I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1961

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ, СВЯЗАННЫХ В НЕОДНОРОДНУЮ ЦЕПЬ МАРКОВА I

А. РАУДЕЛЮНАС

§ 1. Определения и обозначения

В работе исследуется применимость локальной предельной теоремы и её уточнений для последовательности серий s-мерных случайных векторов $\{\mathbf{X}_k^{(n)}\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$, связанных в каждой n-ой серии в неоднородную цепь Маркова с пространством возможных состояний $\Omega_k^{(n)}$, выделенными на них σ-алгебрами $\mathfrak{F}_k^{(n)}$ измеримых подмножеств множества $\Omega_k^{(n)}$, переходными вероятностными функциями $P_k^{(n)}(\omega, A)$ из состояния $\omega \in \Omega_{k-1}^{(n)}$ в момент времени $k-1$ в множество состояний $A \in \mathfrak{F}_k^{(n)}$ в момент времени k и коэффициентом эргодичности функции $P_k^{(n)}(\omega, A)$

$$\alpha_k^{(n)} = 1 - \sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} \left[P_k^{(n)}(\omega, A) - P_k^{(n)}(\tilde{\omega}, A) \right], \tag{1.1}$$

$$\omega \in \Omega_{k-1}^{(n)}, \quad \tilde{\omega} \in \Omega_{k-1}^{(n)}, \quad A \in \mathfrak{F}_k^{(n)}.$$

Переходную вероятностную функцию $P_{kl}^{(n)}(\omega, A)$ за $l-k$ время определим соотношением

$$P_{kl}^{(n)}(\omega, A) = \int_{\Omega_{k+1}^{(n)}} \cdots \int_{\Omega_{l-1}^{(n)}} \int_{A} P_{k+1}^{(n)}(\omega, d\omega_{k+1}) \ldots$$

$$\ldots P_{l-1}^{(n)}(\omega_{l-2}, d\omega_{l-1}) P_l^{(n)}(\omega_{l-1}, d\omega_l), \tag{1.2}$$

$\omega \in \Omega_k^{(n)}$, $A \in \mathfrak{F}_l^{(n)}$, и ей соответствующий коэффициент эргодичности обозначим через $\alpha_{kl}^{(n)}$ и коэффициент эргодичности цепи через $\alpha^{(n)}$, где

$$\alpha^{(n)} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k^{(n)}. \tag{1.3}$$

Сверху в скобках индекс „n“ обозначает номер серии (подробное описание цепи см. [1], [6]).

Во всей работе принято, что компоненты $X_{k,i}^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ случайных векторов $\mathbf{X}_k^{(n)}$ имеют конечные математические ожидания $\mathbf{M}X_{k,i}^{(n)}$ и дисперсии $\mathbf{D}X_{k,i}^{(n)}$, поэтому, не нарушая общности, предполагается, что

$$\mathbf{M}X_{k,i}^{(n)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Обозначим:

$$\mathbf{S}_n^{(n)} = \mathbf{X}_1^{(n)} + \mathbf{X}_2^{(n)} + \cdots + \mathbf{X}_n^{(n)},$$

$$S_{n,i}^{(n)} = X_{1,i}^{(n)} + X_{2,i}^{(n)} + \cdots + X_{n,i}^{(n)},$$

$$B_{n,i} = \sqrt{\mathbf{D} S_{n,i}^{(n)}},$$

$$\hat{\mathbf{S}}_n^{(n)} = \left(\frac{S_{n,1}^{(n)}}{B_{n,1}}, \frac{S_{n,2}^{(n)}}{B_{n,2}}, \ldots, \frac{S_{n,s}^{(n)}}{B_{n,s}} \right),$$

$$\mathbf{S}_{kl}^{(n)} = \mathbf{X}_{k+1}^{(n)} + \mathbf{X}_{k+2}^{(n)} + \cdots \mathbf{X}_l^{(n)},$$

$$F_{k,i}^{(n)}(x) = \mathbf{P}\left\{ X_{k,i}^{(n)} < x \right\},$$

$$F_{kl,i}^{(n)}(x) = \mathbf{P}\left\{ S_{kl,i}^{(n)} < x \right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \quad 0 < k \leqslant l \leqslant n,$$

$$P_n(\mathbf{m}) = \mathbf{P}\left\{ \mathbf{S}_n^{(n)} = \mathbf{m} \right\}.$$

Через $\mathbf{M}\left(\xi \mid \mathfrak{F}^{(n)}\right)$, $\mathbf{D}\left(\xi \mid \mathfrak{F}^{(n)}\right)$, $F\left(\xi \mid \mathfrak{F}^{(n)}\right) = \mathbf{P}\left\{\xi < x \mid \mathfrak{F}^{(n)}\right\}$ обозначаются соответственно условное математическое ожидание, дисперсия, условная функция распределения случайной величины ξ относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}^{(n)}$, а $\mathbf{P}\left(A \mid \mathfrak{F}^{(n)}\right)$ — условная вероятность события A относительно $\mathfrak{F}^{(n)}$; $\mathbf{M}\left(\xi \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)$, $\mathbf{D}\left(\xi \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)$ обозначают условное математическое ожидание или дисперсию случайной величины ξ относительно прямого произведения $\mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}$.

Аналогично, как это делается в работе [6], вводится переходная характеристическая функция случайного вектора $\mathbf{X}_k^{(n)}$

$$f_k(\mathbf{t}, \omega, A) = \int_A e^{i\left(\mathbf{t}\mathbf{X}_k^{(n)}\right)} P_k^{(n)}(\omega, d\tilde{\omega}), \tag{1.4}$$

$A \in \mathfrak{F}_k^{(n)}$, и переходная характеристическая функция суммы $S_{kl}^{(n)}$

$$f_{kl}(\mathbf{t}, \omega, A) = \int_{\Omega_{k+1}^{(n)}} \cdots \int_{\Omega_{l-1}^{(n)}} \int_A e^{i\left(\mathbf{t}\mathbf{S}_{kl}^{(n)}\right)} P_{k+1}^{(n)}(\omega, d\omega_{k+1}) \cdots$$
$$\cdots P_l^{(n)}(\omega_{l-1}, d\omega_l), \tag{1.5}$$

$A \in \mathfrak{F}_k^{(n)}$, где $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_s)$, $|\mathbf{t}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_s^2}$, и $(\mathbf{X}\mathbf{Y})$ — означает скалярное произведение этих векторов.

Пусть

$$f_1(\mathbf{t}, A) = \int_A e^{i\left(\mathbf{t}\mathbf{X}_1^{(n)}\right)} P_1^{(n)}(d\omega),$$

где $P_1^{(n)}(A)$ — начальное распределение вероятностей, $A \in \mathfrak{F}_1^{(n)}$. В связи с этим вводятся априорные характеристические функции равенством

$$f_{0l}(\mathbf{t}, A) = \int_{\Omega_1^{(n)}} f_{1l}(\mathbf{t}, \omega, A) f_1(\mathbf{t}, d\omega). \tag{1.6}$$

Характеристическую функцию суммы $\mathbf{S}_n^{(n)}$ обозначим через

$$f_n(\mathbf{t}) = \mathbf{M}e^{i\left(\mathbf{t}\mathbf{S}_n^{(n)}\right)}, \tag{1.7}$$

а нормированной суммы $\hat{S}_n^{(n)}$ через

$$\hat{f}_n(\mathbf{t}) = \mathbf{M}e^{i\left(\mathbf{t}\hat{\mathbf{S}}_n^{(n)}\right)}.$$

Квадратичную форму суммы $\mathbf{S}_{kl}^{(n)}$ будем обозначать

$$Q\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{kl}^{(n)}\right) = \mathbf{D}\left(\mathbf{S}_{kl}^{(n)}\mathbf{t}\right), \tag{1.8}$$

а суммы $\mathbf{S}_n^{(n)}$ посредством

$$Q_n(\mathbf{t}) = \mathbf{D}\left(\mathbf{S}_n^{(n)}\mathbf{t}\right) \tag{1.9}$$

и нормированной суммы

$$\varphi_n(\mathbf{t}) = t_1^2 + \cdots t_s^2 + 2\rho_{12}^{(n)} t_1 t_2 + \cdots + 2\rho_{s-1,s}^{(n)} t_{s-1} t_s, \tag{1.10}$$

где

$$\rho_{ij}^{(n)} = \frac{\mathbf{M}\left(S_{n,i}^{(n)} \cdot S_{n,j}^{(n)}\right)}{B_{n,i} \cdot B_{n,j}}, \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{1.11}$$

Во всей работе принято, что квадратичная форма $\varphi_n(\mathbf{t})$ равномерно относительно n положительно определена и поэтому всегда существует обратная ей форма $\varphi_n^{-1}(\mathbf{t})$, которая также равномерно положительно определена.

Если производные характеристической функции $f_n(\mathbf{t})$ существуют, то обозначим их

$$\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}\ldots\alpha_s^{r_s}(\mathbf{t}) = \frac{1}{i^r}\,\frac{\partial^r f_n(\mathbf{t})}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}\cdots\partial t_s^{r_s}} \tag{1.12}$$

и

$$\varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}(\mathbf{t}) = \frac{1}{i^r}\,\frac{\partial^r \ln f_n(\mathbf{t})}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}\cdots\partial t_s^{r_s}}, \tag{1.13}$$

а

$$\varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}(\mathbf{t})\Big|_{\mathbf{t}=0} = \varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}, \tag{1.14}$$

где $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_s$.

На σ-алгебре $\mathfrak{F}_l^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}$ вводим обобщенную меру $\nu_{kl}^{(n)}(\mathbf{t},\ x,\ y,\ .)$ зависящаю от параметров $\mathbf{t}$, $x \in \Omega_k^{(n)}$, $y \in \Omega_k^{(n)}$, обладающую тем свойствам, что для любого измеримого прямоугольника $A \times B \in \mathcal{F}_l^{(n)} \times \mathcal{F}_l^{(n)}$

$$\nu_{kl}^{(n)}(\mathbf{t},\ x,\ y,\ A\times B) = f'_{kl}(\mathbf{t},\ x,\ A) f_{kl}(\mathbf{t},\ y,\ B) - f_{kl}(\mathbf{t},\ x,\ B)\cdot f_{kl}(\mathbf{t},\ y,\ A). \tag{1.15}$$

Этим последним свойством функция $\nu_{kl}^{(n)}$ определяется однозначно.

Норму обобщенной меры $\nu_{kl}^{(n)}$ определим следующим соотношением:

$$\left\|\nu_{kl}^{(n)}(\mathbf{t},\ x,\ y,\ .)\right\| = \\ = \frac{1}{2} \sup_{|\varphi_{\mathbf{t}}(\omega,\tilde{\omega})| \leqslant 1} \left| \int\limits_{\Omega_l^{(n)}} \int\limits_{\Omega_l^{(n)}} \varphi_{\mathbf{t}}(\omega,\ \tilde{\omega})\, \nu_{kl}^{(n)}(\mathbf{t},\ x,\ y,\ d\omega,\ d\tilde{\omega}) \right|,$$

где верхняя грань берется по всем $\mathfrak{F}_l^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}$ — измеримым комплексным функциям $\varphi_{\mathbf{t}}(\omega,\ \tilde{\omega})$ с $|\varphi_{\mathbf{t}}(\omega,\ \tilde{\omega})| \leqslant 1$.

Заметим, что отдельные компонены случайных векторов $\mathbf{X}_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$, в каждой n-ой серии также связаны в неоднородную цепь Маркова и поэтому к ним применимы все результаты работы [6] в одномерном случае. Поэтому доказательство отдельных утверждений, где это возможно, будем сводить к компонентам и применять уже известные результаты.

§ 2. Основные теоремы

Локальным предельным теоремам и их уточнениям в одномерном случае посвящены работы В. А. Статулявичуса [6] и С. В. Нагаева [4], [5]. В. А. Статулявичусом локальная предельная теорема и её уточнения для неоднородной цепи Маркова были доказаны разработаным им прямым вероятностным методом, используя переходные характеристические функции. Локальные теоремы в однородном случае с помощью спектрального метода получены С. В. Нагаевым.

Многомерным локальным теоремам в основном посвящены работы А. Н. Колмогорова [2], Ю. В. Линика [3], В. А. Статулявичуса [7], С. Х. Сираждинова [8]. Ю. В. Лиником была показана s-мерная локальная теорема для числа попаданий в состояния неоднородной цепи Маркова типа Деблина при дополнительном условии о существовании „однотипных путей". В. А. Статулявичус [7] снес это ограничение. В однородном случае наиболее оконченные результаты получены А. Н. Колмогоровым и С. Х. Сираждиновым.

Настоящая работа является перенесением некоторых результатов работы [6] на s-мерный случай.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{X}_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$, *принимают своими значениями только целочисленные s-мерные векторы, причем* $\mathbf{X}_k^{(n)}$ *равномерно ограничены по k и n, $k=1, 2, \ldots, n$. Пусть, кроме того,* $\mathbf{D}(\mathbf{X}_k^{(n)}\mathbf{t}) \geqslant \sigma > 0$ *для всех* $\mathbf{t}$ *с* $|\mathbf{t}|=1$, $k=1, 2, \ldots, n$, *квадратичная форма* $\varphi_n(\mathbf{t})$ *нормированной суммы* $\hat{\mathbf{S}}_n^{(n)}$ *равномерно относительно n положительно определена,*

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} \ln^{-\frac{2}{3}} n \to \infty \ (n \to \infty) \tag{2.1}$$

и

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\ln n\left(\ln\frac{1}{\alpha^{(n)}}+\ln\ln n\right)} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\left(\min_r \mathbf{P}\left\{(\mathbf{a}\mathbf{X}_k^{(n)}) \not\equiv \right.\right.$$
$$\left.\left. \not\equiv r \,(\mathrm{mod}\, q) \mid \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)}\right\}\right) \to \infty \ (n \to \infty) \tag{2.2}$$

для всех $q \geqslant 2$ *и для всех целочисленных векторов* $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ с о. н. д. $(a_1, a_2, \ldots, a_s, q)=1$.

Тогда равномерно по $\mathbf{m}=(m_1, m_2, \ldots, m_s)$

$$\left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\right) \cdot P_n(\mathbf{m}) - g(\mathbf{X}_{nm}) \to 0 \ (n \to \infty) \tag{2.3}$$

где $g(\mathbf{X}_{nm})$ — *полность s-мерного нормального распределения,*

$$\mathbf{X}_{nm} = \left(\frac{m_1}{B_{n,1}}, \frac{m_2}{B_{n,2}}, \ldots, \frac{m_s}{B_{n,s}}\right).$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1, если только вместо (2.1) выполняется более сильное условие*

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{7}} n (\ln\ln n)^{-\frac{4}{7}} \to \infty \; (n \to \infty) \tag{2.4}$$

для любого целого $p \geqslant 3$, справедливо следующее разложение

$$\left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\right) \cdot P_n(\mathbf{m}) = g(\mathbf{X}_{nm}) + \sum_{\nu=1}^{p-3} \left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu} \cdot P_{n\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{nm}}\right) g(\mathbf{X}_{nm}) + O\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}, \tag{2.5}$$

где

$$r_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \frac{1}{n} B^3_{n,i}\, \alpha^{(n)2},$$

$P_{n\nu}(i\mathbf{t}) = P_{n\nu}(it_1, it_2, \ldots, it_s)$ — *многочлены от s переменных $it_1, it_2, \ldots, it_s$ степени не выше 3ν с действительными, ограниченными равномерно относительно n коэффициентами, определение которых дается в лемме 3. Символ $P_{n\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{nm}}\right) g(\mathbf{X}_{nm})$ означает, что в многочлене $P_{n\nu}(i\mathbf{t})$ произведения $(it_1)^{m_1} \cdot (it_2)^{m_2} \cdots (it_s)^{m_s}$ заменяются выражениями*

$$(-1)^{m_1 + \cdots + m_s} \frac{\partial^{m_1 + m_2 + \cdots + m_s} g(\mathbf{X}_{nm})}{\partial x_{n1}^{m_1} \partial x_{n2}^{m_2} \cdots \partial x_{ns}^{m_s}},$$

$g(\mathbf{X}_{nm})$ — *плотность s-мерного нормального распределения,* т. е.

$$g(\mathbf{X}_{nm}) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \varphi_n^{-1}(\mathbf{X}_{nm})}$$

Δ — *определитель формы $\varphi_n(\mathbf{t})$.*

Константа в символе „$O(\ldots)$" и тождественном ему „$\ll$" зависит от k и ограничена для всех n.

§ 3. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ существуют равномерно по k и n ограниченные моменты $\mathbf{M}|X^{(n)}_{k,i}|^8$, $k \leqslant n$,*

$$\psi(n) = \alpha^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{7}} n (\ln\ln n)^{-\frac{4}{7}} \to \infty \; (n \to \infty), \tag{3.1}$$

$$|X^{(n)}_{k,i}| \leqslant K_{n,i}, \quad \text{если} \quad k \in \mathfrak{M}, \quad \text{и} \quad |X^{(n)}_{k,i}| \leqslant n, \tag{3.1a}$$

если $k \overline{\in} \mathfrak{M}$, где набор целых чисел

$$0 = k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \cdots < k_N < l_N = n$$

определяется следующим образом:

$$k_{j+1} - l_j = \left[\frac{\psi(n) \ln n}{\alpha^{(n)}}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{3.2}$$

$$l_j - k_j = \left[\frac{\alpha^{(n)3} n}{\psi^8(n) \ln^3 n}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.3}$$

и

$$K n, i = \frac{\alpha^{(n)} B_{n,i}}{\psi^3(n) \ln^{7/6} n}, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.4}$$

а множество $\mathfrak{M}$ соотношением

$$\mathfrak{M} = \left\{k : l_j - \left[\frac{\psi(n) \ln n}{\alpha^{(n)}}\right] \leqslant k \leqslant l_j + \left[\frac{\psi(n) \ln n}{\alpha^{(n)}}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, N\right\}. \tag{35}$$

Пусть кроме того $\mathbf{D}\left(\mathbf{X}_k^{(n)}\mathbf{t}\right) \geqslant \sigma > 0$ *для всех* $\mathbf{t}$ *с* $|\mathbf{t}| = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *и квадратичная форма* $\varphi_n(\mathbf{t})$ *равномерно относительно* n *положительно определенная.*

Тогда для

$$|t_i| < \frac{\psi(n)\ln n}{B_{n,i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

имеет место следующие соотношения:

1)
$$f_n(\mathbf{t}) = e^{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t})}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\psi(n)}}\right)\right), \tag{3.6}$$

2) *если*

$$v - u \leqslant \frac{n\alpha^{(n)4}}{\ln^4 n},$$

то

$$\frac{\mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{0u}^{(n)} \mid \mathfrak{F}_u^{(n)}\right)\right| \sup \left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{un}^{(n)} \mid \mathfrak{F}_v^{(n)}\right)\right|}{|f_n(\mathbf{t})|} < 2, \tag{3.7}$$

где

$$f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{kl}^{(n)} \mid \mathfrak{F}_l^{(n)}\right) = \mathbf{M}\left(e^{i\left(\mathbf{t}\mathbf{S}_{kl}^{(n)}\right)} \mid \mathfrak{F}_l^{(n)}\right),$$

$[y]$ — *целая часть выражения* y.

Доказательство. Соотношения (3.1) — (3.3) показывают, что

$$\alpha^{(n)} \geqslant \frac{\psi(n)\ln^{\frac{5}{7}} n\,(\ln\ln n)^{\frac{4}{7}}}{n^{\frac{1}{7}}}, \tag{3.8}$$

$$N \asymp \frac{\psi^8(n)\ln^2 n}{\alpha^{(n)2}}; \tag{3.9}$$

Известно (см. [6] лемму 8), что

$$\alpha^{(n)}(l-k) \ll \mathbf{D}S_{kl,i}^{(n)} \ll \frac{l-k}{\alpha^{(n)}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.10}$$

а также известно, если $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ — совокупность случайных величин с конечными дисперсиями, связанных в цепь Маркова с m моментами времени, причем все коэффициенты эргодичности вероятностей перехода за один шаг не меньше числа $1-\eta$, где $\eta < \frac{1}{2}$, то существует постоянная $K < \infty$, что

$$\begin{aligned}|\mathbf{D}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_m) - (\mathbf{D}Z_1 + \mathbf{D}Z_2 + \cdots \mathbf{D}Z_m)| &\leqslant \\ \leqslant K\sqrt{\eta}\,(\mathbf{D}Z_1 + \mathbf{D}Z_2 + \cdots + \mathbf{D}Z_m),&\end{aligned} \tag{3.11}$$

(см. [1] неравенство (5.28)).

В нашем случае

$$\sqrt{\eta} \leqslant Ce^{-\psi(n)\ln n} < \frac{1}{2};$$

Тогда из (3.10) — (3.11) получаем

$$\sum_{j=1}^{N}\mathbf{D}\left(S_{k_j l_j,i}^{(n)}\right) = \mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^{N} S_{k_j l_j,i}^{(n)}\right) + O\left(e^{-\psi(n)\ln n}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{D}\left(S_{k_j l_j,i}^{(n)}\right)\right), \tag{3.12}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}\mathbf{D}\left(S_{l_j k_j,\,i}^{(n)}\right) = \mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^{N-1} S_{l_j k_{j+1},i}^{(n)}\right) + O\left(e^{-\psi(n)\ln n}\right) \tag{3.13}$$

и

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{D}\left(S^{(n)}_{l_j k_{j+1}, i}\right)}{\sum_{j=1}^{N} \mathbf{D}\left(S^{(n)}_{k_j l_j, i}\right)} \ll \frac{\psi^8(n)\ln^4 n}{n\alpha^{(n)4}} \to 0 \; (n \to \infty), \tag{3.14}$$

т.е. сумма дисперсий „отрезков" длины $k_{j+1}-l_j$ мала по сравнению с $\sum_{j=1}^{N} \mathbf{D}\left(S^{(n)}_{k_j l_j, i}\right)$, $i=1, \ldots, s$. Поэтому дисперсия суммы $S^{(n)}_{n,i}$ — любой компоненты $i=1, 2, \ldots, s$ эквивалентна $\sum_{j=1}^{N} \mathbf{D}\left(S^{(n)}_{k_j l_j, i}\right)$, потому что

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{D} S^{(n)}_{n,i}}{\sum_{j=1}^{N} \mathbf{D} S^{(n)}_{k_j l_j, i}} \right| \ll \frac{\psi^{\frac{9}{2}}(n)\ln^2 n}{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)2}} \to 0 \; (n \to \infty). \tag{3.15}$$

Пользуясь неравенством Гельдера из (3.13) — (3.15) и эргодичности цепи, выводим

$$\left| \mathbf{M}\left(\sum_{j=1}^{N} S^{(n)}_{k_j l_j, i} \cdot S^{(n)}_{k_j l_j, h}\right) - \mathbf{M}\left(S^{(n)}_{n,i} \cdot S^{(n)}_{n,h}\right) \right| \ll$$

$$\ll \frac{\psi^{\frac{3}{2}}(n)\ln^2 n}{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)2}} B_{n,i} B_{n,h}, \qquad i, h = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.16}$$

У нас $l-k \geqslant \frac{1}{\alpha^{(n)}}$ и выполнены все условия леммы 8 работы [6], следовательно,

$$\mathbf{M}\left| S^{(n)}_{kl,i} \right|^3 \leqslant K_1\left(\frac{(l-k)\ln n\,(\ln\ln n)^2}{\alpha^{(n)2}} + \sqrt{\frac{l-k}{\alpha^{(n)}}}\,\mathbf{D} S^{(n)}_{kl,i}\right), \tag{3.17}$$

где $K_1 > 0$ — постоянная, $i=1, 2, \ldots, s$.

Очевидно, что характеристическую функцию $f_n(\mathbf{t})$ можно выразить посредством переходных характеристических функций $f_k(\mathbf{t}, \omega, A)$ следующим образом:

$$f_n(\mathbf{t}) = f_{0n}(\mathbf{t}, \Omega^{(n)}) \tag{3.18}$$

Из (3.7), (3.18) и эргодичности цепи следует, что характеристическую функцию суммы $S^{(n)}_n$ можно представить в следующем виде:

$$f_n(\mathbf{t}) = \int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_1}} \cdots \int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_N}} f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}^{(n)}_{0l_1} \,|\, \mathfrak{F}^{(n)}_{l_1}\right) P^{(n)}_{0l_1}(d\omega_{l_1}) \cdot$$

$$\cdot f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}^{(n)}_{l_1 l_2} \,|\, \mathfrak{F}^{(n)}_{l_1} \times \mathfrak{F}^{(n)}_{l_2}\right) P^{(n)}_{0l_2}(d\omega_{l_2}) \cdots$$

$$\cdots f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}^{(n)}_{l_{N-1} l_N} \,|\, \mathfrak{F}^{(n)}_{l_{N-1}} \times \mathfrak{F}^{(n)}_{l_N}\right) \cdot P^{(n)}_{0l_N}(d\omega_{l_N}) + O\left(N \cdot e^{-\psi(n)\ln n}\right). \tag{3.19}$$

Пусть $r < k < l$ какая нибудь тройка чисел $l_{j-1}, k_j, l_j, j=1, 2, \ldots, N$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l}} f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}^{(n)}_{rk} \,|\, \mathfrak{F}^{(n)}_{r} \times \mathfrak{F}^{(n)}_{l}\right) P^{(n)}_{0l}(d\omega_l) = f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}^{(n)}_{rl} \,|\, \mathfrak{F}^{(n)}_{r}\right).$$

При фуксированном $\omega_r \in \Omega^{(n)}$ значения случайной величины $f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \mathfrak{F}_r^{(n)}\right)$ или $f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \mathfrak{F}_r^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)$ соответственно обозначим $f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right)$, или $f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \omega_r \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)$.

Тогда, используя известное неравенство $(x_1 + \ldots + x_s)^m \leqslant s^{m-1}(x_1^m + \ldots \ldots + x_s^m)$, справедливое для любых xi, $i = 1, \ldots, s$ разлагаем. $f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right)$ по формуле Тэйлора

$$f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right) = 1 - \frac{1}{2}\Big[t_1^2 \mathbf{D}\left(S_{rl,1}^{(n)} \mid \omega_r\right) + \cdots + t_s^2 \mathbf{D}\left(S_{rl,s}^{(n)} \mid \omega_r\right) +$$
$$+ 2t_1 t_2 \mathbf{M}\left(S_{rl,1}^{(n)} S_{rl,2}^{(n)} \mid \omega_r\right) + \cdots + 2t_{s-1} t_s \mathbf{M}\left(S_{rl,s-1}^{(n)} \cdot S_{rl,s}^{(n)} \mid \omega_r\right)\Big] +$$
$$+ \frac{s^2}{3!} \vartheta_1 \sum_{i=1}^{s} t_i^3 \mathbf{M}\left(\mid S_{rl,i}^{(n)} \mid^3 \mid \omega_r\right), \tag{3.20}$$

где $\omega_r \in \Omega_r^{(n)}$, $|\vartheta_1| \leqslant 1$.

Нетрудно убедится, что, применяя неравенство Гельдера и оценку дисперсий сверху, условные вторые моменты и смешанные вторые моменты любой компоненты случайного вектора $\mathbf{S}_{rl}^{(n)}$ можно заменить соответствующими моментами вектора $\mathbf{S}_{kl}^{(n)}$, а затем безусловными, т. е.

$$\sup_{\omega_r}\left|\mathbf{D}\left(S_{rl,i}^{(n)} \mid \omega_r\right) - \mathbf{D}\left(S_{kl,i}^{(n)}\right)\right| \leqslant \frac{\alpha^{(n)}}{\psi^7(n)\ln^{\frac{5}{2}} n} \sqrt{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)} \mathbf{D}S_{kl,i}^{(n)}} +$$
$$+ \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^{14}(n)\ln^5 n} \mathbf{D}S_{n,i}^{(n)}, \tag{3.21}$$

$$\sup_{\omega_r}\left|\mathbf{M}\left(S_{rl,i}^{(n)} \cdot S_{rl,h}^{(n)} \mid \omega_r\right) - \mathbf{M}\left(S_{kl,i}^{(n)} \cdot S_{kl,h}^{(n)}\right)\right| \leqslant \frac{\alpha^{(n)}}{\psi^7(n)\ln^{\frac{5}{2}} n} \sqrt{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)} \cdot \mathbf{D}S_{kl,h}^{(n)}} +$$
$$+ \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^{14}(n)\ln^5 n} \sqrt{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)} \mathbf{D}S_{n,h}^{(n)}}, \qquad i, h = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.22}$$

Основываясь на том, что при больших n всегда

$$\sup_{\omega_r} \mathbf{M}\left(\mid S_{rl,i}^{(n)} \mid^3 \mid \omega_r\right) \leqslant 2\mathbf{M}\left(\mid S_{kl,i}^{(n)} \mid^3\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.23}$$

из (3.20) — (3.23) получаем

$$f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \omega_r\right) = 1 - \frac{1}{2}\Big[t_1^2 \mathbf{D}S_{kl,1}^{(n)} + \cdots + t_s^2 \mathbf{D}S_{kl,s}^{(n)} + 2t_1 t_2 \mathbf{M}\left(S_{kl,1}^{(n)} \cdot S_{kl,2}^{(n)}\right) + \cdots$$
$$\cdots + 2t_{s-1} t_s \mathbf{M}\left(S_{kl,s-1}^{(n)} S_{kl,s}^{(n)}\right)\Big] + Z_{kl}^{(n)}(\omega_r), \tag{3.24}$$

где

$$Z_{kl}^{(n)}(\omega_r) = \sum_{i,h=1}^{s} t_i t_h O\Bigg(\frac{\alpha^{(n)}}{\psi^7(n)\ln^{\frac{5}{2}} n} \sqrt{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)} \mathbf{D}S_{kl,h}^{(n)}} +$$
$$+ \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^{14}(n)\ln^5 n} \sqrt{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)} \cdot \mathbf{D}S_{n,h}^{(n)}} + \frac{s^2}{3} \vartheta_1 \sum_{i=1}^{s} t_i^3 \mathbf{M}\left(\mid S_{kl,i}^{(n)} \mid^3\right)\Bigg). \tag{3.25}$$

Оценим $Z_{kl}^{(n)}(\omega_r)$. У нас

$$|t_i| \leqslant \frac{\psi(n)\sqrt{\ln n}}{B_{n,i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.26}$$

поэтому из (3.17) вытекает, что

$$\mathbf{M}\left(|S_{kl,i}^{(n)}|^3\right) \ll \frac{n(\ln\ln n)^2}{\psi^8(n)\ln^2 n} + \frac{\sqrt{n\alpha^{(n)}}}{\psi^4(n)\ln^{\frac{3}{2}} n}\mathbf{D}S_{kl,i}^{(n)}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{3.27}$$

Аналогично

$$\sum_{i,h=1}^{s} t_i t_h O\left(\frac{\alpha^{(n)}}{\psi^7(n)\ln^{\frac{5}{2}} n}\sqrt{\mathbf{D}S_{n,h}^{(n)}\mathbf{D}S_{kl,i}^{(n)}} + \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^{14}(n)\ln^5 n}\sqrt{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)}\mathbf{D}S_{n,h}^{(n)}}\right) \ll$$

$$\ll \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^{12}(n)\ln^4 n} + \sum_{i=1}^{s}\frac{\alpha^{(n)}}{\psi^6(n)\ln^{\frac{3}{2}} n}\sqrt{\frac{\mathbf{D}S_{kl,i}^{(n)}}{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)}}}. \tag{3.28}$$

Подставляя (3.27), (3.28) в (3.25) при условии (3.26), выводим

$$Z_{kl}^{(n)}(\omega_r) \ll U_{kl}^{(n)}, \tag{3.29}$$

где

$$U_{kl}^{(n)} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\alpha^{(n)}}{\psi^6(n)\ln^{\frac{3}{2}} n}\sqrt{\frac{\mathbf{D}S_{kl,i}^{(n)}}{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)}}} + \frac{\alpha^{(n)2}}{\psi^{12}(n)\ln^4 n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\psi^3(n)\ln^{\frac{3}{2}} n}{(\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)})^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{n(\ln\ln n)^2}{\psi^8(n)\ln^2 n} + \frac{\sqrt{n\alpha^{(n)2}}}{\psi^4(n)\ln^{\frac{3}{2}} n}\cdot\mathbf{D}S_{kl,i}^{(n)}\right]\right). \tag{3.30}$$

Таким образом, из (3.24) и (3.29) следует

$$f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{rl}^{(n)}\,|\,\omega_r\right) = 1 - \frac{1}{2}Q\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{kl}^{(n)}\right) + O\left(U_{kl}^{(n)}\right). \tag{3.31}$$

Подставляя (3.31) в (3.19) при $k=k_N$ и $l=l_N$, получаем

$$f_n(\mathbf{t}) = \left(1 - \frac{1}{2}Q\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{k_N l_N}^{(n)}\right)\right)\int_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\cdots\int_{\Omega_{l_{N-1}}^{(n)}} f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{0l_1}^{(n)}\,|\,\mathfrak{F}_{l_1}^{(n)}\right)\cdot$$

$$P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_{l_1})\cdot f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{l_1 l_2}^{(n)}\,|\,\omega_{l_1}\times\mathfrak{F}_{l_2}^{(n)}\right)P_{0l_2}^{(n)}(d\omega_{l_2})\ldots$$

$$f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{l_{N-2}l_{N-1}}^{(n)}\,|\,\omega_{l_{N-2}}\times\mathfrak{F}_{l_{N-1}}^{(n)}\right)P_{0l_{N-1}}^{(n)}(d\omega_{l_{N-1}}) +$$

$$+ O\left(U_{k_N l_N}^{(n)}\int_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\cdots\int_{\Omega_{l_{N-1}}^{(n)}}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{0l_1}^{(n)}\,|\,\mathfrak{F}_{l_1}^{(n)}\right)\right|P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_{l_1})\ldots\right.$$

$$\left.\cdot\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{l_{N-2}l_{N-1}}^{(n)}\,|\,\omega_{l_{N-2}}\times\mathfrak{F}_{l_{N-1}}^{(n)}\right)\right|P_{0l_{N-1}}^{(n)}\left(d\omega_{l_{N-1}}\right) + O(N\cdot e^{-\psi(n)\ln n})\right). \tag{3.32}$$

Чтобы продолжить начатый процесс, нужно оценить сверху выражение $q_n(\mathbf{t})$, где

$$q_n(\mathbf{t}) = \int_{\Omega_{l_1}^{(n)}}\cdots\int_{\Omega_{l_N}^{(n)}}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{0l_1}^{(n)}\,|\,\mathfrak{F}_{l_1}^{(n)}\right)\right|P_{0l_1}^{(n)}(d\omega_{l_1})\ldots$$

$$\cdot\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{l_{N-1}l_N}^{(n)}\,|\,\omega_{l_{N-1}}\times\mathfrak{F}_{l_N}^{(n)}\right)\right|P_{0l_N}^{(n)}(d\omega_{l_N}) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{0l_1}^{(n)}\,|\,\mathfrak{F}_{l_1}^{(n)}\right)\right|\sup_{\omega_{l_1}\in\Omega_{l_1}^{(n)}}\mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{l_1 l_2}^{(n)}\,|\,\omega_{l_1}\times\mathfrak{F}_{l_2}^{(n)}\right)\right|\ldots$$

$$\cdot\sup_{\omega_{l_{N-1}}\in\Omega_{l_{N-1}}^{(n)}}\mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{l_{N-1}l_N}^{(n)}\,|\,\omega_{l_{N-1}}\times\mathfrak{F}_{l_N}^{(n)}\right)\right|. \tag{3.33}$$

С этой целью оценим любой из множителей правой части неравенства (3.33).

Как и выше r, k, l означают одно из чисел l_{j-1}, k_j, l_j, $j=1, 2, \ldots, N$. Очевидно, что

$$\mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \omega_r \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\right| \leqslant \mathbf{M}\left(1+\frac{1}{2}\left(\left|f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \omega_r \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\right|^2-1\right)\right)=$$
$$=\mathbf{M}\left(1+\frac{1}{2}\left(f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{rl}^{(n)}-\mathbf{S}_{rl}^{(n)\prime} \mid \omega_r \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\right)\right), \tag{3.34}$$

где $\mathbf{S}_{rl}^{(n)\prime}$ — второй независимый экземпляр случайного вектора $\mathbf{S}_{rl}^{(n)}$.

Раскладывая $f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{rl}^{(n)}-\mathbf{S}_{rl}^{(n)\prime} \mid \omega_r \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)$ по формуле Тэйлора, затем, как и при выводе (3.24), условные вторые моменты заменяя безусловными, окончательно получаем

$$\sup_{\omega_r} \mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \omega_r \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\right| \leqslant 1-\frac{1}{2} Q\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{kl}^{(n)}\right)+Z_{kl}^{(n)}(\omega_r), \tag{3.35}$$

где

$$Z_{kl}^{(n)}(\omega_r) \ll U_{kl}^{(n)}. \tag{3.36}$$

Выражение $x=-\frac{1}{2} Q\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{kl}^{(n)}\right)+Z_{kl}^{(n)}(\omega_r)$ при достаточно больших n по абсолютной величине не превышает $\frac{1}{2}$, поэтому $\ln(1+x)=x+\vartheta_2 x^2$, $|\vartheta_2| \leqslant 1$, и

$$\sup_{\omega_r} \mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{rl}^{(n)} \mid \omega_r \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2} Q\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{kl}^{(n)}\right)+\right.$$
$$\left.+Z_{kl}^{(n)}(\omega_r)+\frac{1}{2} Q^2\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{kl}^{(n)}\right)+2 Z_{kl}^{(n)2}(\omega_r)\right\}. \tag{3.37}$$

Применяя (3.37) при $k=k_j$, $l=l_j$, $j=1, 2, \ldots, N$ к (3.33), получаем:

$$q_n(\mathbf{t}) \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} Q\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{k_j l_j}^{(n)}\right)+\sum_{i=1}^{N} Z_{k_j l_j}^{(n)}(\omega_r)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} Q^2\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{k_j l_j}^{(n)}\right)+2 \sum_{i=1}^{N} Z_{k_j l_j}^{(n)2}(\omega_r)\right\}. \tag{3.38}$$

Оценим выражения правой части неравенства (3.38). Из (3.2) – (3.5), (3.15), (3.16), (3.36), (3.29) – (3.30) и очевидного неравенства $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_s} \leqslant \sqrt{s}\sqrt{x_1+\cdots+x_s}$, $x_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, s$, выводим

$$\sum_{i=1}^{N} Z_{k_j l_j}^{(n)}(\omega_r) \ll \frac{1}{\sqrt{\psi(n)}}, \tag{3.39}$$

$$\sum_{i=1}^{N} Z_{k_j l_j}^{(n)2}(\omega_r) \ll \frac{1}{\psi^{10}(n) \ln^8 n}, \tag{3.40}$$

$$\sum_{j=1}^{N} Q^2\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{k_j l_j}^{(n)}\right) \ll \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} t_i^4\left(\mathbf{D} S_{k_j l_j, i}^{(n)}\right)^2 \ll \frac{1}{\psi^4(n) \ln n}; \tag{3.41}$$

Из (3.8), (3.15), (3.16) и (3.26) выводим, что

$$\left|\sum_{j=1}^{N} Q\left(\mathbf{t}, \mathbf{S}_{k_j l_j}^{(n)}\right)-Q_n(\mathbf{t})\right| \ll \frac{\psi^{\frac{13}{2}}(n) \ln^8 n}{\sqrt{n}\, \alpha^{(n)2}}+\sum_{i=1}^{s} \frac{\psi^2(n) \ln n}{\mathbf{D} S_{n, i}^{(n)}}. \tag{3.42}$$

Поставляя (3.39) — (3.42) в (3.38), получаем

$$q_n(\mathbf{t}) \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\psi(n)}}\right)\right\} + O\left(\frac{\psi^{\frac{13}{2}}(n)\ln^3 n}{\sqrt{n}\,\alpha^{(n)2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s} \frac{\psi^2(n)\ln n}{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)}}\right) \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\psi(n)}}\right)\right\}. \tag{3.43}$$

Таким образом, показали, что

$$\mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{0l_1}^{(n)} \,|\, \mathfrak{F}_{l_1}^{(n)}\right)\right| \sup_{\omega_{l_1}} \mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{l_1 l_2}^{(n)} \,|\, \omega_{l_1} \times \mathfrak{F}_{l_2}^{(n)}\right)\right| \cdots$$

$$\sup_{\omega_{l_{N-1}}} \mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{l_{N-1} l_N}^{(n)} \,\middle|\, \omega_{l_{N-1}} \times \mathfrak{F}_{l_N}^{(n)}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\psi(n)}}\right)\right\}. \tag{3.44}$$

Пользуясь соотношениями (3.24) — (3.27), (3.29) — (3.32), (3.35) — (3.36), (3.44), можем продолжить в соотношении (3.33) начатый процесс.

Значит:

$$f_n(\mathbf{t}) = \left(1 - \frac{1}{2}Q\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{k_N l_N}^{(n)}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}Q\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{k_{N-1} l_{N-1}}^{(n)}\right)\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 - \frac{1}{2}Q\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{k_1 l_1}^{(n)}\right)\right) + O\left(\sum_{j=1}^{N} \sup_{\omega}\left|Z_{k_j l_j}^{(n)}(\omega)\right| \cdot \prod_{j=2}^{N}\left(1 - \frac{1}{2}Q\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{k_j l_j}^{(n)}\right)\right)\right) +$$

$$+ O\left(N \cdot e^{-\psi(n)\ln n}\right) + O\left(\sum_{j=1}^{N} \sup_{\omega}\left|Z_{k_j l_j}^{(n)}(\omega)\right|\right) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t}) + o(1)\right\}. \tag{3.45}$$

Однако

$$\prod_{j=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{2}Q\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{k_j l_j}^{(n)}\right)\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} Q\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{k_j l_j}^{(n)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\vartheta_3 \sum_{j=1}^{N} Q^2\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{k_j l_j}^{(n)}\right)\right\}, \tag{3.46}$$

где $|\vartheta_3| \leqslant 1$.

Из соотношений (3.39) — (3.42), (3.45) — (3.46) видно, что

$$f_n(\mathbf{t}) = e^{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t})}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\psi(n)}}\right)\right). \tag{3.47}$$

Учитывая (3.2) — (3.3) видим, что

$$l_j - l_{j-1} \gg \frac{n\alpha^{(n)4}}{\ln^4 n}. \tag{3.48}$$

Кроме того, заметим, что неравенства (3.44) не нарушатся, если из левой части исключим фиксированное число множителей. Тогда, сравнивая (3.44) с (3.47), получаем

$$\frac{\mathbf{M}\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{0u}^{(n)} \,|\, \mathfrak{F}_u^{(n)}\right)\right| \sup\left|f\left(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_{un}^{(n)} \,|\, \mathfrak{F}_v^{(n)}\right)\right|}{|f_n(\mathbf{t})|} < 2. \tag{3.49}$$

Из (3.47) и (3.49) следует справедливость леммы 1.

Лемма 2. *Если существует* $\mathbf{M}|X_{k,i}^{(n)}|^p$, $k=1, 2, \ldots, n$, $i=1, 2, \ldots, s$, $p \geqslant 1$, *то для* $\varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}(\mathbf{t})$, $r=r_1+r_2+\cdots+r_s \leqslant p$, *в точках* $\mathbf{t}$, *где* $f_n(\mathbf{t}) \neq 0$, *имеет место соотношение*

$$\varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}(\mathbf{t}) \leqslant \frac{K}{|f_n(\mathbf{t})|^r} \sum_{1 \leqslant l_1, l_2, \ldots, l_{\tilde{r}_s} \leqslant n} \int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}} \cdots \int\limits_{\Omega_{l_{\tilde{r}_s}}^{(n)}} \Big| X_{l_1,1}^{(n)} \cdots$$

$$\cdots X_{l_{r_1},1}^{(n)} \cdots X_{l_{\tilde{r}_{s-1}+1},s}^{(n)} \cdots X_{l_{\tilde{r}_s},s}^{(n)} \Big| \sum_{\nu=0}^{r} \nu! \sum_{(h_1,\ldots,h_{r-1}) \in H_\nu^*} \cdot$$

$$\cdot \Bigg| \Bigg(\prod_{\substack{k=1 \\ \{h_{r-1} \neq 0\}}}^{r-1} f_{0l_k}(\mathbf{t}, d\omega_k) \Bigg) \prod_{k \in \mathfrak{N}} f_{l_k n}(\mathbf{t}, \omega_k, \Omega^{(n)}) \Bigg) \cdot$$

$$\cdot \Bigg(\prod_{\substack{k=0 \\ \{h_{r-1} \neq 0\}}}^{r} \int\limits_{\Omega_{l_{h_k-1}}^{(n)}} \int\limits_{\Omega_{l_k}^{(n)}} f_{l_k n}(\mathbf{t}, y, \Omega^{(n)}) f_{0 l_{h_k-1}}(\mathbf{t}, dx) \cdot$$

$$\cdot \nu_{l_{h_r-1} l_k}^{(n)}(\mathbf{t}, \omega_{h_k-1}, x, d\omega_k, dy) \Bigg) \Bigg|, \qquad (3.50)$$

где система $h_1, h_2, \ldots, h_{\tilde{r}_s-1}$ *содержит перестановку* $\tilde{r}_s-\nu-1$*-го порядка чисел* $1, 2, \ldots, \tilde{r}_{s-1}$, *а остальные* ν *чисел* h_k *равны нулю*, $\tilde{r}_j=\sum_{d=1}^{\tilde{r}_s} r_d$, $j=1, 2, \ldots, s$. *Кроме того*, $h_k \leqslant k$, $\sum_{k=2} (l_k - l_{h_k-1}) \geqslant l_{\tilde{r}_s} - l_1$, H_ν^* — *множество таких систем. Множество* $\mathfrak{N}$ *определяется соотношением* $\mathfrak{N}=\{1, 2, \ldots, \tilde{r}_s\}-\{h_1, h_2, \ldots, h_{\tilde{r}_s-1}\}$. *Постоянное* K *зависит только от* $\tilde{r}_s=r$.

Доказательство. Мы убедились, что характеристическая функция суммы $\mathbf{S}_n^{(n)}$ имеет вид

$$f_n(\mathbf{t})=\int\limits_{\Omega_1^{(n)}} \cdots \int\limits_{\Omega_n^{(n)}} f_1(\mathbf{t}, d\omega_1) f_2(\mathbf{t}, \omega_1, d\omega_2) \cdots f_n(\mathbf{t}, \omega_{n-1}, d\omega_n). \qquad (3.51)$$

Ввиду существования всех абсолютных моментов до p включительно, все члены равенства (3.51) можно $r (r \leqslant p)$ раз дифференцировать под знаком интеграла. Найдём связь между r-ой производной характеристической функции суммы $\mathbf{S}_n^{(n)}$ и её логарифмической производной. Для этого раскладываем характеристическую функцию $f_n(\mathbf{t})$ и её логарифм по формуле Тэйлора в окрестности точки $z=(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ и сравниваем коэффициенты при одинаковых t_i-z_i, $i=1, 2, \ldots, s$, степенях. Таким образом, получаем

$$\varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}(\mathbf{t})=\prod_{\nu=1}^{r} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \frac{r_1!\,r_2!\cdots r_s!}{f_n^\nu(\mathbf{t})} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{m_{ij} \\ \sum_{i=1}^{\nu} m_{ij}=r_i}} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=\overline{1,s} \\ j=\overline{1,\nu}}} m_{ij}!} \prod_{j=1}^{\nu} \alpha_1^{m_{1j}} \alpha_2^{m_{2j}} \cdots \alpha_s^{m_{sj}}(\mathbf{t}). \qquad (3.52)$$

Для подинтегральных выражений $f_k(\mathbf{t},\ \omega_{k-1},\ d\omega_k)$ вводим функцию $\varphi^{(n)}_{l_1 l_2\ldots l_k}(\mathbf{t},\ d\omega_1,\ d\omega_2,\ \ldots,\ d\omega_k)$, инвариантную любой перестановке индексов $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_k$, причём

$$\varphi^{(n)}_{l_1 l_2\ldots l_k}(\mathbf{t},\ d\omega_1\ \ldots,\ d\omega_k)=$$
$$=f_{0l_1}(\mathbf{t},\ d\omega_1)f_{l_1 l_2}(\mathbf{t},\ \omega_1,\ d\omega_2)\cdots f_{l_k n}(\mathbf{t},\ \omega_{k-1},\ \Omega^{(n)}), \tag{3.53}$$

если

$$l_1\leqslant l_2\leqslant\cdots\leqslant l_k,\quad f_{ll}(\mathbf{t},\ \omega,\ A)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \omega\in A,\\ 0 & \text{— в противном случае,}\end{cases}$$

для любого $A\in\mathfrak{F}^{(n)}_l$.

Пусть $\tilde{k}_j=\sum\limits_{i=1}^{j}k_i$, тогда

$$\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_s^{k_s}(\mathbf{t})=\sum_{1\leqslant l_1, l_2,\ldots,l_{\tilde{k}_s}\leqslant n}\ \int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_1}}\ \int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_2}}\cdots\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_{\tilde{k}_s}}} X^{(n)}_{l_1,1}\cdots X^{(n)}_{l_{\tilde{k}_1},1}\cdots$$
$$\cdots\times X^{(n)}_{l_{\tilde{k}_{s-1}+1},s}\cdots X^{(n)}_{l_{\tilde{k}_s},s}\cdot\varphi^{(n)}_{l_1 l_2\ldots l_{\tilde{k}_s}}(\mathbf{t},\ d\omega_1,\ d\omega_2,\ \ldots,\ d\omega_{\tilde{k}_s}). \tag{3.54}$$

Обозначим $l_{11}=l_1,\ l_{21}=l_2,\ \ldots,\ l_{m_1 1}=l_{m_1},\ l_{m_1 2}=l_{m_1+1},\ \ldots$ и т. д. Тогда, подставив (3.54) в (3.52) и заменив порядок суммирования, получаем, что индексы при l идут в возрастающем порядке:

$$\varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}(\mathbf{t})=\sum_{1\leqslant l_1, l_2,\ldots,l_{\tilde{r}_s}\leqslant n}\ \int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_1}}\cdots\int\limits_{\Omega^{(n)}_{l_{\tilde{r}_s}}} X^{(n)}_{l_1,1}\cdots X^{(n)}_{l_{r_1},1}\cdots X^{(n)}_{l_{\tilde{r}_{s-1}+1},s}\cdots$$
$$\cdots X^{(n)}_{l_{\tilde{r}_s},s}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\frac{r_1!\,r_2!\cdots r_s!}{f_n^{\nu}(\mathbf{t})}\sum_{\substack{m_{ij}\\ \sum_{j=1}^{\nu}m_{ij}=r_i}}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1,\overline{s}\\ j=1,\overline{\nu}}}m_{ij}!}\cdot$$
$$\cdot\prod_{j=1}^{\nu}\varphi^{(n)}_{l_{\tilde{k}_{j-1}+1}\ldots l_{\tilde{k}_j}}(\mathbf{t},\ d\omega_{\tilde{k}_{j-1}+1},\ \ldots,\ d\omega_{\tilde{k}_j}), \tag{3.55}$$

где $\tilde{k}_0=0,\ k_j=\sum\limits_{i=1}^{s}m_{ij},\ 1\leqslant j\leqslant\nu$.

Нетрудно видеть, что выражение (3.55) отдельно не зависит от m_{ij}, а только от суммы колонн матрицы $\|m_{ij}\|$, т. е. от $k_j=\sum\limits_{i=1}^{s}m_{ij}$, и

$$r_1!\,r_2!\cdots r_s!\sum_{\substack{m_{ij}\\ \sum_{j=1}^{\nu}m_{ij}=r_i\\ \sum_{i=1}^{s}m_{ij}=k_j}}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1,\overline{s}\\ j=1,\overline{\nu}}}m_{ij}!}=\sum_{\substack{1\leqslant k_1,\ldots,k_\nu\leqslant r\\ \sum_{j=1}^{\nu}k_j=r}}\frac{r!}{k_1!\,k_2!\cdots k_\nu!}. \tag{3.56}$$

Из (3.55) и (3.56) окончательно получаем

$$\varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}(\mathbf{t}) = \frac{1}{f_n^r(\mathbf{t})} \sum_{1 \leqslant l_1, l_2, \ldots, l_{\tilde{r}_s} \leqslant n} \int\limits_{\Omega_{l_1}^{(n)}} \int\limits_{\Omega_{l_2}^{(n)}} \cdots \int\limits_{\Omega_{l_{\tilde{r}_s}}^{(n)}} \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{\nu+1} \times$$

$$\times \left[f_n(\mathbf{t})\right]^{r-\nu} \sum_{\substack{1 \leqslant k_1, k_2, \ldots, k_\nu \leqslant r \\ k_1+k_2+\ldots+k_\nu = r}} \frac{r!}{k_1!\,k_2!\cdots k_\nu!\,\nu} X_{l_1,1}^{(n)} \cdots X_{l_{r_1},1}^{(n)} \cdots X_{l_{\tilde{r}_{s-1}+1},s}^{(n)} \cdots$$

$$\cdots X_{l_{\tilde{r}_s},s}^{(n)} \cdot \prod_{j=1}^{\nu} \varphi_{l_{\tilde{k}_{j-1}+1}\cdots l_{\tilde{k}_j}}^{(n)}(\mathbf{t}, d\omega_{\tilde{k}_{j-1}+1}, \ldots, d\omega_{\tilde{k}_j}). \tag{3.57}$$

Доказательство леммы 2 свели к одномерному случаю, что видно из сравнения (3.57) с (2.15) работы [6]. Таким образом, справедливость леммы 2 доказана.

Легко показать, что в интервале

$$|t_i| \leqslant \frac{\psi(n)\sqrt{\ln n}}{B_{n,i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{3.58a}$$

в случае $|X_{k,i}^{(n)}| \leqslant C_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, s$ справедлива оценка,

$$\sup_{x,y} \left\| \mathbf{v}_{kl}^{(n)}(\mathbf{t}, x, y, .) \right\| \leqslant e^{-\frac{1}{2}\alpha^{(n)}(l-k)}, \tag{3.58}$$

где

$$C_n \leqslant \frac{\alpha^{(n)\frac{3}{2}}\sqrt{n}}{\sqrt{\psi(n)\ln n}}. \quad \psi(n) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Тогда из (3.58) леммы 1 и 2 при (3.58а) следует оценка для логарифмических производных

$$\left|\varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}(\mathbf{t})\right| \ll \frac{n \ln^{r-1} n}{\alpha^{(n)r-1}}, \quad r = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.59}$$

В случае равномерной ограниченности, с вероятностью **1**, по k и n моментов $\mathbf{M}\left(\left|X_{k,i}^{(n)}\right|^p \middle| \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)}\right)$ и $\mathbf{M}\left|X_{k,i}^{(n)}\right|^p$, $p \geqslant 3$, $k = 1, 2, \ldots, n$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ при (3.58а) справедлива оценка

$$\left|\varkappa_1^{r_1}\varkappa_2^{r_2}\cdots\varkappa_s^{r_s}(\mathbf{t})\right| \ll \frac{n}{\alpha^{(n)r-1}}, \quad r = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.60}$$

Константа, входящая в символ „$\ll$“, зависит только от r.

Нетрудно заметить, что оценки (3.59), (3.60) справедливы и для любых $\mathbf{X}_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, если условие (3.1а) леммы 1 невыполнены, то случайные векторы $\mathbf{X}_k^{(n)}$ можно заменить случайными векторами $\mathbf{Y}_k^{(n)}$ следуюшим образом:

$$Y_{k,i}^{(n)} = \begin{cases} X_{k,i}^{(n)}, \quad \text{если} & \begin{matrix} \left|X_{k,i}^{(n)}\right| \leqslant K_{n,i}, & \text{при} \quad k \in \mathfrak{M} \\ \left|X_{k,i}^{(n)}\right| \leqslant n, & \text{при} \quad k \overline{\in} \mathfrak{M} \end{matrix} \\ 0, \quad \text{в других случаях}, & i = 1, 2, \ldots, s, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{3.61}$$

Легко проверить, что ошибка от замены характеристической функции суммы $\mathbf{S}_n^{(n)}$ характеристической функцией суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{Y}_k^{(n)}$ непревосходить выражения

$$\left| f_n(\mathbf{t}) - \mathbf{M} e^{i\left(\mathbf{t} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{Y}_k^{(n)}\right)} \right| \ll \sum_{i=1}^{s} |t_i| \cdot \frac{\psi^{8p+\frac{1}{2}}(n) \ln^{\frac{7}{2}p+\frac{1}{2}} n}{(B_{n,i}\,\alpha^{(n)2})^{p-1} \cdot B_{n,i}\,\alpha^{(n)3}}. \tag{3.62}$$

§ 4. Асимптотическое разложение

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть существует равномерно по k и n ограниченные абсолютные моменты $\mathbf{M}\left|X_{k,i}^{(n)}\right|^p$, $k=1, 2, \ldots, n$, $p \geqslant 3$ для всех $i=1, 2, \ldots, s$. Пусть, кроме того,*

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{7}} n (\ln \ln n)^{-\frac{4}{7}} \to \infty \ (n \to \infty),$$

$\mathbf{D}\left(\mathbf{X}_k^{(n)} \mathbf{t}\right) \geqslant \sigma > 0$ *для всех* $\mathbf{t}$ *с* $|\mathbf{t}|=1$, $k=1, 2, \ldots, n$, *и квадратичная форма* $\varphi_n(\mathbf{t})$ *равномерно относительно* n *положительно определена.*

Тогда существует такая положительная монотонно возрастающая до ∞ *функция* $\psi(n)$, *что при*

$$|t_i| \leqslant \psi(n) \sqrt{\ln n}, \quad i=1, 2, \ldots, s$$

имеет место соотношение

$$\hat{f}_n(\mathbf{t}) = e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})}\left(1+\sum_{\nu=1}^{p-3} P_{n\nu}(i\mathbf{t})\left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu}\right) + C\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}\left[|\mathbf{t}|^p + |\mathbf{t}|^{3(p-2)} +\right.$$

$$\left. + |\mathbf{t}|^{3(p-2)} \cdot e^{o\left(\frac{|t|^2 \psi(n)}{\ln \ln^2 n}\right)}\right] e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})} + O\left(\sum_{i=1}^{s} |t_i| \frac{\psi^{8p+\frac{1}{2}}(n) \ln^{\frac{7}{2}p+\frac{1}{2}} n}{(B_{n,i}\alpha^{(n)2})^{p-1}\alpha^{(n)3} B_{n,i}}\right), \quad (4.1)$$

где

$$r_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \frac{B_{n,i}^3 \alpha^{(n)2}}{n \ln^2 n},$$

$P_{n\nu}(i\mathbf{t})$ — *многочлены от* s *переменных* $it_1, it_2, \ldots, it_s$, *степени не выше* 3ν, *с действительными, равномерно ограниченными относительно* n *коэффициентами. Константа* C *и коэффициенты* $P_{n\nu}(i\mathbf{t})$ *определяются в доказательстве настоящей леммы.*

Доказательство. Пусть

$$\Theta_i^{(n)} = \frac{\psi(n)\sqrt{\ln n}}{B_{n,i}}, \quad i=1, 2, \ldots, s, \quad (4.2)$$

где $\psi(n)$ — сколько угодно медленно возрастающая функция. Из (3.59) следует, что для $|t_i| \leqslant \Theta_i^{(n)}$, $i=1, 2, \ldots, s$,

$$\ln f_n(\mathbf{t}) = -\frac{1}{2} Q_n(\mathbf{t}) + \sum_{\nu=3}^{p-1} \frac{i^{\nu}}{\nu!}(\varkappa_1 t_1 + \varkappa_2 t_2 + \cdots + \varkappa_s t_s)^{\nu} +$$

$$+ \frac{i^p}{p!}(\varkappa_1' t_1 + \varkappa_2' t_2 + \cdots + \varkappa_s' t_s)^p, \quad (4.3)$$

где скобки возводятся в символическую степень, а штрих над $\varkappa_i$, $i=1, 2, \ldots, s$, означает, что соответствующие частные производные берутся в точке $(t_1\vartheta_1, t_2\vartheta_2, \ldots, t_s\vartheta_s)$, $0 \leqslant \vartheta_\nu \leqslant 1$, $\nu=1, 2, \ldots, s$.

Отсюда, при $|t_i| \leqslant \Theta_i^{(n)} B_{n,i}$ из (4.3) следует

$$\ln f_n(\mathbf{t}) = -\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t}) + \sum_{\nu=3}^{p-1} \frac{i^{\nu}}{\nu!}(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots + \lambda_s t_s)^{\nu} \cdot \frac{1}{r_n^{\nu-2}} +$$

$$+ \frac{i^p}{p!}(\lambda_1' t_1 + \lambda_2' t_2 + \ldots + \lambda_s' t_s)^p \cdot \frac{1}{r_n^{p-2}}, \quad (4.4)$$

где

$$r_n = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \frac{B^3_{n,i}\,\alpha^{(n)2}}{n \ln^2 n},$$

$$\lambda^{\nu}_i = \frac{\varkappa^{\nu}_i r_n^{\nu-2}}{B^{\nu}_{n,i}},$$

$$\lambda^{\nu'}_i = \frac{\varkappa^{\nu'}_i r_n^{\nu-2}}{B^{\nu}_{n,i}}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ s, \quad \nu=3,\ 4,\ \ldots,\ p-1. \tag{4.5}$$

Вводим функцию

$$V(z) = \ln\left\{\left(\hat f_n(\mathbf{t}z)\right)^{\frac{1}{z^2}}\cdot e^{\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})}\right\} = \sum_{\nu=1}^{p-3} \frac{i^{\nu+2}}{(\nu+2)!}(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \ldots + \lambda_s t_s)^{\nu+2}\left(\frac{z}{r_n}\right)^{\nu} +$$

$$+\frac{1}{p!}(\lambda_1' t_1 + \lambda_2' t_2 + \ldots + \lambda_s' t_s)^p\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p-2}, \tag{4.6}$$

где z — скалярная величина, $|z|\leqslant 1$.

Ограниченость чисел $\lambda_1^{m_1}$, $\lambda_2^{m_2}$, $\ldots$, $\lambda_s^{m_s}$ и аналогично чисел $\lambda_1'^{m_1}$, $\lambda_2'^{m_2}$, $\ldots$ $\ldots$, $\lambda_s'^{m_s}$ следует из неравенств (3.59) и $(x_1+x_2+\cdots+x_s)^m \leqslant s^{m-1}(x_1^m + x_2^m + \cdots + x_s^m)$, т. е.

$$l^{(\nu+2)} = \max_{1\leqslant i\leqslant s}\lambda_i^{\nu+2} = \max_{1\leqslant i\leqslant s}\frac{\varkappa_i^{\nu+2} r_n^{\nu}}{B^{\nu+2}_{n,i}} \ll \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\nu-1}, \quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ p-3, \tag{4.7}$$

и аналогично

$$K = \max_{1\leqslant i\leqslant s}\ \sup_{|t_i|\leqslant\theta_i^{(n)}B_{n,i}} \lambda_i'^{p} \ll \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{p-3}. \tag{4.8}$$

Пусть

$$K_1 = \max\left(K,\ |l^{(3)}|,\ |l^{(4)}|,\ \ldots,\ |l^{(p-1)}|\right). \tag{4.8}$$

Раскладываем $e^{V(z)}$ по степеням $\frac{z}{r_n}$ при фиксированном n и $\mathbf{t}$, т. е.

$$e^{V(z)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{p-3} P_{n\nu}(i\mathbf{t})\left(\frac{z}{r_n}\right)^{\nu} + R_{p-2}(z). \tag{4.10}$$

Однако

$$e^{V(z)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{p-3}\frac{V^{\nu}(z)}{\nu!} + \Theta\cdot V^{p-2}(z)\,e^{|V(z)|}, \tag{4.11}$$

где $|\Theta|\leqslant\frac{1}{p!}$. Тогда, подставляя (4.6) в (4.11) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степеных выражений (4.10) и (4.11), получаем:

$$P_{n1}(i\mathbf{t}) = \frac{1}{3!}(it_1\lambda_1 + it_2\lambda_2 + \ldots + it_s\lambda_s)^3,$$

$$P_{n2}(i\mathbf{t}) = \frac{1}{4!}(it_1\lambda_1 + it_2\lambda_2 + \ldots + it_s\lambda_s)^4 + \frac{1}{2!}P^2_{n1}(i\mathbf{t}),$$

$$P_{n3}(i\mathbf{t}) = \frac{1}{5!}(it_1\lambda_1 + it_2\lambda_2 + \ldots + it_s\lambda_s)^5 + \frac{1}{2}P_{n1}(i\mathbf{t})\,P_{n2}(i\mathbf{t}) - \frac{1}{12}P^3_{n1}(i\mathbf{t})$$

и т. д.

Обозначим

$$1 + \sum_{\nu=1}^{p-3}\frac{V^{\nu}(z)}{\nu!} - \left(1 + \sum_{\nu=1}^{p-3}P_{n\nu}(i\mathbf{t})\left(\frac{z}{r_n}\right)^{\nu}\right) = \omega(z). \tag{4.12}$$

Тогда

$$\omega(z)=R_{p-2}(z)-\Theta V^{p-2}(z)\,e^{|V(z)|}, \tag{4.13}$$

где $\omega(z)$ содержит степени $\frac{z}{r_n}$, начиная с $p-2$-ой. Для оценки $R_{p-2}(z)$ оценим прежде всего $\omega(z)$.

Из (4.6) и (4.9) следует

$$V(z)\leqslant K_1\cdot\sum_{\nu=1}^{p-2}\frac{|\mathbf{t}|^{\nu+2}}{(\nu+2)!}\left|\frac{z}{r_n}\right|^{\nu}\leqslant K_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\mathbf{t}|^{\nu+2}}{(\nu+2)!}\left|\frac{z}{r_n}\right|^{\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K_1}{3!}|\mathbf{t}|^3\left|\frac{z}{r_n}\right|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{|\mathbf{t}||z|}{r_n}\right)^{\nu}=K_2|\mathbf{t}|^3\left|\frac{z}{r_n}\right|e^{\frac{|\mathbf{t}|\cdot|z|}{r_n}}, \tag{4.13a}$$

где $K_2=\frac{K_1}{3!}$.

Поэтому выражение

$$K_2^j|\mathbf{t}|^{3j}\left|\frac{z}{r_n}\right|\cdot e^{\frac{j|\mathbf{t}|\cdot|z|}{r_n}} \tag{4.14}$$

будет мажорантой для $V^j(z)$.

Тогда из (4.12) следует

$$|\omega(z)|\leqslant\sum_{j=1}^{p-2}K_2^j\left(\frac{|\mathbf{t}|^3|z|}{r_n}\right)^j\sum_{\nu=p-2-j}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{j|\mathbf{t}||z|}{r_n}\right)^{\nu}. \tag{4.15}$$

Из определения коэффициента эргодичности и (4.5) получаем

$$\frac{j|\mathbf{t}||z|}{r_n}\ll o\left(\frac{\psi(n)}{\ln\ln^2 n}\right), \tag{4.16}$$

поэтому

$$|\omega(z)|\leqslant C_1\sum_{j=1}^{p-2}K_2^j\left(\frac{|\mathbf{t}|^3|z|}{r_n}\right)^j\left(\frac{j|\mathbf{t}||z|}{r_n}\right)^{p-2-j}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\frac{p|\mathbf{t}||z|}{r_n}\right)^{p-2}\sum_{i=1}^{p-2}K_2^j\left(\frac{|\mathbf{t}|^2}{p}\right)^j\leqslant$$

$$\leqslant C_1(p-2)\left(\frac{p|\mathbf{t}||z|}{r_n}\right)^{p-2}\left[K_2\frac{|\mathbf{t}|^2}{p}+K_2^{p-2}\frac{|\mathbf{t}|^{2(p-2)}}{p^{p-2}}\right]\leqslant$$

$$\leqslant C_2p^{p-2}\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}K_2\left[|\mathbf{t}|^p+\left(\frac{K_2}{p}\right)^{p-3}|\mathbf{t}|^{3(p-2)}\right]. \tag{4.17}$$

Согласно (4.14) и (4.16)

$$\left|V^{p-2}(z)e^{|V(z)|}\right|\leqslant K_2^{p-2}|\mathbf{t}|^{3(p-2)}\left(\frac{|z|}{r_n}\right)^{p-2}\cdot e^{\frac{(p-2)|\mathbf{t}||z|}{r_n}+|V(z)|}\leqslant$$

$$\leqslant\left(K_2|\mathbf{t}|^3\right)^{p-2}\cdot\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}\cdot e^{\left(\frac{\psi(n)}{\ln\ln^2 n}\right)+|V(z)|}; \tag{4.18}$$

Из (4.13) — (4.16) следует

$$\left|V(z)\right|\ll o\left(\frac{|\mathbf{t}|^2\psi(n)}{\ln\ln^2 n}\right). \tag{4.19}$$

Подставив (4.19) в (4.18), получим

$$\left|V^{p-2}(z)e^{V(z)}\right|\leqslant\left(K_2|\mathbf{t}|^3\right)^{p-2}\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}\cdot e^{o\left(\frac{|\mathbf{t}|^2\psi(n)}{\ln\ln^2 n}\right)}. \tag{4.20}$$

Соотношения (4.13), (4.17), (4.20) окончательно дают

$$|R_{p-2}(z)| \leqslant |\omega(z)| + \theta_1 \left| V^{p-2}(z) e^{|V(z)|} \right| \leqslant C_2 K_2 p^{p-2} \left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2} \left[|\mathbf{t}|^p + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{K_2}{p}\right)^{p-3} |\mathbf{t}|^{3(p-2)} + K_2^{p-2} |\mathbf{t}|^{3(p-2)} e^{o\left(\frac{|\mathbf{t}|^2 \psi(n)}{\ln \ln^2 n}\right)} \right]. \tag{4.21}$$

Из соотношений (4.6), (4.10) – (4.11) вытекает

$$\left| \left(f_n(\mathbf{t}z)\right)^{\frac{1}{z^2}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})} \left(1 - \sum_{\nu=1}^{p-3} P_{n\nu}(i\mathbf{t}) \left(\frac{z}{r_n}\right)^{\nu}\right) \right| = |R_{p-2}(z)| e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})}. \tag{4.22}$$

Соотношения (4.12), (4.22) при $z=1$ окончательно дают

$$\hat{f}_n(\mathbf{t}) = e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{p-3} P_{n\nu}(i\mathbf{t}) \left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu}\right) +$$

$$+ C\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2} \left[|\mathbf{t}|^p + |\mathbf{t}|^{3(p-2)} + |\mathbf{t}|^{3(p-2)} \cdot e^{o\left(\frac{|\mathbf{t}|^2 \psi(n)}{\ln \ln^2 n}\right)} \right] \cdot e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})}, \tag{4.23}$$

где $C \ll K_2$.

(4.23) совместно с (3.62) окончательно доказывают лемму 3.

В случае равномерной ограниченности с вероятностью **1** по k и n случайных векторов $\mathbf{X}_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$, имеет место следующее разложение:

$$\hat{f}_n(\mathbf{t}) = e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{p-3} P_{n\nu}(i\mathbf{t}) \left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu}\right) +$$

$$+ C\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2} \left[|\mathbf{t}|^p + |\mathbf{t}|^{3(p-2)} + |\mathbf{t}|^{3(p-2)} \cdot e^{o\left(\frac{|\mathbf{t}|^2 \psi(n)}{\ln \ln^2 n}\right)} \right] \cdot e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})}, \tag{4.24}$$

где

$$r_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \frac{1}{n} B_{n,i}^3 \alpha^{(n)2}. \tag{4.25}$$

Справедливость (4.24) следует из доказательства леммы 3, причём вместо оценки (3.59) нужно использовать оценку (3.60).

§ 5. Локальная предельная теорема и ее уточнение

Для доказательства теорем 1 и 2 нужно оценить характеристическую функцию суммы $\mathbf{S}_n^{(n)}$ во втором и третьем „интервалах".

Эти оценки сформулируем как леммы.

Лемма 4. *Если с вероятностью* **1** $\left|X_{k,i}^{(n)}\right| \leqslant C_n$, $\mathbf{D}\left(\mathbf{X}_k^{(n)}\mathbf{t}\right) \geqslant \sigma > 0$ *для всех* $\mathbf{t}$ *с* $|\mathbf{t}|=1$, $k=1, 2, \ldots, n$, $i=1, 2, \ldots, s$, $\varphi_n(\mathbf{t})$ — *равномерно относительно* n *положительно определена, причём*

$$\alpha^{(n)3} n (C_n)^{-2} \ln^{-2} n \to \infty \quad (n \to \infty), \tag{5.1}$$

то можно найти такое постоянное $C_3 > 0$ *и функцию* $\psi_1(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, *что*

$$\left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\right) \int_{G_2 - G_1} \left| f_n(\mathbf{t}) \right| d\mathbf{t} \leqslant \max\left(e^{-C_3 A^2}, \; e^{-\psi_1(n) \ln n}\right), \tag{5.2}$$

где

$$G_1 = \left\{ \mathbf{t} : |t_i| \leqslant \frac{A}{B_{n,i}}, \quad i=1, 2, \ldots, s \right\},$$

$$G_2 = \left\{ \mathbf{t} : |\mathbf{t}| \leqslant \frac{1}{2C_n} \right\}.$$

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что при любом наборе целых чисел

$$1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_N = n$$

справедливо неравенство

$$\left|f_n(\mathbf{t})\right| \leqslant \left\|f_{0l_1}(\mathbf{t})\right\| \sup_{\omega_{l_1}} \left\|f_{l_1 l_2}(\mathbf{t},\ \omega_{l_1},\ .)\right\| \cdots \sup_{\omega_{N-1}} \left\|f_{l_{N-1} l_N}(\mathbf{t},\ \omega_{l_{N-1}},.)\right\|. \tag{5.3}$$

Пусть $\sup\limits_{\omega}\left\|f_{pl}(\mathbf{t},\ \omega,.)\right\|$ — любой из множителей правой части соотношения (5.3). Тогда, аналогично § 2 работы [6], при $p < k < l$ имеем

$$\sup_{\omega}\left\|f_{pl}(\mathbf{t},\ \omega,.)\right\| \leqslant 1 - \mathbf{M}\left(\int\limits_{(-\infty)}^{(\infty)} \int\limits_{(-\infty)}^{(\infty)} \sin^2\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}\mathbf{t}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot\, dF_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{x} \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right) dF_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{y} \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right) + \left(1 - \alpha_{pk}^{(n)}\right), \tag{5.4}$$

где $F_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{x} \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)$ s-мерная условная функция распределения суммы $\mathbf{S}_{kl}^{(n)}$. Следовательно, из (5.3) — (5.4) выводим

$$\left|f_n(\mathbf{t})\right| \leqslant \exp\left\{-\sum_{j=0}^{N} R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t}) + \sum_{j=0}^{N-1}\left(1 - \alpha_{l_j k_{j+1}}^{(n)}\right)\right\}, \tag{5.5}$$

где

$$R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t}) = \mathbf{M}\left(\int\limits_{(-\infty)}^{(\infty)} \int\limits_{(-\infty)}^{(\infty)} \sin^2\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}\mathbf{t}\right) dF_{k_j l_j}^{(n)}\left(\mathbf{x} \mid \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}\right) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, dF_{k_j l_j}^{(n)}\left(\mathbf{y} \mid \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}\right)\right). \tag{5.6}$$

Но

$$R_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t}) \geqslant \mathbf{M}\left(\int\limits_{E(\mathbf{x})} \int\limits_{E(\mathbf{y})} \sin^2\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}\mathbf{t}\right) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, dF_{k_j l_j}^{(n)}\left(\mathbf{x} \mid \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}\right) dF_{k_j l_j}^{(n)}\left(\mathbf{y} \mid \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{36}\mathbf{M} \int\limits_{E(\mathbf{x})} \int\limits_{E(\mathbf{y})} \left[(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{t}\right]^2 dF_{k_j l_j}^{(n)}\left(\mathbf{x} \mid \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}\right) \cdot dF_{k_j l_j}^{(n)}\left(\mathbf{y} \mid \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}\right),$$

где $E(\mathbf{x})$ — область интегрирования, когда $|\mathbf{x}| \leqslant \frac{1}{|\mathbf{t}|}$.

Обозначим

$$L_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{t}) = \mathbf{M} \int\limits_{\bar{E}(\mathbf{x})} \int\limits_{R_s} \left[(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{t}\right]^2 dF_{k_j l_j}^{(n)}\left(\mathbf{x} \mid \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}\right) \cdot$$

$$\cdot\, dF_{k_j l_j}^{(n)}\left(\mathbf{y} \mid \mathfrak{F}_{k_j}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{l_j}^{(n)}\right), \tag{5.7}$$

где R_s s-мерное пространство $\bar{E}(\mathbf{x}) = R_s - E(\mathbf{x})$. Так как $\left|X_{k,i}^{(n)}\right| \leqslant C_n$, $i = 1,$ $2,\ \ldots,\ s$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то при

$$l_j - k_j \leqslant \frac{1}{\sqrt{s}\, C_n |\mathbf{t}|} \tag{5.8}$$

$L^{(n)}_{k_j l_j}(\mathbf{t}) = 0$, поэтому

$$R^{(n)}_{k_j l_j}(\mathbf{t}) \geqslant \frac{1}{36}\mathbf{M}\int\limits_{R_s}\int\limits_{R_s}\left[(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathbf{t}\right]^2 dF^{(n)}_{k_j l_j}\left(\mathbf{x}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{k_j}\times\mathfrak{F}^{(n)}_{l_j}\right)\cdot$$

$$\cdot\, dF^{(n)}_{k_j l_j}\left(\mathbf{y}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{k_j}\times\mathfrak{F}^{(n)}_{l_j}\right) = \frac{1}{18}\mathbf{MD}\left(\left(\mathbf{S}^{(n)}_{k_j l_j}\,\mathbf{t}\right)\Big|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{k_j}\times\mathfrak{F}^{(n)}_{l_j}\right). \tag{5.9}$$

Однако при $\mathbf{D}\left(\mathbf{X}^{(n)}_k\,\mathbf{t}\right) \geqslant \sigma > 0$, $c\,|\,\mathbf{t}\,| = 1$, из леммы 1 работы [6] следует

$$\mathbf{MD}\left(\left(\mathbf{S}^{(n)}_{k_j l_j}\,\mathbf{t}\right)\Big|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{k_j}\times\mathfrak{F}^{(n)}_{l_j}\right) \geqslant C_4\,\alpha^{(n)}\sum_{p=k_j+1}^{l_j-1}\alpha^{(n)}_{k_j p}. \tag{5.10}$$

Тогда, при

$$l_j - k_j \leqslant \frac{1}{\alpha^{(n)}},\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N, \tag{5.11}$$

из (5.9), (5,10) и известного неравенства

$$1 - \alpha^{(n)}_{kl} \leqslant (1-\alpha^{(n)})^{l-k}$$

получаем

$$R^{(n)}_{k_j l_j}(\mathbf{t}) \geqslant C_5\,|\,\mathbf{t}\,|^2\,\alpha^{(n)2}(l_j - k_j)^2. \tag{5.12}$$

Если же $l_j - k_j > \frac{1}{\alpha^{(n)}}$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$, то из (5.9) – (5.10) выводим

$$R^{(n)}_{k_j l_j}(\mathbf{t}) \geqslant C_6\,|\,\mathbf{t}\,|^2\,\alpha^{(n)}(l_j - k_j). \tag{5.13}$$

Но из условий леммы 4 следует, что существует функция $\psi(n) \to \infty$, что

$$C_n \leqslant \frac{\alpha^{(n)\frac{3}{2}}\sqrt{n}}{\psi^{\frac{1}{2}}(n)\ln n} \tag{5.14}$$

и

$$\alpha^{(n)} \geqslant \frac{\psi^{\frac{1}{3}}(n)\ln^{\frac{2}{3}} n\,C_n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}}. \tag{5.15}$$

В соотношении (5.5) положим

$$k_{j+1} - l_j = \left[\frac{\psi(n)\ln n}{\alpha^{(n)}}\right]$$

и

$$l_j - k_j = \left[\frac{1}{C_n\,|\,\mathbf{t}\,|}\right], \tag{5.16}$$

тогда

$$N \gg \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\ln^{\frac{1}{3}} n}; \tag{5.17}$$

В случае, когда $\frac{\alpha^{(n)}}{C_n} \leqslant |\,\mathbf{t}\,| \leqslant \frac{1}{2C_n}$, из (5.5), (5.11) – (5.17) следует

$$\sum_{j=0}^{N} R^{(n)}_{k_j l_j}(\mathbf{t}) \geqslant C_7\,\psi(n)\ln n \tag{5.18}$$

и

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left(1 - \alpha^{(n)}_{l_j k_{j+1}}\right) \ll n e^{-\psi(n)\ln n} \to 0\,(n\to\infty). \tag{5.19}$$

Из (5.5), (5.18) и (5.19) для $\frac{\alpha^{(n)}}{C_n} \leqslant |\mathbf{t}| \leqslant \frac{1}{2C_n}$ получаем

$$\left|f_n(\mathbf{t})\right| \leqslant e^{-C_8 \psi(n) \ln n}. \tag{5.20}$$

Если же

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\psi^{\frac{5}{3}}(n)\, C_n} \leqslant |\mathbf{t}| < \frac{\alpha^{(n)}}{C_n}, \tag{5.21}$$

то из (5.5), (5.17) и оценки (5.13) следует

$$\sum_{j=0}^{N} R^{(n)}_{k_j l_j}(\mathbf{t}) \geqslant C_9 \sqrt[6]{\psi(n)} \ln n. \tag{5.22}$$

Таким образом, из (5.20), (5.22) вытекает, что при

$$\frac{\alpha^{(n)}}{C_n \psi^{\frac{5}{3}}(n)} \leqslant |\mathbf{t}| \leqslant \frac{1}{2C_n}$$

имеет место неравенство

$$\left|f_n(\mathbf{t})\right| \leqslant e^{-C_{10} \sqrt[6]{\psi(n)} \ln n}. \tag{5.23}$$

Если

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant s} \frac{1}{B_{n,i}} \leqslant |\mathbf{t}| < \frac{\alpha^{(n)}}{C_n \psi^{\frac{5}{3}}(n)}, \tag{5.24}$$

то вместо $\mathbf{S}^{(n)}_{kl}$ вводим случайную скалярную величину

$$Z^{(n)}_{kl} = \left(\mathbf{S}^{(n)}_{kl} \frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|}\right) \tag{5.25}$$

и к ней можем уже применять все результаты работы [6]. Переход от случайной величины $Z^{(n)}_{kl}$ к $\mathbf{S}^{(n)}_{kl}$ осуществляется посредством умножения обеих частей полученных неравенств на $|\mathbf{t}|$, и тогда вместо дисперсии суммы мы получаем квадратичную форму. Таким образом, аналогично как и в работе [6] при (5.24) имеет место неравенство

$$\left|f_n(\mathbf{t})\right| \leqslant e^{-C_{11} Q_n(\mathbf{t})}, \tag{5.26}$$

или

$$\left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\right) \int\limits_{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \frac{1}{B_{n,i}} \leqslant |\mathbf{t}| < \frac{\alpha^{(n)}}{C_n \psi^{\frac{5}{3}}(n)}} \left|f_n(\mathbf{t})\right| \ll$$

$$\ll \int\limits_{A \leqslant |t'_i| < \infty} e^{-C_{11}(t_1'^2 + t_2'^2 + \dots + t_s'^2)}\, dt'_1\, dt'_2 \dots dt'_s \ll e^{-C_{11} A^2}, \tag{5.27}$$

где $t'_i = t_i B_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Из (5.23), (5.27) окончательно следует лемма 4.

В случае равномерной ограниченности $\mathbf{X}^{(n)}_k$ с вероятностью $\mathbf{1}$ по k и n справедлива оценка (5.2), причем вместо (5.15) необходимо принять только

$$\alpha^{(n)} \geqslant \frac{\psi_2(n) \ln^{\frac{2}{3}} n}{n^{\frac{1}{3}}}, \quad \text{где} \quad \psi_2(n) \to \infty \ (n \to \infty).$$

Лемма 5. *Пусть* $\{\mathbf{X}_k^{(n)}\}$ — *последовательность с вероятностью* **1** *равномерно ограниченных по* k *и* n *случайных векторов, компоненты которых принимают только целочисленные значения и удовлетворяют условиям леммы 4. Кроме того,*

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\ln n\left(\ln \frac{1}{\alpha^{(n)}}+\ln \ln n\right)} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\left(\min_r P\left\{\left(\mathbf{a} \mathbf{X}_k^{(n)}\right) \not\equiv\right.\right.$$

$$\left.\left.\not\equiv r \,(\bmod q) \mid \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)}\right\}\right) \rightarrow \infty\ (n \rightarrow \infty) \qquad (5.28)$$

для всех $q \geqslant 2$ *и для всех* $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ *с о.н.д.* $(a_1, a_2, \ldots, a_s, q)=1$.

Тогда для любого $\varepsilon>0$ *имеет место неравенство*

$$\left(\prod_{i=1}^{s} B_{n, i}\right) \int_{G_3-\bar{G}_2}\left|f_n(\mathbf{t})\right| d t \ll \frac{1}{n^d}, \qquad (5.29)$$

где d*-любое постоянное; области* $\bar{G}_2$ *и* G_3 *определяются следующим образом:*

$$\bar{G}_2=\{\mathbf{t}: |\mathbf{t}|<\varepsilon\},$$
$$G_3=\{\mathbf{t}: |t_i| \leqslant \pi,\ i=1, 2, \ldots, s\}. \qquad (5.30)$$

Доказательство. Так как случайные векторы принимают только целочисленные значения, то из определения $R_{kl}^{(n)}(\mathbf{t})$ следует

$$R_{kl}^{(n)}(2\pi \mathbf{t})=\mathbf{M}\left(\sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{m}'} \sin^2 \pi\left[(\mathbf{m}-\mathbf{m}') \mathbf{t}\right] \cdot P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m} \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}' \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\right), \qquad (5.31)$$

где

$$P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m} \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right)=\mathbf{P}\left\{S_{n,1}^{(n)}=m_1, \ldots, S_{n,s}^{(n)}=m_s \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}\right\}. \quad (5.32)$$

Для удобства обозначим

$$\bar{G}_2'=\left\{\mathbf{t}: |\mathbf{t}|<\frac{\varepsilon}{2\pi}\right\},$$
$$G_3'=\left\{\mathbf{t}: |t_i| \leqslant \frac{1}{2},\quad i=1, 2, \ldots, s\right\}.$$

Согласно диафантовым апроксимациям каждый t_i может быть представлен в следующем виде:

$$t_i=\frac{a_i}{q}+\delta_i, \quad i=1, 2, \ldots, s,$$

где о. н. д. $(a_1, a_2, \ldots, a_s, q)=1$, $a_i \leqslant \frac{1}{2} q$, $|\delta_i|<\frac{1}{q^\tau}$, $0<\tau<\infty$, $0<q<\tau$, $i=1, 2, \ldots, s$.

Тогда область $G_3'-\bar{G}_2'$ распадается на конечное число кубиков $I_{\frac{\mathbf{a}}{q}}$ с центром в точке

$$\frac{\mathbf{a}}{q}=\left(\frac{a_1}{q}, \frac{a_2}{q}, \ldots, \frac{a_s}{q}\right), \quad \mathbf{t} \in I_{\frac{\mathbf{a}}{q}}.$$

Если τ большое, то

$$R_{kl}^{(n)}(2\pi\mathbf{t})=\mathbf{M}\Bigg(\sum_{\mathbf{m}}\sum_{\mathbf{m}'}\sin^2\pi\Bigg[\left(\frac{\mathbf{a}}{q}(\mathbf{m}-\mathbf{m}')\right)+$$

$$+\left(\left(\mathbf{t}-\frac{\mathbf{a}}{q}\right)(\mathbf{m}-\mathbf{m}')\right)\Bigg]P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\cdot P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}'\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{q^2}\mathbf{M}\sum_{\mathbf{m}}\sum_{\substack{\mathbf{m}'\\ (\mathbf{a}(\mathbf{m}-\mathbf{m}'))\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,q)\\ |\mathbf{m}-\mathbf{m}'|\leqslant\frac{\tau}{4}}}P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\cdot P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}'\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{M}\sum_{\mathbf{m}}\sum_{\substack{\mathbf{m}'\\ (\mathbf{a}(\mathbf{m}-\mathbf{m}'))\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,q)\\ |\mathbf{m}-\mathbf{m}'|\leqslant\frac{\tau}{4}}}\left[\left(\mathbf{t}-\frac{\mathbf{a}}{q}\right)(\mathbf{m}-\mathbf{m}')\right]^2\cdot$$

$$\cdot P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}'\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right).\tag{5.33}$$

У нас случайные векторы $\left|\mathbf{X}_k^{(n)}\right|<C$, тогда если τ большое ($\tau<8C$), то

$$\mathbf{M}\sum_{\mathbf{m}}\sum_{\substack{\mathbf{m}'\\ |\mathbf{m}-\mathbf{m}'|>\frac{\tau}{4}}}\left[\left(\mathbf{t}-\frac{\mathbf{a}}{q}\right)(\mathbf{m}-\mathbf{m}')\right]^2\cdot$$

$$\cdot P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}'\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)=0.\tag{5.34}$$

При большом $C_{13}>0$, аналогично работе [6], получаем

$$\mathbf{M}\left(C_{13}|\mathbf{z}|^2a_{kl}^{(n)}+b_{kl}^{(n)}(\mathbf{z})\right)\geqslant 2\mathbf{MD}\left(\left(\mathbf{X}_{k_{j+1}}^{(n)},\mathbf{z}\right)\Big|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)\geqslant$$

$$\geqslant C_{14}\alpha^{(n)2}|\mathbf{z}|^2,\tag{5.35}$$

где

$$a_{kl}^{(n)}=\mathbf{M}\sum_{\mathbf{m}}\sum_{\substack{\mathbf{m}'\\ (\mathbf{a}(\mathbf{m}-\mathbf{m}'))\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,q)\\ |\mathbf{m}-\mathbf{m}'|\leqslant\frac{\tau}{4}}}P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}'\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right),$$

$$b_{kl}^{(n)}(\mathbf{z})=\mathbf{M}\sum_{\mathbf{m}}\sum_{\substack{\mathbf{m}'\\ (\mathbf{a}(\mathbf{m}-\mathbf{m}'))\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,q)\\ |\mathbf{m}-\mathbf{m}'|\leqslant\frac{\tau}{4}}}\left[\mathbf{z}(\mathbf{m}-\mathbf{m}')\right]^2\cdot$$

$$\cdot P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right)P_{kl}^{(n)}\left(\mathbf{m}'\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right),$$

$$\mathbf{z}=\mathbf{t}-\frac{\mathbf{a}}{q},$$

$$k_j=\nu_{j-1},\quad l_j=\nu_{j+1},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

$$\left[\frac{\ln n}{\alpha^{(n)}}\right]\leqslant\nu_{j+1}-\nu_j\ll\left[\frac{\ln n}{\alpha^{(n)}}\right],$$

тогда

$$N\asymp\frac{n\alpha^{(n)}}{\ln n}.\tag{5.36}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{N} R_{k_j l_j}^{(n)}(2\pi\mathbf{t}) \geqslant \frac{1}{q^s} \sum_{j=0}^{N} \left(|\mathbf{z}|^2 a_{k_j l_j}^{(n)} + b_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{z}) \right), \tag{5.37}$$

где

$$\sum_{j=1}^{N} |\mathbf{z}|^2 a_{k_j l_j}^{(n)} + b_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{z}) \geqslant C_{15} \frac{n\alpha^{(n)3}}{\ln n} |\mathbf{z}|^2. \tag{5.38}$$

Аналогично тому, как это делается в работе [6] рассматривая два случая

I. $$A_n(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{N} |\mathbf{z}|^2 a_{k_j l_j}^{(n)} > \frac{1}{2} C_{15} \frac{n\alpha^{(n)3}}{\ln n} |\mathbf{z}|^2,$$

II. $$B_n(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{N} b_{k_j l_j}^{(n)}(\mathbf{z}) > \frac{1}{2} C_{15} |\mathbf{z}|^2 \cdot \frac{n\alpha^{(n)3}}{\ln n}$$

и применяя в каждом случае полученные выше оценки, потом расширяя пределы интегрирования по всему s-мерному пространству, получаем лемму 5.

Пользуясь леммами 4 — 5, докажем теоремы 1 — 2.

Ненарушая общности, как и раньше предположим, что $\mathbf{M}X_{k,i}^{(n)} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, s$, и

$$f_n(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{y}} e^{i(\mathbf{t}\mathbf{y})} P_n(\mathbf{y}),$$

тогда

$$(2\pi)^s P_n(\mathbf{m}) = \int_{(-\pi)}^{(\pi)} e^{-i(\mathbf{t}\mathbf{m})} f_n(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{5.39}$$

Так как

$$(2\pi)^s g(\mathbf{X}_{nm}) = \left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \right) \int_{(-\infty)}^{(\infty)} e^{-i(\mathbf{t}\mathbf{m})} e^{-\frac{1}{2} Q_n(\mathbf{t})}\, d\mathbf{t}, \tag{5.40}$$

где $g(\mathbf{X}_{nm})$ — плотность s-мерного нормального распределения, то для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что равномерно по $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$

$$(2\pi)^s \left[\left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \right) P_n(\mathbf{m}) - g(\mathbf{X}_{nm}) \right] = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \tag{5.41}$$

стремится к нулю, когда $n \to \infty$, здесь

$$I_1 = \left(\prod_{i=1} B_{n,i} \right) \int_{G_1} e^{-i(\mathbf{t}\mathbf{m})} \left[f_n(\mathbf{t}) - e^{-\frac{1}{2} Q_n(\mathbf{t})} \right] d\mathbf{t},$$

$$I_4 = \left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i} \right) \int_{R_s - G_1} e^{-i(\mathbf{t}\mathbf{m}) - \frac{1}{2} Q_n(\mathbf{t})}\, d\mathbf{t},$$

$$I_2=\left(\prod_{i=1}^{s}B_{n,i}\right)\int\limits_{G_2-G_1}e^{-i(\mathbf{tm})}f_n(\mathbf{t})\,d\mathbf{t},$$

$$I_3=\left(\prod_{i=1}^{s}B_{n,i}\right)\int\limits_{G_3-G_2}e^{-i(\mathbf{tm})}f_n(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}.$$

Оценим эти интегралы.

Из многомерной центральной предельной теоремы (см. работу [1] обобщение теоремы 1) следует, что равномерно относительно $\mathbf{m}$ при любом A

$$I_1\to 0\,(n\to\infty). \tag{5.42}$$

Очевидно, для любого сколь угодно малого $\varepsilon_1>0$, A можно подобрать столь большим, чтобы

$$|I_2|<\varepsilon_1. \tag{5.43}$$

Из теоремы 1' следует, что выполнены все условия леммы 4, где положено $\varepsilon=\frac{1}{2C}$, поэтому из (5.28) получаем

$$|I_3|\leqslant\left(\prod_{i=1}^{s}B_{n,i}\right)\int\limits_{G_3-G_2}\left|f_n(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}\leqslant\max\left(e^{-C_1A^2},\ e^{-\psi(n)\ln n}\right). \tag{5.44}$$

Тогда, если A достаточно большое, то I_3 — сколь угодно малое.

Подобным образом, из условий теоремы следует, что мы можем воспользоваться оценкой (5.29); тогда

$$|I_4|\leqslant\left(\prod_{i=1}^{s}B_{n,i}\right)\int\limits_{G_4-G_3}\left|f_n(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}=o(1). \tag{5.45}$$

Из (5.41) — (5.45) окончательно следует справедливость теоремы 1.

Докажем теорему 2. Имеем

$$(2\pi)^s\left(\prod_{i=1}^{s}B_{n,i}\right)P_n(\mathbf{m})=I_1'+I_2+I_3+I_4', \tag{5.46}$$

где

$$I_1'=\left(\prod_{i=1}^{s}B_{n,i}\right)\int\limits_{G_1}\left\{f_n(\mathbf{t})-e^{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t})}\cdot\left(1+\sum_{\nu=1}^{p-3}\left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu}P_{n\nu}(i\mathbf{t})\right)\right\}\cdot e^{-i(\mathbf{tm})}\,d\mathbf{t},$$

$$I_2=\left(\prod_{i=1}^{s}B_{n,i}\right)\int\limits_{G_2-G_1}f_n(\mathbf{t})e^{-i(\mathbf{tm})}\,d\mathbf{t},$$

$$I_3=\left(\prod_{i=1}^{s}B_{n,i}\right)\int\limits_{G_3-G_2}f_n(\mathbf{t})e^{-i(\mathbf{tm})}\,d\mathbf{t},$$

$$I_4'=\left(\prod_{i=1}^{s}B_{n,i}\right)\int\limits_{G_1}e^{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t})}\left(1+\sum_{\nu=1}^{p-3}\left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu}P_{n\nu}(i\mathbf{t})\right)e^{-i(\mathbf{tm})}\,d\mathbf{t}.$$

В данном случае $A=\psi(n)\sqrt{\ln n}$, где $\psi(n)$ из леммы 3. Из леммы 3 следует, что

$$|I_1'|\ll\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}. \tag{5.47}$$

Из условий теоремы видно, что можно применять оценку (5.2). Поэтому

$$|I_2| \leqslant \max(e^{-\psi^2(n)},\ e^{-\psi_1(n)\ln n}), \tag{5.48}$$

аналогично из (5.29) получаем

$$|I_3| \leqslant \frac{1}{n^d}, \tag{5.49}$$

$d > 0$ — постоянное.

Далее, согласно лемме 3 и из $A = \psi(n)\sqrt{\ln n}$, легко убедиться, что

$$\left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\right) \int\limits_{R_s - G_1} e^{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t})} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{p-3} \left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu} \cdot P_{n\nu}(i\mathbf{t})\right) e^{-i(\mathbf{tm})}\, d\mathbf{t} = O\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}. \tag{5.50}$$

Тогда из (5.50) следует, что

$$|I_4'| = \left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\right) \int\limits_{R_s} e^{-\frac{1}{2}Q_n(\mathbf{t})} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{p-3} \left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu} \cdot P_{n\nu}(i\mathbf{t})\right) e^{-i(\mathbf{tm})}\, d\mathbf{t} + O\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2} = \int\limits_{R_s} e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{p-3} \left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu} P_{n\nu}(i\mathbf{t})\right) e^{-i(\mathbf{tX}_{nm})}\, d\mathbf{t} + O\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}. \tag{5.51}$$

Но

$$g(\mathbf{X}_{nm}) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\varphi_n^{-1}(\mathbf{X}_{nm})} = (2\pi)^{-s} \int\limits_{R_s} e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t}) - i(\mathbf{tX}_{nm})}\, d\mathbf{t}. \tag{5.52}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_s} g(\mathbf{X}_{nm})}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\cdots\partial x_s^{\nu_s}} = (2\pi)^{-s} \int\limits_{R_s} (-it_1)^{\nu_1}(-it_2)^{\nu_2}\ldots(-it_s)^{\nu_s} e^{-\frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t}) - i(\mathbf{tX}_{nm})}\, d\mathbf{t},$$

следовательно

$$\int\limits_{R_s} P_{n\nu}(i\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{tX}_{nm}) - \frac{1}{2}\varphi_n(\mathbf{t})}\, d\mathbf{t} = (2\pi)^s P_{n\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{nm}}\right) g(\mathbf{X}_{nm}), \tag{5.53}$$

где символ $P_{n\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{nm}}\right) g(\mathbf{X}_{nm})$ означает, что в полиноме $P_{n\nu}(i\mathbf{t})$ произведения $(it_1)^{m_1}(it_2)^{m_2}\ldots(it_s)^{m_s}$ заменяются на

$$(-1)^{m_1+\cdots+m_s} \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_s} g(\mathbf{X}_{nm})}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_s^{m_s}}.$$

Поэтому из (5.51) — (5.53) выводим

$$I_4' = g(\mathbf{X}_{nm}) + \sum_{\nu=1}^{p-3} \left(\frac{1}{r_n}\right)^{\nu} P_{n\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{nm}}\right) g(\mathbf{X}_{nm}) + O\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}.$$

Из (5.47) — (5.49) и (5.54) окончательно получаем доказательство теоремы 2.

Автор выражает глубокую благодарность канд. ф. м. н. В. А. Статулявичюсу за предложеную задачу и ценные указания при её решении.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 16. V. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Добрушин. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, теор. вер. и её прим. **1**, вып. 1 и 4, 1956.
2. А. Н. Колмогоров. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. мат., **13**, 1949, 281—300.
3. Ю. В. Линник и Н. А. Сапогов. Многомерные интегральные и локальные законы для неоднородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. мат., **13**, 1949, 533—566.
4. С. В. Нагаев. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, теор. вероят. и её прим., 2 вып. 4, 1957, 389—416.
5. С. В. Нагаев. Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, теор. вероят. и её прим., 6 вып. 1, 1961, 67—86.
6. В. А. Статулявичюс. Локальные предельные теоремы и их уточнения для неоднородных цепей Маркова, Лит. мат. сб. I, № 1—2.
7. В. А. Статулявичус. О локальной предельной теореме для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР. т. **107**, № 4, 1956, 516—519.
8. С. Х. Сираждинов. Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955.

RIBINĖS TEOREMOS ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ, SURIŠTŲ Į NEHOMOGENINĘ MARKOVO GRANDINĘ, SUMOMS I

A. RAUDELIŪNAS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjama s-mačių atsitiktinių vektorių

$$\mathbf{X}_1^{(n)},\ \mathbf{X}_2^{(n)},\ \ldots,\ \mathbf{X}_n^{(n)},\quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

serijų seka, surištų kiekvienoje serijoje n į nehomogeninę Markovo grandinę.

Sumai

$$\mathbf{S}_n^{(n)}=\mathbf{X}_1^{(n)}+\mathbf{X}_2^{(n)}+\cdots+\mathbf{X}_n^{(n)}$$

įrodoma lokalinė ribinė teorema (t. 1) ir patikslinta lokalinė ribinė teorema (t. 2), reikalaujant, kad atsitiktiniai vektoriai $\mathbf{X}_k^{(n)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ būtų tolygiai aprėžti ir grandinės ergodiškumo koeficientas $\alpha^{(n)}$ lokalinės ribinės teoremos atveju patenkintų sąlygą (2.1), ir patikslintos lokalinės ribinės teoremos — (2.4).

LIMIT THEOREMS FOR SUMS OF RANDOM VECTORS COMBINED INTO A NON-HOMOGENEUS MARKOV CHAIN I

BY A. RAUDELIUNAS

(Summary)

In this paper we consider a sequense of series of s-dimentional random vectors

$$\mathbf{X}_1^{(n)},\ \mathbf{X}_2^{(n)},\ \ldots,\ \mathbf{X}_n^{(n)}\quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

which in each of n-th series connected into a non-homogeneus Markov chain, with sets of states $\Omega_k^{(n)}$, with σ-algebras $\mathfrak{F}_k^{(n)}$ of measurable subsets of these sets, with transitional probabilities $P_k^{(n)}(\omega,\ A)$ from a state $\omega\in\Omega_{k-1}^{(n)}$ in the time moment $k-1$ into a set $A\in\mathfrak{F}_k^{(n)}$ in the time moment k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, with initial probability distribution $P_1(A)$, $A\in\mathfrak{F}_1^{(n)}$ and with a chain ergodicity coefficient $\alpha^{(n)}$.

Let us put

$$\mathbf{S}_n^{(n)} = \mathbf{X}_1^{(n)} + \mathbf{X}_2^{(n)} + \cdots + \mathbf{X}_n^{(n)},$$

$$B_{n,i} = \sqrt{\mathbf{D}S_{n,i}^{(n)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\hat{\mathbf{S}}_n^{(n)} = \left(\frac{S_{n,1}^{(n)}}{B_{n,1}}, \frac{S_{n,2}^{(n)}}{B_{n,2}}, \ldots, \frac{S_{n,s}^{(n)}}{B_{n,s}}\right),$$

$$P_n(\mathbf{m}) = \mathbf{P}\left\{\mathbf{S}_n^{(n)} = \mathbf{m}\right\}.$$

We prove the following theorems:

Theorem 1. Let $\mathbf{X}_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ take only values of integer s-dimentional vectors and $\mathbf{X}_k^{(n)}$ be bounded uniform in respect to k and n, $k = 1, 2, \ldots, n$. Besides that let $\mathbf{D}\left(\mathbf{X}_k^{(n)}\mathbf{t}\right) \geqslant \sigma > 0$ for all $\mathbf{t}$ with $|\mathbf{t}| = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a positively definite quadratic form $\varphi_n(\mathbf{t})$ of a normed sum $\hat{\mathbf{S}}_n^{(n)}$. Let also

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{s}} \ln^{-\frac{2}{s}} n \longrightarrow \infty \; (n \longrightarrow \infty) \tag{2.1}$$

and

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\ln n\left(\ln\frac{1}{\alpha^{(n)}} + \ln\ln n\right)} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\left(\min_r \mathbf{P}\left\{\left(\mathbf{a}\mathbf{X}_k^{(n)}\right) \not\equiv r \pmod q \,\middle|\, \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{k+1}^{(n)}\right\}\right) \longrightarrow \infty \; (n \longrightarrow \infty)$$

for all $q \geqslant 2$ and for all integer vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ with a greatest common divisor $(a_1, a_2, \ldots, a_s, q) = 1$.

Then

$$\left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\right) P_n(\mathbf{m}) \longrightarrow g(\mathbf{X}) \longrightarrow 0 \; (n \longrightarrow \infty)$$

uniform $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ where $g(\mathbf{X})$ is the density of the s-dimentional normal distribution.

Theorem 2. If we replace the condition (2.1) of the theorem 1 by a stronger condition

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{7}} \ln^{-\frac{5}{7}} n (\ln\ln n)^{-\frac{4}{7}} \longrightarrow \infty \; (n \longrightarrow \infty)$$

then we get for any integer $p \geqslant 3$

$$\left(\prod_{i=1}^{s} B_{n,i}\right) P_n(\mathbf{m}) - g(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{p-3} \left(\frac{1}{r_n}\right) P_{n\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) g(\mathbf{x}) + O\left(\frac{1}{r_n}\right)^{p-2}$$

where $P_{n\nu}(it) = P_{n\nu}(it_1, it_2, \ldots, it_s)$ are polinomials of s variables $it_1, it_2, \ldots, it_s$ of degree not greater than 3ν with real uniform bounded (in respect to n) coefficients. By symbol $P_{n\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) g(\mathbf{x})$ we denote that in the polinomials $P_{n\nu}(it)$ products $it_1, it_2, \ldots, it_s$ are changed by the

$$(-1)^{m_1 + \cdots + m_s} \frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_s} g(\mathbf{x})}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_s^{m_s}},$$

$$r_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \frac{1}{n} B_{n,i}^3 \alpha^{(n)2},$$

$$\mathbf{x} = \left(\frac{m_1}{B_{n,1}}, \frac{m_2}{B_{n,2}}, \ldots, \frac{m_s}{B_{n,s}}\right).$$

Constant in the symbol „$O(\ldots)$“ depends on k and is bounded for all n.