I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

О РЕГУЛЯРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

А. ПАНКАУСКАЙТЕ

Пусть $\{r_n\}$ — монотонная последовательность положительных чисел, для которой

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty,$$

и $N(r)$ — числовая функция этой последовательности $\left(N(r)\right.$ — число точек последовательности $\{r_n\}$ в промежутке $\left.[0, r]\right)$. Показатель сходимости последовательности $\{r_n\}$ обозначим через λ, т. е.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(r)}{\ln r}.$$

Следуя Пойа [1, 2], последовательность назовем регулярной, если

$$N(r) \sim r^{\lambda} L(r) \left(r^{\lambda} L(r) \neq 0, \quad \frac{N(r)}{r^{\lambda} L(r)} \to 1, r\to\infty \right),$$

где $L(r)$ — медленно возрастающая функция. Положительная функция $L(r)$, определенная для значений $r \geqslant 0$, называется медленно возрастающей, если она монотонно возрастает и удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(2r)}{L(r)} = 1.$$

Пойа доказал, что для любой функции $f(x)$, интегрируемой в собственном смысле Римана в промежутке $[0, c]$ и регулярной последовательности $\{r_n\}$, имеет место равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \int_0^{c^{\lambda}} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx.$$

Им же доказано, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \int_0^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx, \tag{1}$$

если $\{r_n\}$ — регулярная последовательность и функция $f(x)$, определенная для значений $x>0$, собственно интегрируема в каждом конечном интервале $0<\alpha\leqslant x\leqslant\tau<\infty$, в окрестности точки $x=0$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| < x^{\beta-\lambda},$$

а в окрестности бесконечно удаленной точки $x=+\infty$ —

$$|f(x)| < x^{-\beta-\lambda} \qquad (\beta>0).$$

В заметке рассматриваются функции $f(x)$, собственно интегрируемые в любом конечном интервале $0<\alpha\leqslant x\leqslant\tau<\infty$, и изучаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы имело место равенство (1).

I. Требование, чтобы функция $f(x)$ была собственно интегрируемой в любом конечном интервале $0<\alpha\leqslant x\leqslant\tau<\infty$, является недостаточным для того, чтобы выполнялось равенство (1). Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующий пример. Пусть $\{r_n\}$ — последовательность натуральных чисел. Ее числовая функция

$$N(r)=[r]\sim r,$$

так что $\lambda=1$. Функцию $f(x)$ определим следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} k, & \text{если} \quad x=\dfrac{1}{k}, \\ 0, & \text{если} \quad x\neq\dfrac{1}{k} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \end{cases}$$

Рассмотрим правую часть равенства (1):

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=0,$$

так как в любом интервале $0<\delta\leqslant x\leqslant 1$ будет только конечное число точек x, в которых $f(x)\neq 0$. Пусть $r=k$. Тогда

$$N(r)=k.$$

В левой части равенства (1) получим

$$\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right)=\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\geqslant\frac{1}{k}\cdot k=1 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\geqslant 1.$$

В данном случае равенство (1) не имеет места.

В рассмотренном примере функция $f(x)$ была разрывной функцией. Нетрудно дать пример непрерывной функции, для которой равенство (1) тоже не будет выполнено.

II. Лемма. *Если функция $f(x)\geqslant 0$, определенная для $x>0$, собственно интегрируема в каждом конечном интервале $0<\alpha\leqslant x\leqslant\tau<\infty$, то*

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\geqslant\int_0^\infty f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx.$$

Доказательство. Возьмем последовательность функций $f_k(x)$:

$$f_k(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если} \quad 0<\delta_k\leqslant x\leqslant\tau_k<\infty, \\ 0, & \text{если} \quad 0<x<\delta_k \quad \text{и} \quad x>\tau_k, \end{cases}$$
$$\text{где} \quad \{\delta_k\}\to 0, \quad \{\tau_k\}\to\infty, \quad k\to\infty.$$

Для функций $f_k(x)$ равенство (1) имеет место [1], т. е.

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f_k\left(\frac{r_n}{r}\right)=\int_{\delta_k^\lambda}^{\tau_k^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx.$$

Функция $f(x)\geqslant 0$, поэтому

$$f(x)\geqslant f_k(x)$$

и

$$\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\geqslant\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f_k\left(\frac{r_n}{r}\right)\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Переходя к пределу, получим

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\geqslant\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f_k\left(\frac{r_n}{r}\right)=\int_{\delta_k^\lambda}^{\tau_k^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\geqslant\lim_{k\to\infty}\int_{\delta_k^\lambda}^{\tau_k^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx=\int_{0}^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx.$$

Теорема 1. *Если функция $f(x)$, определенная для значений $x>0$, собственно интегрируема в каждом конечном интервале $0<a\leqslant x\leqslant c$ и монотонна в окрестности точки $x=0$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right)=\int_{0}^{c^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx.$$

Доказательство. Как уже было отмечено, равенство имеет место, если функция $f(x)$ в промежутке $[0,\ c]$ интегрируема в собственном смысле. Допустим, что $f(x)\geqslant 0$. Если интеграл

$$\int_{0}^{c^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx$$

расходится, то утверждение теоремы следует из леммы. Осталось рассмотреть случай, когда интеграл

$$\int_{0}^{c^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx$$

существует и

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\infty.$$

1) Пусть функция $f(x)\geqslant 0$ монотонна во всем интервале $0<x\leqslant c$. Тогда функция $f(x)$ монотонно убывает. Покажем, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\leqslant\int_{0}^{c^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx.$$

а) Докажем сначала наше утверждение для случая $\lambda=1$, т. е.

$$N(r)\sim rL(r).$$

Для любого числа $\varepsilon_1>0$ найдется такое число k, что

$$N(r)=rL(r)\left[1+\varepsilon_1(r)\right]$$

и

$$\frac{L(cr)}{L(r)}=1+\varepsilon_2(r), \tag{2}$$

где

$$|\varepsilon_1(r)|<\varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |\varepsilon_2(r)|<\varepsilon_1$$

для всех $r>r_k$.

Пусть $r>r_k$, $r_m\leqslant cr<r_{m+1}$. Тогда

$$\sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right)=\sum_{n=1}^{m} f\left(\frac{r_n}{r}\right)=\sum_{n=1}^{m}\left[n-(n-1)\right]f\left(\frac{r_n}{r}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{m-1} n\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+mf\left(\frac{r_m}{r}\right).$$

Сумму

$$\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right)$$

представим в виде суммы двух слагаемых

$$\sum\nolimits_1=\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{k} n\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]$$

и

$$\sum\nolimits_2=\frac{1}{N(r)}\left[\sum_{n=k+1}^{m-1} n\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+mf\left(\frac{r_m}{r}\right)\right] \tag{3}$$

и оценим каждую из этих сумм.

Так как

$$f(x)\geqslant 0 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{r_1}{r}\right)\geqslant f\left(\frac{r_2}{r}\right)\geqslant\ldots\geqslant f\left(\frac{r_k}{r}\right),$$

то

$$\sum\nolimits_1=\frac{1}{N(r)}\left[\sum_{n=1}^{k} f\left(\frac{r_n}{r}\right)-kf\left(\frac{r_{k+1}}{r}\right)\right]<k\cdot\frac{f\left(\frac{r_1}{r}\right)}{N(r)}. \tag{4}$$

Для оценки суммы Σ_2 воспользуемся равенствами (2):

$$\sum\nolimits_2=\sum_{n=k+1}^{m-1}\frac{N(r_n)}{N(r)}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+\frac{N(r_m)}{N(r)}\cdot f\left(\frac{r_m}{r}\right)=$$

$$=\sum_{n=k+1}^{m-1}\frac{r_nL(r_n)\left[1+\varepsilon_1(r_n)\right]}{rL(r)\left[1+\varepsilon_1(r)\right]}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+$$

$$+\frac{r_mL(r_m)\left[1+\varepsilon_1(r_m)\right]}{rL(r)\left[1+\varepsilon_1(r)\right]}\cdot f\left(\frac{r_m}{r}\right)<$$

$$<\frac{(1+\varepsilon_1)^2}{1-\varepsilon_1}\left\{\sum_{n=k+1}^{m-1}\frac{r_n}{r}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+\frac{r_m}{r}\cdot f\left(\frac{r_m}{r}\right)\right\};$$

Сумма

$$\sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{r_n}{r}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]$$

является нижней суммой Дарбу для функции $f^{-1}(y)$ $\left(f^{-1}(y)\right.$ — функция, обратная для функции $\left.f(x)\right)$[1] в интервале

$$\left[f\left(\frac{r_{k+1}}{r}\right),\ f\left(\frac{r_m}{r}\right)\right].$$

Поэтому

$$\sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{r_n}{r}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right] \leqslant -\int\limits_{f\left(\frac{r_{k+1}}{r}\right)}^{f\left(\frac{r_m}{r}\right)} f^{-1}(y)\,dy \leqslant -\int\limits_{\infty}^{f\left(\frac{r_m}{r}\right)} f^{-1}(y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0 f(x)\,dx - \frac{r_m}{r}\cdot f\left(\frac{r_m}{r}\right).$$

Отсюда

$$\sum\nolimits_2 < \frac{(1+\varepsilon_1)^2}{1-\varepsilon_1}\int\limits_0^c f(x)\,dx \tag{5}$$

и

$$\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) < k\cdot\frac{f\left(\frac{r_1}{r}\right)}{N(r)} + \frac{(1+\varepsilon_1)^2}{1-\varepsilon_1}\int\limits_0^c f(x)\,dx$$

для всех $r > r_k$.

Таким образом,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) \leqslant k\lim_{r\to\infty}\frac{f\left(\frac{r_1}{r}\right)}{N(r)} + \frac{(1+\varepsilon_1)^2}{1-\varepsilon_1}\int\limits_0^c f(x)\,dx.$$

Так как функция $f(x)$ монотонно убывает и существует несобственный интеграл

$$\int\limits_0^c f(x)\,dx,$$

то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r_1}{r}\cdot f\left(\frac{r_1}{r}\right)=0,$$

следовательно (см. (2))

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f\left(\frac{r_1}{r}\right)}{N(r)} = \lim_{r\to\infty}\frac{f\left(\frac{r_1}{r}\right)\cdot\frac{r_1}{r}}{rL(r)\,[1+\varepsilon_1(r)]\cdot\frac{r_1}{r}} \leqslant \lim_{r\to\infty}\frac{f\left(\frac{r_1}{r}\right)\cdot\frac{r_1}{r}}{r_1(1-\varepsilon_1)\,L(r_1)} = 0. \tag{6}$$

---

[1] Если

$$f(x+0)\leqslant y\leqslant f(x-0),$$

то

$$f^{-1}(y)=x.$$

Поэтому

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) \leqslant \frac{(1+\varepsilon_1)^2}{1-\varepsilon_1} \int_0^c f(x)\,dx,$$

где ε_1 сколь угодно мало. Следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) \leqslant \int_0^c f(x)\,dx.$$

б) Пусть показатель сходимости регулярной последовательности $\{r_n\}$ равен λ, т. е.

$$N(r) \sim r^\lambda L(r).$$

Если возьмем

$$\rho_k = r_k^\lambda, \quad \rho = r^\lambda,$$

то показатель сходимости новой последовательности $\{\rho_k\}$ будет равен 1. Последовательность $\{\rho_k\}$ тоже регулярна, так как её числовая функция

$$N_1(\rho) = N(r) \sim r^\lambda L(r) = \rho L\left(\rho^{\frac{1}{\lambda}}\right) = \rho L_1(\rho),$$

где $L_1(\rho)$ — медленно возрастающая функция:

$$\frac{L_1(2\rho)}{L_1(\rho)} = \frac{L\left((2\rho)^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{L\left(\rho^{\frac{1}{\lambda}}\right)} = \frac{L\left(2^{\frac{1}{\lambda}}\rho^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{L\left(\rho^{\frac{1}{\lambda}}\right)} = \frac{L\left(2^{\frac{1}{\lambda}}r\right)}{L(r)} \to 1, \qquad r\to\infty.$$

Функция

$$\varphi(x) = f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)$$

— монотонно убывающая функция, если $f(x)$ — такова, и (при $\rho = r^\lambda$, $\rho_k = r_k^\lambda$)

$$\frac{1}{N(r)} \sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \frac{1}{N_1(\rho)} \sum_{\rho_n\leqslant c^\lambda\rho} f\left(\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right) = \frac{1}{N_1(\rho)} \sum_{\rho_n\leqslant c^\lambda\rho} \varphi\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right).$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \overline{\lim_{\rho\to\infty}} \frac{1}{N_1(\rho)} \sum_{\rho_n\leqslant c^\lambda\rho} \varphi\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right) \leqslant \int_0^{c^\lambda} \varphi(x)\,dx = \int_0^{c^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx.$$

Применив лемму, получим, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \int_0^{c^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx.$$

Мы доказали теорему для монотонной функции $f(x)$, которая сохраняет положительный знак. Очевидно, эта теорема будет справедлива, если монотонная функция $f(x)$ будет отрицательна.

2) Пусть функция $f(x)$ монотонна и сохраняет знак только в определенной окрестности $(0, \gamma)$ точки $x=0$. Тогда функцию $f(x)$ можно представить

в виде суммы двух функций, для которых справедливо утверждение теоремы

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x),$$

где

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\leqslant\gamma, \\ f(\gamma), & \text{если } x>\gamma, \end{cases} \qquad \psi(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\leqslant\gamma, \\ f(x)-f(\gamma), & \text{если } x>\gamma. \end{cases}$$

Тем самым теорема доказана.

III. Требование, чтобы функция $f(x)$ была монотонной для всех значений $x>0$, является недостаточным для того, чтобы выполнялось равенство (1). В этом убедимся, рассмотрев следующий пример. Пусть $\{r_n\}$ — регулярная последовательность с числовой функцией

$$N(r)\sim r\ln^3 r.$$

Функцию $f(x)$ определим следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x\ln^2 x}, & \text{если } x\geqslant a>1, \\ f(a), & \text{если } x<a. \end{cases}$$

Вычислим правую часть равенства (1):

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^a \frac{1}{a\ln^2 a}\,dx+\int_a^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx=\frac{1}{\ln^2 a}+\frac{1}{\ln a},$$

Теперь рассмотрим сумму

$$\sum_{n=1}^\infty f\left(\frac{r_n}{r}\right).$$

Возьмем частичную сумму

$$\sum_{n=1}^s f\left(\frac{r_n}{r}\right)>f\left(\frac{r_s}{r}\right)\cdot N(r_s)=\frac{1}{\frac{r_s}{r}\cdot\ln^2\frac{r_s}{r}}\cdot N(r_s), \qquad r_s\geqslant ar;$$

Пусть $s>k$, так что имеют место равенства (2). Тогда

$$\sum_{n=1} f\left(\frac{r_n}{r}\right)>\frac{1}{\frac{r_s}{r}\cdot\ln^2\frac{r_s}{r}}\cdot r_s\ln^3 r_s[1+\varepsilon_1(r_s)]>\frac{(1-\varepsilon_1)\cdot r\ln r_s}{1-2\frac{\ln r}{\ln r_s}+\frac{\ln^2 r}{\ln^2 r_s}}$$

для всех $s>k$.

Устремив $s\to\infty$, убедимся, что

$$\sum_{n=1}^\infty f\left(\frac{r_n}{r}\right)=\infty$$

для всех r, т. е. равенство (1) не имеет места.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$, определенная для значений $x>0$, собственно интегрируема в любом конечном интервале $0<\alpha\leqslant x\leqslant\tau<\infty$, монотонна в окрестностях точек $x=0$ и $x=\infty$, и существует несобственный интеграл*

$$\int_0^\infty f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx. \tag{7}$$

Для того, чтобы выполнялось равенство (1), *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon>0$ *существовало такое число* $\delta_0>0$, *чтобы*

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{\delta}[f^{-1}(y)]^{\lambda}\,\frac{L\left(f^{-1}(y)\cdot r\right)}{L(r)}\,dy<\varepsilon \tag{8}$$

для всех $\delta<\delta_0$ $\Big(f^{-1}(y)$ — *функция обратная для функции* $f(x)$; *при этом*

$$x=f^{-1}(y)\geqslant C,$$

где C — достаточно большое число$\Big)$.

Доказательство. 1. Пусть функция $f(x)\geqslant 0$ монотонно убывает в области $x>0$.

Пусть $\lambda=1$, тогда условие (8) примет вид

$$\int_0^{\delta}f^{-1}(y)\,\frac{L\left(f^{-1}(y)r\right)}{L(r)}\,dy<\varepsilon,\quad \text{если}\quad \delta<\delta_0,\quad r>R(\delta). \tag{9}$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon_1>0$ можно указать такое число k, чтобы для всех $r>r_k$ выполнялись равенства (2). Пусть $r>r_k$, $r_m\leqslant cr<r_{m+1}$, где $c>1$ произвольное положительное число. Возьмем частичную сумму

$$\sum\nolimits_s=\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{s}f\left(\frac{r_n}{r}\right).$$

Как и доказывая теорему 1, сумму Σ_s представим в виде суммы отдельных слагаемых:

$$\sum\nolimits_s=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2-\frac{m}{N(r)}\cdot f\left(\frac{r_{m+1}}{r}\right)+$$

$$+\frac{1}{N(r)}\sum_{n=m+1}^{s-1}n\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+\frac{s}{N(r)}\cdot f\left(\frac{r_s}{r}\right),$$

где Σ_1 и Σ_2 определены формулами (3). Оценим сумму

$$\sum\nolimits_3=\sum_{n=m+1}^{s-1}\frac{N(r_n)}{N(r)}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+\frac{N(r_s)}{N(r)}f\left(\frac{r_s}{r}\right)<$$

$$<\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\left\{\sum_{n=m+1}^{s-1}\frac{r_nL(r_n)}{rL(r)}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+\frac{r_sL(r_s)}{rL(r)}f\left(\frac{r_s}{r}\right)\right\}.$$

Сумма

$$\sum_{n=m+1}^{s-1}\frac{r_nL(r_n)}{rL(r)}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]$$

есть нижняя сумма Дарбу для функции

$$f^{-1}(y)\,\frac{L\left(f^{-1}(y)\cdot r\right)}{L(r)}$$

в интервале $\left[f\left(\frac{r_{m+1}}{r}\right), f\left(\frac{r_s}{r}\right)\right]$, поэтому

$$\sum\nolimits_3 < \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \int\limits_0^{f(c)} f^{-1}(y) \frac{L\left(f^{-1}(y)\cdot r\right)}{L(r)}\, dy.$$

Пусть c настолько велико, что $f(c)<\delta_0$. Тогда из условия (9) следует, что

$$\sum\nolimits_3 < \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\cdot\varepsilon,$$

если $r>R[f(c)]$. Это неравенство в соединении с оценками (4) и (5) для сумм Σ_1 и Σ_2 дает

$$\sum\nolimits_s < k\frac{f\left(\frac{r_1}{r}\right)}{N(r)} + \frac{(1+\varepsilon_1)^2}{1-\varepsilon_1}\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx + \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\cdot\varepsilon$$

для всех $r>R_c=\max\{r_k, R[f(c)]\}$ и $s>k$.

Когда $s\to\infty$, получим

$$\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right) < k\frac{f\left(\frac{r_1}{r}\right)}{N(r)} + \frac{(1+\varepsilon_1)^2}{1-\varepsilon_1}\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx + \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\,\varepsilon.$$

Эта оценка справедлива для всех $r>R_c$.

Поэтому (см. (6))

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right) \leqslant \frac{(1+\varepsilon_1)^2}{1-\varepsilon_1}\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx + \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\,\varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon_1\to 0$ и $\varepsilon\to 0$. Тогда

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right) \leqslant \int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Применив лемму, получим

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx. \tag{10}$$

Необходимость. Пусть имеет место равенство (10). Из теоремы 1 следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \int\limits_0^{c} f(x)\,dx.$$

Почленно вычитая это равенство из равенства (10), получим

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n>cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \int\limits_c^{\infty} f(x)\,dx.$$

Отсюда для любого числа $\varepsilon_2>0$ можно указать такое число $R(c)$, что

$$\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n>cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) < \int\limits_c^{\infty} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon_2}{2},$$

если $r>R(c)$.

Так как существует несобственный интеграл (7), то для каждого числа $\varepsilon_2>0$ можно указать такое число c_0, что

$$\int_c^\infty f(x)\,dx<\frac{\varepsilon_2}{2},\qquad cf(c)<\varepsilon_2, \tag{11}$$

если $c>c_0$.

Пусть

$$c>c_0,\ r>R'_c=\max\,[R(c),\ r_k],\quad r_m\leqslant cr<r_{m+1}. \tag{12}$$

Тогда

$$\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n>cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right)=\frac{1}{N(r)}\sum_{n=m+1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right)<\varepsilon_2.$$

Возьмем частичную сумму

$$\frac{1}{N(r)}\sum_{n=m+1}^{s} f\left(\frac{r_n}{r}\right)=\frac{1}{N(r)}\sum_{n=m+1}^{s-1} N(r_n)\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+\frac{N(r_s)}{N(r)}\cdot f\left(\frac{r_s}{r}\right)-$$

$$-\frac{N(r_m)}{N(r)}\cdot f\left(\frac{r_{m+1}}{r}\right)>\frac{1-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\left\{\sum_{n=m+1}^{s-1}\frac{r_nL(r_n)}{rL(r)}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{r_sL(r_s)}{rL(r)}f\left(\frac{r_s}{r}\right)\right\}-\frac{N(r_m)}{N(r)}f\left(\frac{r_{m+1}}{r}\right)<\varepsilon_2.$$

Сумму в фигурных скобках обозначим через Σ_3. Из предыдущего неравенства следует, что

$$\sum\nolimits_3=\sum_{n=m+1}^{s-1}\frac{r_nL(r_n)}{rL(r)}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+$$

$$+\frac{r_sL(r_s)}{rL(r)}f\left(\frac{r_s}{r}\right)<\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\left[\varepsilon_2+\frac{N(r_m)}{N(r)}f\left(\frac{r_{m+1}}{r}\right)\right].$$

Кроме того, из (2), (11) и (12) следует, что

$$\frac{N(r_m)}{N(r)}f\left(\frac{r_{m+1}}{r}\right)\leqslant\frac{N(cr)}{N(r)}f(c)<\frac{(1+\varepsilon_1)^2}{1-\varepsilon_1}cf(c)<\varepsilon_3,\quad\text{если}\quad r>r_k.$$

Следовательно,

$$\sum\nolimits_3<\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}(\varepsilon_2+\varepsilon_3)=\varepsilon_4,$$

если $r>R'_c$.

Рассмотрим еще сумму Σ'_3:

$$\sum\nolimits_3'=\sum_{n=m+1}^{s-1}\frac{r_{n+1}L(r_{n+1})}{rL(r)}\left[f\left(\frac{r_n}{r}\right)-f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]+\frac{r_{s+1}L(r_{s+1})}{rL(r)}\cdot f\left(\frac{r_s}{r}\right).$$

Отношение сумм Σ'_3 и Σ_3 ограничено, так как

$$\frac{r_{n+1}L(r_{n+1})}{r_nL(r_n)}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1+\varepsilon_1(r_n)}{1+\varepsilon_1(r_{n+1})}<\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}<h. \tag{13}$$

Таким образом, для достаточно больших m будет

$$\Sigma'_3 < h\varepsilon_4 = \varepsilon$$

и

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{r_{n+1} L(r_{n+1})}{rL(r)} \left[f\left(\frac{r_n}{r}\right) - f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right] < \varepsilon.$$

Сумма

$$\sum_{n=m+1}^{s-1} \frac{r_{n+1} L(r_{n+1})}{rL(r)} \left[f\left(\frac{r_n}{r}\right) - f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right]$$

есть верхняя сумма Дарбу для функции

$$f^{-1}(y) \frac{L\left(f^{-1}(y) r\right)}{L(r)}$$

в интервале $\left[f\left(\frac{r_{m+1}}{r}\right),\ f\left(\frac{r_s}{r}\right)\right]$. Отсюда легко получить, что

$$\int_0^{f\left(\frac{r_{m+1}}{r}\right)} f^{-1}(y) \frac{L\left(f^{-1}(y) r\right)}{L(r)} dy < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{r_{n+1} L(r_{n+1})}{rL(r)} \left[f\left(\frac{r_n}{r}\right) - f\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)\right] < \varepsilon.$$

Обозначив (см. (12) и (13))

$$\delta = f(hc) \leqslant f\left(\frac{r_{m+1}}{r}\right),$$

получим

$$\int_0^{\delta} f^{-1}(y) \frac{L\left(f^{-1}(y)\cdot r\right)}{L(r)} dy < \varepsilon,$$

если $r > R'_\varepsilon$.

Что теорема имеет место в общем случае, когда показатель сходимости λ может быть $\neq 1$, можно убедиться рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве теоремы 1 (т. е. преобразованием $\rho_x = r_x^\lambda$, $\rho = r^\lambda$).

Легко доказать теорему и для монотонно возрастающей функции $f(x) < 0$.

2) Пусть функция $f(x)$ монотонна и сохраняет знак только в определенных окрестностях $(0, \gamma)$ и (μ, ∞) нулевой и бесконечно удаленной точек. Функцию $f(x)$ представим в виде суммы двух функций:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) - f(\mu), & \text{если } x \leqslant \mu, \\ 0, & \text{если } x > \mu, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} f(\mu), & \text{если } x \leqslant \mu, \\ f(x), & \text{если } x > \mu. \end{cases}$$

Для функции $\varphi(x)$, как показано в теореме 1, равенство (1) справедливо, а функция $\psi(x)$ является монотонной и сохраняет знак в области $x > 0$.

Следствие 1. *Если*

$$N(r) \sim r^\lambda L(r),$$

где $L(r)$ ограничена, то равенство (1) справедливо для всех функций, собственно интегрируемых в каждом конечном интервале $0 < \alpha \leqslant x \leqslant \tau < \infty$, *монотонных в окрестностях нулевой и бесконечно удаленной точек и для которых существует несобственный интеграл* (7).

Доказательство. Из существования (7) следует, что существует и интеграл

$$\int_0^\infty [f^{-1}(y)]^\lambda \frac{L\left(f^{-1}(y)\cdot r\right)}{L(r)}\,dy,$$

так как $[f^{-1}(y)]^\lambda$ есть обратная функция для функции $f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)$, а $L(r)$ — ограниченная функция.

Следствие 2. *Если*

$$f(x)=x^{-\beta-\lambda}\quad(\beta>0)\quad\text{при}\quad x>1\quad\text{и}\quad f(x)=1\quad\text{при}\quad x\leqslant 1,$$

то равенство (1) *справедливо для любой регулярной последовательности* $\{r_n\}$.

Доказательство. Покажем, что для функции

$$f(x)=x^{-\beta-\lambda}$$

выполнено необходимое и достаточное условие (8). Заметив, что

$$f^{-1}(y)=y^{-\frac{1}{\beta+\lambda}},$$

оценим частное

$$\frac{L\left(f^{-1}(y)\cdot r\right)}{L(r)}.$$

Для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать такое число R, что

$$\frac{L(er)}{L(r)}<1+\varepsilon,\quad \frac{L(e^2r)}{L(er)}<1+\varepsilon,\quad\ldots,\quad \frac{L(e^nr)}{L(e^{n-1}r)}<1+\varepsilon,$$

если $r>R$.

Отсюда

$$\frac{L(e^nr)}{L(r)}<(1+\varepsilon)^n.$$

Пусть

$$e^{n-1}\leqslant f^{-1}(y)<e^n,\quad\text{т. е.}\quad n-1\leqslant\ln f^{-1}(y)<n.$$

Тогда

$$\frac{L\left(f^{-1}(y)\cdot r\right)}{L(r)}\leqslant\frac{L(e^nr)}{L(r)}<(1+\varepsilon)^n\leqslant(1+\varepsilon)^{\ln f^{-1}(y)+1}<(1+\varepsilon)\,[f^{-1}(y)]^\varepsilon.$$

Отсюда

$$\int_0^\delta [f^{-1}(y)]^\lambda\frac{L\left(f^{-1}(y)\cdot r\right)}{L(r)}\,dy<(1+\varepsilon)\int_0^\delta [f^{-1}(y)]^{\lambda+\varepsilon}=(1+\varepsilon)\int_0^\delta y^{-\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda+\beta}}\,dy.$$

Пусть $\varepsilon<\beta$. Тогда несобственный интеграл

$$\int_0^\delta y^{-\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda+\beta}}\,dy$$

существует, т. е. для любого числа $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\delta_0>0$, что будет выполнено условие (8), если $\delta<\delta_0$.

IV. Мы рассмотрели функции $f(x)$, монотонные в окрестностях нулевой и бесконечно удаленной точек. Теперь получим необходимые и достаточные условия для того, чтобы равенство (1) имело место в более общем случае.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$, определенная для значений $x>0$, собственно интегрируема в каждом конечном интервале $0<\alpha\leqslant x\leqslant\tau<\infty$, ряд*

$$\sum_{r_n>r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)$$

сходится для достаточно больших $r>R$ и существует несобственный интеграл (7).

Для того, чтобы выполнялось равенство (1), необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовали такие числа $\delta_0>0$ и $\tau_0>0$, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\left|\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant\delta r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)+\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n>\tau r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\right|<\varepsilon \tag{14}$$

для всех $\delta<\delta_0$ и $\tau>\tau_0$.

Доказательство. Так как интеграл (7) существует, то для любого числа $\varepsilon_1>0$ найдутся такие числа $\delta_1>0$ и $\tau_1>0$, что

$$\left|\int_0^{\delta\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|<\varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \left|\int_{\tau\lambda}^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|<\varepsilon_1, \tag{15}$$

если $\delta<\delta_1$ и $\tau>\tau_1$.

Как известно [1],

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{\delta r<r_n\leqslant\tau r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)=\int_{\delta\lambda}^{\tau\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx, \tag{16}$$

т. е. для любого числа $\varepsilon_2>0$ можно найти такое число $R_1(\delta, \tau)$, что

$$\left|\frac{1}{N(r)}\sum_{\delta r<r_n\leqslant\tau r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)-\int_{\delta\lambda}^{\tau\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|<\varepsilon_2, \tag{17}$$

если $r>R_1(\delta, \tau)$.

Достаточность. Пусть $r>R$, так что ряд

$$\sum_{r_n>r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)$$

сходится. Оценим разность

$$\left|\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right)-\int_0^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{N(r)}\sum_{\delta r<r_n\leqslant\tau r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)-\int_{\delta\lambda}^{\tau\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|+\left|\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant\delta} f\left(\frac{r_n}{r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n>\tau r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\right|+\left|\int_0^{\delta\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|+\left|\int_{\tau\lambda}^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|;$$

Пусть

$$\delta<\min(\delta_0, \delta_1) \quad \text{и} \quad \tau>\max(\tau_0, \tau_1).$$

Тогда, воспользовавшись неравенствами (14), (15) и (17), получим

$$\left|\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right)-\int_0^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|<\varepsilon_2+\varepsilon+2\varepsilon_1=\varepsilon_3,$$

если $r>\max\left[R(\delta, \tau), R_1(\delta, \tau)\right]$, т. е. равенство (1) будет справедливо.

Необходимость. Пусть для функции $f(x)$ равенство (1) имеет место. Вычитая почленно из равенства (1) равенство (16), получим

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\left[\sum_{r_n\leqslant\delta r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)+\sum_{r_n>\tau r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\right]=\int_0^{\delta^{\lambda}} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx+\int_{\tau^{\lambda}}^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx,$$

т. е. для любого числа $\varepsilon_4>0$ можно найти такое число $R_2(\delta, \tau)$, что

$$\left|\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant\delta r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)+\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n>\tau r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)-\int_0^{\delta^{\lambda}} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx-\int_{\tau^{\lambda}}^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|<\varepsilon_4,$$

если $r>R_2(\delta, \tau)$.

Пусть $\delta<\delta_1$, $\tau>\tau_1$. Тогда, как следует из предыдущего неравенства и (15),

$$\left|\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant\delta r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)+\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n>\tau r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)\right|<$$

$$<\left|\int_0^{\delta^{\lambda}} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|+\left|\int_{\tau^{\lambda}}^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx\right|+\varepsilon_4<2\varepsilon_1+\varepsilon_4=\varepsilon,$$

если $r>R_2(\delta, \tau)$.

Следствие. *Если*

$$|\varphi(x)|\leqslant f(x)$$

в некоторой окрестности нулевой и бесконечно удаленной точек и для функции $f(x)$ справедливо равенство (1), *то оно справедливо и для функции $\varphi(x)$.*

Пусть функция $f(x)$, определенная для значений $x>0$, собственно интегрируема в каждом конечном интервале $0<a\leqslant x\leqslant\tau<\infty$. Пусть далее, в окрестности точки $x=0$

$$|f(x)|<x^{\beta-\lambda},$$

а в окрестности бесконечно удаленной точки $x=\infty$

$$|f(x)|<x^{-\beta-\lambda} \qquad (\beta>0).$$

Как вытекает из последнего следствия, теоремы 1 и следствия 2 из теоремы 2, для функции $f(x)$ равенство (1) будет выполнено. Этот результат, как уже упоминалось, был получен Пойа.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила
в редакцию
17. II. 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Полия и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, т. 1, М., 1956.
2. G. Polya. Mathematische Annalen, 88, 173-177, 1923.

REGULIARIOS SEKOS

A. PANKAUSKAITĖ

(Reziumė)

Tegu funkcija $f(x)$ yra apibrėžta srityje $x > 0$ ir integruojama Rimano prasme bet kuriame intervale $\delta < x < \tau\ (\delta > 0,\ \tau < \infty)$, o $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots$ yra reguliari seka (tokias sekas nagrinėjo Polya [1], [2]).

Darbe įrodyta būtinos ir pakankamos sąlygos, kad galiotų lygybė (1).

ÜBER REGULÄRE FOLGEN

A. PANKAUSKAITE

(Zusammenfassung)

Es sei $f(x)$ eine für $x > 0$ definierte und in jedem Intervalle $0 < \sigma \leqslant x \leqslant \tau < \infty$ (σ, τ — beliebig) im Sinne Riemanns integrierbare Funktion und $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots$ eine im Sinne Polyas (s. [1], [2]) reguläre Folge, die $N(r)$ zur Anzahlfunktion und λ zum Konvergenzexponenten hat.

In der Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung (1) gebracht. Der Fall, wenn die Funktion $f(x)$ in den Umgebungen des Nullpunktes und des unendlich entfernten Punktes monoton ist, wird speziell untersucht. In diesem Falle sind in der Umgebung des Nullpunktes (aber nicht des unendlich entfernten Punktes!) keine weiteren Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung (1) erforderlich.