$|f_n(2\pi t)|\leqslant e^{-c_{30}n};$$

и лемма 7 доказана. Пусть поэтому

$$B_n>\frac{c_{29}}{2}n.$$

Из условии (16) следует, что оно выполняется и для некоторой подпоследовательности индексов

$$k_1<k_2<\ldots,$$

причем подпоследовательность и шаг сечения M_0 всегда можно выбрать такими, что

$$\frac{(i-1)M_0+iM_0}{2}<k_i<iM_0;\qquad i=0,\ \ldots,\ N.$$

Так как

$$\mathbf{M}\left(\min_r P\left\{S_{l_{i-1}l_i}^{(n)}\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\,|\,F_{l_{i-1}}^{(n)}\times F_{l_i}^{(n)}\right\}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_j\min_r\sum_{m\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)}p_{k_i+1}^{(n)}(0,\ m)\,p_{k_i+2}^{(n)}(m,\ j),$$

то, согласно (3.12), получаем, что функция

$$Z_n(t)=\sum_{i=1}^{N}{}^{*}M\Bigg(\sum_{m_1}\sum_{\substack{m_2\\ m_1\not\equiv m_2\,(\mathrm{mod}\,q)}}\sin^2\pi(m_1-m_2)t\times$$

$$\times P_{k_i l_i}^{(n)}\left(m_1\,|\,\omega^0\times F_{l_i}^{(n)}\right)P_{k_i l_i}^{(n)}\left(m_2\,|\,\omega^0\times F_{l_i}^{(n)}\right)\Bigg)$$

расходится при $n \to \infty$, когда $t = \frac{a}{q}$. Функция $Z_n(t)$ непрерывна относительно t и возрастающая относительно n. Следовательно, для любого K можно найти n_0 и δ_0, что для $t \in \left[\frac{a}{q} - \delta, \frac{a}{q} + \delta\right] = \tilde{I}_{\frac{a}{q}}$ и $n \geqslant n_0$ будет

$$Z_n(t) \geqslant K.$$

Тогда

$$\sqrt{\mathbf{D} S_n} \sum_{\frac{a}{q}} \int_{t \in \tilde{I}_{\frac{a}{q}}} |f_n(2\pi t)|\, at \ll \sum_{\frac{a}{q}} \left(\int_{\tilde{I}_{\frac{a}{q}}} e^{-K - B_n\left(t - \frac{a}{q}\right)^2} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{I_{\frac{a}{q}} \setminus \tilde{I}_{\frac{a}{q}}} e^{-B_n\left(t - \frac{a}{q}\right)^2} dt \right) \ll e^{-K} + \sqrt{n}\, e^{-c_{31} n} < \varepsilon_5, \qquad \varepsilon_5 > 0,$$

так как постоянное в символе „$\ll$“ не зависит от K.

Поэтому при условиях теоремы 4 выполняется соотношения (4.1) – (4.5). Этим теорема 4 доказана.

Докажем теорему 7. Имеем

$$\sqrt{\mathbf{D} S_n}\, P\{S_n = m\} = I_1' + I_2 + I_3 + I_4', \tag{4.14^a}$$

где

$$I_4' = \int_{|t| \leqslant A} \left\{ f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{s-3} \left(\frac{\ln^2 n}{2n}\right)^k P_{nk}(it)\right)\right\} e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}} dt,$$

$$I_2 = \int_{A < |t| < \varepsilon\sqrt{\mathbf{D} S_n}} f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}\right) e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}} dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon\sqrt{\mathbf{D} S_n} < |t| \leqslant \pi\sqrt{\mathbf{D} S_n}} e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}} f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}\right) dt,$$

$$I_1' = \int_{|t| \leqslant A} e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{s-3} \left(\frac{\ln^2 n}{r_n}\right)^k P_{nk}(it)\right) e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}} dt.$$

Здесь A уже не постоянное, а

$$A = \psi(n) \sqrt{\ln n}, \tag{4.15}$$

где $\varphi(n)$ из теоремы 5. Из этой же теоремы следует, что

$$|I_4'| \ll \frac{\ln^{2(s-2)} n}{r_n^{s-2}} + \frac{\ln^{\frac{7}{2}s + \frac{3}{2}} \ln \ln n}{\left(\sqrt{\mathbf{D} S_n}\, \alpha^{(n)3}\right)^{s-1} \alpha^{(n)3} \sqrt{\mathbf{D} S_n}}. \tag{4.16}$$

У нас соблюдены условия (8), (10), (22). Кроме того, уже имели возможность заметить, что из (22) [точнее из (13) при $\gamma = s$] следует (9). Поэтому имеет место лемма 6 и, учитывая (4.3), (4.15), получаем

$$|I_2| \leqslant e^{-\min\left(c_{32} \psi^2(n), f(n) \ln n\right)}. \tag{4.17}$$

Аналогично здесь можно пользоватся леммой 7 и ее первым замечанием. Поэтому

$$|I_3| \ll \sqrt{\mathbf{D} S_n} \int_{\varepsilon < |t| \leqslant \pi} |f_n(t)|\, dt \ll \frac{1}{n^m},$$

где m — любое постоянное.

Далее, согласно лемме 5 и (4.15),

$$I_1' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{s-3} \left(\frac{\ln^2 n}{r_n}\right)^k P_{nk}(it)\right) e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}}} dt -$$

$$- \int\limits_{|t| \geqslant \psi(n)\sqrt{\ln n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{s-3} \left(\frac{\ln^2 n}{r_n}\right)^k P_{nk}(it)\right) e^{-it\frac{m}{\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}}} dt =$$

$$= g(x_{n,m}) + \sum_{k=1}^{s-3} \left(\frac{\ln^2 n}{r_n}\right)^k P_{nk}\left(-\frac{d}{dx_{nm}}\right) g(x_{nm}) +$$

$$+ O\left(\left(\frac{\ln^2 n}{r_n}\right)^{s-2} + \frac{\ln^{\frac{7}{2}s+\frac{3}{2}} \ln\ln n}{\left(\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}\,\alpha^{(n)2}\right)^{s-1} \alpha^{(n)3} \sqrt{\mathbf{D}\,S_n}}\right). \qquad (4.18)$$

Этим теорема 7 доказана. Вполне аналогично получается и теорема 3.

5. Предельные теоремы для плотностей

Докажем теорему 9. Пусть

$$\tilde{f}_n(t) = f_n\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}}\right).$$

Из леммы 6 следует, что

$$\int\limits_{A < |t| \leqslant \varepsilon\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}} |\tilde{f}_n(t)|\,dt \leqslant \sqrt{\mathbf{D}\,S_n} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}} < |t| \leqslant \varepsilon} |f_n(t)|\,dt < e^{-\min\left(c_{11}A^2, f(n)\ln n\right)},$$

где $f(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ и $\varepsilon > 0$ — достаточно маленькое.

Согласно интегральной теореме,

$$\int\limits_{|t| \leqslant A} \left|\tilde{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| dt \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

и, наконец, из (2.5), (2.6) и (3.22) главы 1 следует, что

$$\left|\int\limits_{|t| > \varepsilon\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}} \tilde{f}_n(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\mathbf{D}\,S_n} \int\limits_{|t| > \varepsilon} \prod_{i=1}^{N} \mathbf{M}\left|f\left(t,\ X_{\nu_k}^{(n)} \middle| F_{\nu_{k-1}}^{(n)} \times F_{\nu_{k+1}}^{(n)}\right)\right| dt +$$

$$+ O\left(n e^{-\frac{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant N-1} (\nu_{k+1} - \nu_k)\,\alpha^{(n)}}{\ln n}}\right) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Таким образом, $\tilde{f}_n(t)$ абсолютно интегрируема при всех достаточно больших значениях n. Следовательно, справедлива формула обращения

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \tilde{f}_n(t)\,dt,$$

а, если учитывать, полученные оценки, то и теорема. Нетрудно заметить что здесь проводится очевидная аналогия с работой В. В. Петрова [11], изучающей применимость локальных законов для плотностей сумм независимых случайных величин. Поэтому, имея лемму 6 и асимптотическое разложение для характеристической функции, получить остальное очень легко.

Чтобы доказать теорему 10, заметим, что согласно лемме 1[2] работы [12] (гл. IV, стр. 37)

$$\mathbf{M}\left|f\left(t,\ X_k^{(n)}\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right)\right|<1-(1-d^2)\frac{t^2}{8b^2}$$

в интервале $|t|<b$, если только

$$\mathbf{M}\left|f\left(t,\ X_k^{(n)}\,|\,F_{k-1}^{(n)}\times F_{k+1}^{(n)}\right)\right|\leqslant d<1$$

при $|t|\geqslant b$. Тогда из (23), считая, что $R>2B^{\frac{1}{\alpha}}$, получаем

$$\mathbf{M}\left|f\left(t,\ X_{\nu_{k_i}}^{(n)}\,|\,F_{\nu_{k_i-1}}^{(n)}\times F_{\nu_{k_i+1}}^{(n)}\right)\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{B}{|t|^\alpha} & \text{при}\quad |t|\geqslant R,\\ e^{-c_{33}t^2} & \text{при}\quad |t|<R.\end{cases}$$

У нас выполнены условия (8), (9), поэтому, согласно (2.79), (2.74)

$$|f_n(t)|\leqslant e^{-c_{34}\sqrt{\varphi(n)}\ln n}+e^{-c_{35}t^2\mathbf{D}S_n},\tag{5.2}$$

для $|t|\leqslant\frac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{n}\,\alpha(n)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}(n)\ln n}\right)^{-1}$;

Далее, в силу (29),

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\int\limits_{\frac{1}{2}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}(n)\ln n}{\sqrt{n}\,\alpha(n)^{\frac{3}{2}}}<|t|<R}|f_n(t)|\,dt\leqslant\sqrt{\mathbf{D}S_n}\int\limits_{\frac{1}{2}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}(n)\ln n}{\sqrt{n}\,\alpha(n)^{\frac{3}{2}}}\leqslant|t|<R}e^{-c_{36}n^{\bullet}t^2}\,dt\ll$$

$$\ll\frac{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}{\varphi(n)\ln n}e^{-\varphi(n)\ln n}\tag{5.3}$$

и

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\int\limits_{|t|\geqslant R}|f_n(t)|\,dt\leqslant\sqrt{\mathbf{D}S_n}\left(\frac{B}{R^\alpha}\right)^{c_{37}n^{\bullet}}R^2\int\limits_{|x|\geqslant R}\frac{dt}{t^2}\ll e^{-\varphi(n)\ln n}.\tag{5.4}$$

Так как

$$p_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5,$$

где

$$J_1=\int\limits_{|t|\leqslant A}\left(\tilde{f}_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)e^{-itx}\,dt,\tag{5.5}$$

$$J_2=\sqrt{\mathbf{D}S_n}\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}<|t|\leqslant\frac{1}{2}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}(n)\ln n}{\sqrt{n}\,\alpha(n)^{\frac{3}{2}}}}f_n(t)\,e^{-\frac{itx}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}}\,dt,\tag{5.6}$$

$$J_3=\sqrt{\mathbf{D}S_n}\int\limits_{\frac{1}{2}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}(n)\ln n}{\sqrt{n}\,\alpha(n)^{\frac{3}{2}}}\leqslant|t|<R}f_n(t)\,e^{-it\frac{x}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}}\,dt,\tag{5.7}$$

$$J_4 = \sqrt{\mathbf{D}\, S_n} \int\limits_{|t| \geqslant R} f_n(t)\, e^{-it\frac{x}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}}}, \tag{5.8}$$

$$J_5 = -\int\limits_{|x| > A} e^{-itx - \frac{t^2}{2}}\, dt, \tag{5.9}$$

то из соотношений (5.2) — (5.9) следует теорема, так как A можно подобрать достаточно большим.

Теорема 11 доказывается аналогично теореме 7, достаточно только положить $A = A_n = \psi(n)\sqrt{\ln n}$, где $\psi(n)$ из теоремы 5, и интегралы I_2, I_3 заменить интегралами J_2, J_3, J_4 и учитывать оценки (5.2), (5.3), (5.4) для них.

ГЛАВА III

МНОГОМЕРНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПОПАДАНИЙ В СОСТОЯНИЯ

Основной целью этой главы будет доказательство теоремы 12.

Пусть случайная величина $\xi_k^{(\alpha)}$ есть число попаданий в состояние e_α в k-ий момент времени и

$$\xi_k = \left(\xi_k^{(1)},\ \xi_k^{(2)},\ \ldots,\ \xi_k^{(s)}\right); \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Ясно, что ξ_k принимает своими значениями единичные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_s$, причем

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Сумма ζ_n сводится к сумме независимых случайных величин методом „сечений" Бернштейна — Линника. Пусть событие Λ состоит в том, что случайные величины $\xi_M, \xi_{2M}, \ldots, \xi_{(N-1)M}, \xi_n$, где $M = [\ln^6 n]$, $N = \left[\frac{n}{M}\right]$, принимают определенные фиксированные значения. Вероятность этого события обозначим P_Λ. Если положим

$$\eta_k = \sum_{b_{k-1}+1 \leqslant i \leqslant b_k - 1} \xi_i; \qquad b_k = kM, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \qquad b_N = n,$$

то $\zeta_{n\Lambda} = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_N$ будет суммой независимых неодинаково распределенных случайных величин.

Если

$$f_{\gamma n}(t) = \mathbf{M}\left(e^{2\pi i (t\zeta_n)} \mid \xi_0 = e_\gamma\right),$$

где вектор $t = (t_1, t_2, \ldots, t_s)$ и

$$f_{\gamma n\Lambda}(t) = \mathbf{M}\left(e^{2\pi i (t\zeta_{n\Lambda})} \mid \xi_0 = e_\gamma\right),$$

то, как мы уже неоднократно отмечали,

$$f_n(t) = \sum_{\Lambda} f_{\gamma n\Lambda}(t)\, P_\Lambda,$$

$$f_{\gamma n\Lambda}(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t) \ldots \varphi_N(t).$$

Здесь

$$\varphi_k(t) = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_s) = \mathbf{M}\left(e^{2\pi i (t\eta_k)}\right)$$

— характеристическая функция случайной величины η_k. Распределение $P_\gamma(m)=P_\gamma(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ может быть не больше, как $s-1$ мерным в силу соотношения

$$m_1+m_2+\ldots+m_s=n.$$

Поэтому положим $t_s=0$.

Оценим $|\varphi_k(t)|$ сверху в области

$$\sqrt{t_1^2+\ldots+t_{s-1}^2} \geqslant \Delta=\frac{\psi_1(n)\sqrt{\ln n}}{\sqrt{n}},$$

где $\psi_1(n)$ — сколь угодно медлено возрастающая функция.

Согласно теории диофантовых апроксимаций [13], при любом $\tau>0$ числа $t_1, t_2, \ldots, t_{s-1}$ можно представить в виде $t_1=\frac{a_1}{q}+\sigma_1$, $t_2=\frac{a_2}{q}+\sigma_2, \ldots,$ $t_{s-2}=\frac{a_{s-1}}{q}+\sigma_{s-1}$, причем о. н. д. $(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, q)=1$, $0<q\leqslant\tau$, $|\sigma_\alpha|\leqslant q^{-1}\tau^{-\frac{1}{s-1}}$. Положим $\tau=\frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^{6s+7}}$. Тогда каждая точка из области интегрирования попадает в некоторый кубик с центром в точке $\left(\frac{a_1}{q}, \frac{a_2}{q}, \ldots, \frac{a_{s-1}}{q}\right)$ и ребром длины $q^{-1}\tau^{-\frac{1}{s-1}}$, а для оценки модуля характеристической функции можно пользоватся равенством

$$1-|\varphi_k(t)|^2=2\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_{s-1}} \mathbf{P}\{\eta_k-\eta_k'=(n_1, n_2, \ldots, n_{s-1})\}\sin^2\pi\times$$
$$\times\left(\frac{a_1n_1+a_2n_2+\ldots+a_{s-1}n_{s-1}}{q}+\sigma\right),$$

где η_k и η_k' независимы и одинаково распределены, $\sigma=n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+\ldots+n_{s-1}\sigma_{s-1}$. Пусть t принадлежит какому нибудь кубику с $q\neq1$. Рассмотрим сумму $S_M'=\xi_1'+\xi_2'+\ldots+\xi_{M_1}'$, где случайные s-мерные величины ξ_i' принимают те же самые значения, что и ξ_i, и связаны в однородную цепь Маркова с переходными вероятностями $p(i, j)=p_1(i, j)$. Тогда, согласно лемме 14 статьи [4], при достаточно большом M_1 существуют такие значения $\left(m_1^{(1)}, m_2^{(2)}, \ldots, m_{s-1}^{(n)}\right)$ и $\left(m_1^{(1)}, m_2^{(2)}, \ldots, m_{s-1}^{(2)}\right)$, что $P\left\{S_{M_1}'=\left(m_1^{(i)}, \ldots, m_{s-1}^{(i)}\right)\middle|\xi_0'=e_\alpha, \xi_{M_1}=e_\alpha\right\}$ $(i_1=1, 2)$ причем эти значения можно подобрать так, чтобы

$$a_1\left(m_1^{(1)}-m_1^{(2)}\right)+a_2\left(m_1^{(1)}-m_2^{(2)}\right)+\ldots+a_{s-2}\left(m_{s-1}^{(1)}-m_{s-1}^{(2)}\right),$$

не делилось на число q данного кубика. Учитывая, что наша цепь типа Деблина, т. е. выполнено условие (A), легко находим, что случайная величина $\eta_k-\eta_k'$ принимает значение $\left(m_1^{(1)}-m_1^{(2)}, m_2^{(1)}-m_2^{(2)}, \ldots, m_{s-1}^{(1)}-m_{s-1}^{(2)}\right)$ с вероятностью $>c_2M^{-2s}\gg\ln^{-12s}n$. Отсюда

$$1-|\varphi_k(t)|^2>c_3\ln^{-12s}n\,\frac{1}{\tau^2}\gg\frac{\ln^{14}n}{n},$$

и

$$|f_{\gamma_n}(t)|\leqslant e^{-c_4\ln^2 n},$$

в области $\sqrt{t_1^2+\ldots+t_{s-1}^2}\geqslant\frac{(\ln n)^{6s+7}}{\sqrt{n}}$.

Положим

$$f_k(t,\ \alpha,\ \beta)=e^{it\beta}p_k(\alpha,\ \beta),$$

$$f_{k\,k+2}(t,\ \alpha,\ \beta)=\sum_{\delta=1}^{s}f_{k+1}(t,\ \alpha,\ \delta)f_{k+2}(t,\ \delta,\ \beta).$$

Лекго заметить, что

$$f_{\gamma_n}(t)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}f_{0l_1}(t,\ \gamma,\ \alpha_2)f_{l_1l_2}(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2)\ldots f_{l_{N-1}l_N}(t,\ \alpha_{N-1},\ \alpha_N),$$

для любого набора целых чисел

$$0<l_1<l_2<\ldots<l_N=n.$$

Последнее равенство показывает, что оценка или осимптотическое разложение $f_{\gamma_n}(t)$ „сводится" к соответствующим оценкам случая одномерных величин. Сводится в том смысле, что тут в точности можно повторить все те преобразования, которые мы проводили в главах I и II. Вместо дисперсий или моментов слагаемых мы здесь получим дисперсии или моменты соответствующих скалярных произведений. Кроме того, у нас величины

$$\zeta_k^{(\alpha)},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\qquad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

принимают своими значениями только 0 или 1 и, в силу условий (B) и (A), финальные вероятности

$$p_{0k}(\alpha)\geqslant c_5>0$$

равномерно по k, когда k большие. Отсюда следует, что

$$\mathbf{D}\,\xi_k^{(\alpha)}\geqslant c_6>0;\qquad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

равномерно при больших k. Далее в силу (B) и (A)

$$\sup_{i,\,r}\sum_{j=1}^{s}|p_{kl}(i,\ j)-p_{kl}(r,\ j)|\leqslant e^{-c_7(l-k)}.$$

Пусть $\xi_1',\ \xi_2',\ \ldots,\ \xi_n'$ — последовательность случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова с вероятностями перехода

$$p_1(\alpha,\ \beta);\qquad \alpha=1,\ \ldots,\ s,\qquad \beta=1,\ \ldots,\ s,$$

и устроеных так же, как и величины $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$. Тогда известно (см. [4], [5]), что

$$\mathbf{D}\,\zeta_{kl}^{\prime(\alpha)}\asymp l-k;\qquad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

и

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{s-1}\mathbf{M}\left(\xi_{kl}^{\prime(\alpha)}-\mathbf{M}\,\xi_{kl}^{\prime(\alpha)}\right)\left(\xi_{kl}^{\prime(\beta)}-\mathbf{M}\,\xi_{kl}^{\prime(\beta)}\right)t_\alpha t_\beta\geqslant c_8(l-k)\sum_{\alpha=1}^{s-1}t_\alpha^2$$

при больших $l-k$, где

$$\xi_{kl}^{\prime(\alpha)}=\sum_{i=k+1}^{l}\xi_i^{\prime(\alpha)}.$$

Отсюда и из эргодичности, пользуясь условием (A), легко вывести, что и

$$\mathbf{D}\,\xi_{kl}^{(\alpha)}\asymp l-k,\qquad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

и

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{s-1} \mathbf{M}\left(\zeta_{kl}^{(\alpha)} - \mathbf{M}\,\xi_{kl}^{(\alpha)}\right)\left(\xi_{kl}^{(\beta)} - \mathbf{M}\,\xi_{kl}^{(\beta)}\right) t_\alpha t_\beta \geqslant c_9 (l-k) \sum_{\alpha=1}^{s-1} t_\alpha^2,$$

где постоянное c, не зависит от выбора пары k, l, $1 \leqslant k < l \leqslant n$.

Учитывая сделанные замечания, как и в лемме 5 главы II (см. неравенство 2.66), получаем

$$|f_{\gamma_n}(t)| \leqslant e^{-c_{10} n \left(t_1^2 + \ldots + t_{s-1}^2\right)}$$

при

$$\sqrt{t_1^2 + \cdots + t_{s-1}^2} \leqslant \frac{\ln^{6s+7} n}{\sqrt{n}}.$$

Вполне аналогично, как это делалось в § 3, главы I, получаем

$$\left| \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_s} f_{\gamma_n}(t_1, t_2, \ldots, t_s)}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \ldots \partial t_s^{k_s}} \right| \ll n$$

при

$$\sqrt{t_1^2 + \cdots + t_s^2} \leqslant \frac{\psi_2(n) \sqrt{\ln n}}{\sqrt{n}},$$

где постоянное в „$\ll$" зависит от $k_1 + k_2 + \ldots + k_s$ и $\psi_1(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$. Отсюда

$$f_{\gamma_n}\left(\frac{t_1}{\sqrt{D_1}}, \ldots, \frac{t_{s-1}}{\sqrt{D_{s-1}}}, 0\right) = e^{i\left(\frac{M_1}{\sqrt{D_1}} t_1 + \ldots + \frac{M_{s-1}}{\sqrt{D_{s-1}}} t_{s-1}\right) - \frac{1}{2} Q_n(t)} \left(1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{k} P_{\nu n}(it) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right) + O\left(\frac{|t|^k + |t|^{3(k+1)} + |t|^{k+3}}{(\sqrt{n})^{k+1}}\right) e^{-\frac{1}{4} Q_n(t)}$$

при

$$\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_{s-1}^2} \leqslant \frac{\psi_1(n) \sqrt{\ln n}}{\sqrt{n}}.$$

Здесь коэффициенты многочлена ограничены по n. Квадратичная форма вторых моментов величины ξ_n

$$Q_n(t) \geqslant c_{11} (t_1^2 + \cdots + t_{s-1}^2),$$

где c_{11} не зависит от n.

Учитывая полученные оценки для $f_{\gamma_n}(t)$ и асимптотическое разложение, получаем теорему 12.

Автор сердечно благодарит Юрия Владимировича Линника, при руководстве и неустанном внимании которого была выполнена настоящая работа. Автор также выражает глубокую благодарность Андрею Николаевичу Колмогорову и Ролланду Львовичу Добрушину за внимание и ценные указания.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
16. III. 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник и Н. А. Сапогов. Многомерные интегральные и локальные законы для неоднородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 6 (1949), 533—566.
2. Р. Л. Добрушин. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теор. вероятн. и ее прим. **1**, 1,4 (1956), 72—88, 365—425.

3. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы, Москва, 1956.
4. А. Н. Колмогоров. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изд. АН СССР, сер. матем., 13,4 (1949) 281—300.
5. С. Х. Сираждинов. Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955.
6. А. Н. Колмогоров. Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний, Бюлл. МГУ, 13, (1937).
7. В. А. Статулявичюс. О локальной теореме для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР, 107, 4 (1956), 516—519.
8. В. А. Статулявичюс. Асимптотическое разложение для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР 112, 2 (1957), 306.
9. В. А. Статулявичюс. Локальная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова со счетным числом возможных состояний, ДАН СССР, 115, 5 (1957), 872—873.
10. П. Халмош. Теория меры, Москва, 1953.
11. В. В. Петров. Локальная предельная теорема для плотностей сумм независимых случайных величин, Теор. вероятн. и ее прим. 1, 113 (1956), 349—357.
12. Г. Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.
13. J. Koksma. Diophantische Approximationen, Berlin, 1937.
14. В. А. Статулявичюс. Предельные теоремы для неоднородных цепей Маркова, Труды Всесоюз. совещания по теор. вероятн. и матем. стастистике, Ереван, 1960, 45—47.

LOKALINĖS RIBINĖS TEOREMOS IR ASIMPTOTINIAI IŠDĖSTYMAI NEHOMOGENINĖMS MARKOVO GRANDINĖMS

V. STATULEVIČIUS

(Reziumė)

Tegu kiekvienam fiksuotam n atsitiktiniai dydžiai $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ yra surišti į Markovo grandinę su būsenų aibėmis $\mathfrak{Q}_k^{(n)}$, aibių $\mathfrak{Q}_k^{(n)}$ išmatuojamų poaibių σ-algebromis $\tilde{F}_k^{(n)}$ perėjimo tikimybėmis $P_k^{(n)}(\omega, A)$ iš būsenos $\omega \in \mathfrak{Q}_{k-1}^{(n)}$ $k-1$-me žingsnyje, į būsenų aibę $A \in \tilde{F}_k^{(n)}$ k-me žingsnyje, $k=2, \ldots, n$, pradiniu tikimybių pasiskirstymu $P_1(A)$, $\tilde{A} \in F_1^{(n)}$ ir ergodiškumo koeficientu

$$\alpha^{(n)} = 1 - \min_{2 \leqslant k \leqslant n} \sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} \left| P_k^{(n)}(\omega, A) - P_k^{(n)}(\tilde{\omega}, A) \right|.$$

Straipsnyje randamos sąlygos atsitiktinių $X_k^{(n)}$ dydžių pasiskirstymui ir ergodiškumo koeficientui $\alpha^{(n)}$ kada galioja:

1) normuotos sumos $\overline{S}_n = \dfrac{S_n - \mathbf{M}\, S_n}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}}$; $S_n = X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)}$ charakteringosios funkcijos $\overline{f}_n(t) = \mathbf{M} \exp it\overline{S}_n$ asimptotinis išdėstymas (Teoremos 5, 6),

2) Lokalinė ribinė teorema ir asimptotinis išdėstymas tikimybėms $\mathbf{P}\{S_n = m\}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ kai $X_k^{(n)}$ įgyja tik sveikas reikšmes (Teoremos 1, 2, 3, 4, 7, 8),

3) ribinė teorema ir asimptotinis išdėstymas tankiams $p_n(x) = \dfrac{d}{dx} \mathbf{P}\{S_n < x\}$ (Teoremos 9, 10, 11),

4) asimptotinis išdėstymas patekimų skaičiui į baigtinės nehomogeninės Markovo grandinės būsenas (Teorema 12).

LOCAL LIMIT THEOREMS AND ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR NON-STATIONARY MARKOV CHAINS

BY V. STATULEVICHIUS

(Summary)

In this paper we consider a seguense of series of random variables $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$, which in each of n-th series are connected into a Markov's chain, with a sets of states $\Omega_k^{(n)}$, with σ-algebraes $F_k^{(n)}$ of measurable subsets of these sets, with thransitional probabilities $P_k^{(n)}(\omega, A)$ from a state $\omega \in \Omega_{k-1}^{(n)}$ in the time moment $k-1$ into a set $A \in F_k^{(n)}$ in the time moment k, $k=2, \ldots, n$, with initial probability distribution $P_1^{(n)}(A)$, $A \in F_1^{(n)}$ and with a ergodic coefficient

$$\alpha^{(n)} = 1 - \min_{2 \leqslant k \leqslant n} \sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} \left| P_k^{(n)}(\omega, A) - P_k^{(n)}(\tilde{\omega}, A) \right|.$$

Let $X_k^{(n)}$ take only integer values and $X_k^{(n)}$ bounded be uniform in respect to n and $k \leqslant n$.

a) *If:*

1) $\mathbf{D} X_k^{(n)} \geqslant \sigma > 0$,

2) $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} \ln^{-\frac{2}{3}} n \to \infty \quad (n \to \infty)$,

3) $$\frac{\alpha^{(n)}}{\ln n \left(\ln \frac{1}{\alpha^{(n)}} + \ln \ln n \right)} \sum_{k=2}^{n} \mathbf{M} \left(\min_r \mathbf{P} \left\{ X_k^{(n)} \not\equiv r \pmod q \,\middle|\, F_k^{(n)} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times F_{k+1}^{(n)} \right\} \right) \to \infty \qquad (n \to \infty),$$

for all $q \geqslant 2$, then

$$\sup_m \left| \sqrt{\mathbf{D} S_n}\, \mathbf{P}\{ S_n = m \} - g(x_{nm}) \right| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

where

$$S_n = X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x_{nm} = \frac{m - \mathbf{M} S_n}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}},$$

b) *If condition* (1) *ist satisfied,*

$$r_n = \frac{(\mathbf{D} S_n)^{\frac{3}{2}} \alpha^{(n)2}}{n}$$

and

2′) $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{2}} n (\ln \ln n)^{-\frac{1}{7}} \to \infty \quad (n \to \infty)$,

3′) $$\frac{\alpha^{(n)}}{\ln^2 n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M} \left(\min_r \mathbf{P} \left\{ X_k^{(n)} \not\equiv r \pmod q \,\middle|\, F_{k-1}^{(n)} \times F_{k+1}^{(n)} \right\} \right) \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

for all $q \geqslant 2$. then we get for any $s \geqslant 3$

$$\sqrt{\mathbf{D} S_n}\, \mathbf{P}\{ S_n = m \} = g(x_{nm}) + \sum_{k=1}^{s-1} r_n^{-k} P_{nk} \left(\frac{-d}{dx_{nm}} \right) g(x_{nm}) + O\left(\frac{1}{r_n^s} \right)$$

where $P_{nk}(it)$ are polinomials of variable it of degree not greater than $3k$ with uniform bounded (in respect to n) coefficients. By symbol $P_{nk}\left(-\frac{d}{dx}\right) g(x)$ we denote that in the polinomials $P_{nk}(it)$ power $(it)^{\nu}$ are changed by the

$$(-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}} g(x).$$

Constant in the symbol „$O(\ldots)$" depends on s, n and is bounded for all n.

In Theorems 2, 3, 4, 7, 8 are find analogic results for unbounded item $X_k^{(n)}$.

In Theorems 5, 6 is obtain asymptotic expansion for charakteric function

$$\bar{f}_n(t) = \mathbf{M}\, e^{it\bar{S}_n}, \qquad \bar{S}_n = \frac{S_n - \mathbf{M}\, S_n}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}}.$$

In Theorems 9, 10, 11 are prove limit theorems and asymptotical expansion for density

$$p_n(x) = \frac{d}{dx}\, \mathbf{P}\,\{\, S_n < x \,\}.$$

In Theorem 12 is prove asimptotic expansion for the number of hit to the state of finite Markov's chain.