I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

О ФУНКЦИЯХ, n-я РАЗДЕЛЕННАЯ РАЗНОСТЬ КОТОРЫХ НЕ РАВНА НУЛЮ

Э. КИРЬЯЦКИЙ

Однолистную в области D функцию $f(z)$ можно определить как функцию, для которой первая разделенная разность (см. [1])

$$[z_0 z_1]_f = \frac{f(z_0)-f(z_1)}{z_0-z_1}$$

не равна нулю при z_0, $z_1 \in D$ и $z_0 \neq z_1$.

Введем *класс $K_n(D)$ однозначных регулярных функций, для которых n — я разделенная разность $[z_0, z_1 \ldots z_n]$ не равна нулю при попарно различных z_0, $z_1 \ldots z_n \in D$.* В частности, класс $K_1(D)$ будет классом однолистных в области D функций.

Заметим, что n-я разделенная разность может быть представлена в виде отношения определителей $n+1$-го порядка:

$$[z_0 z_1 \ldots z_n] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \ldots & z_0^{n-1} & f(z_0) \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} & f(z_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} & f(z_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \ldots & z_0^{n-1} & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} & z_n^n \end{vmatrix}}.$$

Знаменателем этого отношения является определитель Вандермонда и поэтому он не равен нулю при попарно различных $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Согласно определения, функция $f(z)$ будет принадлежать классу $K_n(D)$ тогда и только тогда, когда детерминант, стоящий в числителе, не равен нулю при попарно различных $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

Отличие от нуля данного определителя в свою очередь означает, что функции $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}, f(z)$ образуют так называемую систему Чебышева ([2] глава 2).

Таким образом, для того, чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $K_n(D)$, необходимо и достаточно, чтобы функции $1, z, z^2, \ldots z^{n-1}, f(z)$ образовали систему Чебышева.

В этой работе распространяются несколько хорошо известных теорем об однолистных функциях на классы $K_n(D)$.

I. Как известно, производная однолистной в области D функции $f(z)$ не равна нулю в этой области. Другими словами, если первая разделенная разность $[z_0z_1]\neq 0$ при различных z_0, $z_1 \in D$, то она не равна нулю при любых, может быть и равных, значениях аргументов z_0, $z_1 \in D$.

Для классов $K_n(D)$ справедлива:

Теорема 1. *Если $f(z)\in K_n(D)$, то $[z_0z_1\ldots z_n]\neq 0$ при любых (среди которых могут быть и равные) значениях $z_0z_1\ldots z_n\in D$.*

Доказательство. По условию теоремы

$$[z_0z_1\ldots z_n]=\frac{[z_0z_1\ldots z_{n-1}]-[z_1z_2\ldots z_n]}{z_0-z_n}\neq 0.$$

Отсюда и в силу симметричности разделенной разности, имеем

$$[z_0z_1\ldots z_{n-1}]\neq[z_nz_1\ldots z_{n-1}].$$

Рассматривая разделенную разность $[zz_1\ldots z_{n-1}]$ как функцию от z, мы из последнего неравенства убеждаемся в ее однолитности в области D, из которой исключены точки $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$. Но тогда легко показать, что наша функция будет однолистной и во всей области D.

Производная однолистной функции не равна нулю. В частности,

$$\left.\frac{\partial[zz_1\ldots z_{n-1}]}{\partial z}\right|_{z=z_0}\neq 0,\quad z_0\in D.$$

но

$$\left.\frac{\partial[zz_1\ldots z_{n-1}]}{\partial z}\right|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{[zz_1\ldots z_{n-1}]-[z_0z_1\ldots z_{n-1}]}{z-z_0}=$$

$$=\lim_{z\to z_0}[zz_1\ldots z_{n-1}z_0]=[z_0z_0z_1\ldots z_{n-1}].$$

Мы доказали, что выражение $[z_0z_1\ldots z_n]$ не равно нулю при двух совпадающих аргументах ($z_0=z_n$).

Применяя индукцию и действуя так же, как и выше, мы получим утверждение теоремы.

Следствие 1. *Если $f(z)\in K_n(D)$, то $f^{(n)}(z)\neq 0$, $z\in D$.*

Действительно, $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}=[\underbrace{zz\ldots z}_{n+1\text{ раз}}]\neq 0$, $z\in D$.

Следствие 2. *Для того, чтобы $f(z)\in K_n(D)$, необходимо и достаточно чтобы $n-1$-я разделенная разность $[z_0z_1\ldots z_{n-1}]$ была однолистной в области D функцией от каждого аргумента при фиксированных остальных.*

II. Докажем теорему, аналогичную теореме о равномерно сходящейся последовательности однолистных функций.

Теорема 2. *Если $f_n(z)\in K_m(D)$ и $f_n(z)\to f(z)$ равномерно в D, то функция $f(z)$ либо принадлежит классу $K_m(D)$, либо есть многочлен степени $m-1$.*

Доказательство. Установим сначала, что $[zz_1]_{f_n}\to[zz_1]_f$ равномерно в области D. Возьмем внутри области круг u радиуса r с центром в точке z_1 и обозначим через D_u область D, из которой исключен круг u. Очевидно, что в области D_u и на границе круга u последовательность $[zz_1]_{f_n}$ равномерно стремится к $[zz_1]_f$. Так как функции $[zz_1]_{f_n}$ регулярны в круге u, то из равномерной сходимости последовательности функции $\{[zz_1]_{f_n}\}$ на границе круга следует ее равномерная сходимость внутри круга u. Методом индукции докажем, что $[zz_1 \ldots z_{m-1}]_{f_n} \to [zz_1 \ldots z_{m-1}]_f$ равномерно в D.

По следствию 2 теоремы I и теореме о пределе равномерно сходящейся последовательности однолистных функций, получаем, что функция $[zz_1 \ldots z_{m-1}]$ есть либо однолистная в области D, либо постоянная. В первом случае

$$[zz_1 \ldots z_{m-1}z_m]_f \neq 0 \quad \text{и} \quad f(z) \in K_m(D).$$

Во втором случае $[z_0z_1 \ldots z_{m-1}z_m]_f \equiv 0$ и функция $f(z)$ есть многочлен степени $m-1$.

III. Как известно, однолистная в области D функция может иметь в этой области не более одной изолированной особой точки, а именно простого полюса.

Рассмотрим теперь особые точки функций из класса $K_n(D)$, где область D не содержит бесконечно удалённую точку. Пусть $\{\xi_1\xi_2 \ldots \xi_p \ldots\}$ — некоторая последовательность точек области D не имеющая предельных внутри D. Через $D\{\xi_1\xi_2 \ldots \xi_p \ldots\}$ обозначим область D, из которой исключены все точки $\xi_1\xi_2 \ldots \xi_p \ldots$ нашей последовательности.

Теорема 3. *Если $f(z) \in K_n[D(\xi_1\xi_2 \ldots \xi_p \ldots)]$, то возможны два случая;*

1. *функция $f(z)$ регулярна в области D и $f(z) \in K_n(D)$,*

2. *функция $f(z)$ имеет в области D единственный простой полюс, скажем в точке z_0 и $f(z) \in K_n[D(z_0)]$.*

Доказательство. Класс конечнолистных функций не имеет существенно особых точек, поэтому функция $f(z) \in K_n(D)$ не имеет существенно особой точки в области D, так как она не более, чем n-листна в этой области. Действительно, если $f(z)$ более чем n-листна, и, например, $f(z_0) = f(z_1) = \ldots = f(z_n)$, то, как легко проверить, $[z_0z_1 \ldots z_n] = 0$ в D, что невозможно.

Далее, полюсы функций

$$\begin{array}{ccc} f(z) & \text{и} & [zz_1], \\ [zz_1] & \text{и} & [zz_1z_2], \\ \vdots & & \vdots \\ [zz_1 \ldots z_{n-2}] & \text{и} & [zz_1 \ldots z_{n-1}], \end{array}$$

где точки $z_1z_2 \ldots z_{n-1}$ взяты отличными от особых точек этих функций, совпадают вместе с их кратностью. Отсюда следует, что полюсы функций $f(z)$ и $[zz_1 \ldots z_{n-1}]$ совпадают вместе с их кратностью. Функция $[zz_1 \ldots z_{n-1}]$ однолистна в $D(\xi_1\xi_2 \ldots \xi_p \ldots)$. Нетрудно убедитья, что такая функция будет однолистной и в области D с возможным простым полюсом в некоторой точке z_0, откуда, в свою очередь будет следовать, что функция $f(z)$ может иметь в области D лишь единственный простой полюс в точке z_0 и $f(z) \in K_n[D(z_0)]$.

Замечание. Опираясь на теорему 3, *расширим класс $K_n(D)$, присоединив к нему также функции, имеющие возможно один простой полюс в области D.*

IV. Хорошо исвестно, что каждая аналитическая функция, однолистная в конечной плоскости π, должна быть дробнолинейной, т.е.

$$f(z) = \frac{cz+d}{\alpha z+\beta}, \quad z \in \pi,$$

α, β, c, d — некоторые комплексные постоянные. В частности, если $\alpha=0$, то $f(z)$ будет целой линейной функцией. Здесь мы установим вид функций, принадлежащих классу $K_n(\pi)$.

Прежде установим следуюшее предложение: Если $f(z)\in K_n(D)$, то и

$$f(z)+P_k(z)\in K_n(D), \qquad k<n, \tag{1}$$

где $P_k(z)$ — многочлен k-й степени со старшим коэффициентом, не равным нулю.

В самом деле:

$$[z_0z_1\dots z_n]_{f+p_k}=[z_0z_1\dots z_n]_f+[z_0z_1\dots z_n]_{p_k}=[z_0z_1\dots z_n]_f\neq 0.$$

Теорема 4. *Если $f(z)\in K_n(\pi)$, то*

$$f(z)=\frac{P_k(z)}{\alpha z+\beta}, \tag{2}$$

где $P_k(z)$ — многчлен k-й степени, а $k\leqslant n$, если $\alpha\neq 0$, и

$$k=n, \quad \text{если} \quad \alpha=0.$$

Обратно: всякая функция указанного виба принадлежит классу $K_n(\pi)$.

Доказательство. Вследствие однолистности функции $[zz_1\dots z_{n-1}]$ в конечной плоскости π, где $z_1, z_2\dots z_{n-1}$ взяты отличными от ее полюса, имеем:

$$[zz_1\dots z_{n-1}]=\frac{[zz_1\dots z_{n-2}]-[z_1z_2\dots z_{n-1}]}{z-z_{n-1}}=\frac{cz+d}{\alpha z+\beta}.$$

Пусть $\alpha\neq 0$. Из последнего равенства определим выражение для функции $[zz_1\dots z_{n-2}]$.

$$[zz_1\dots z_{n-2}]=\frac{[zz_1\dots z_{n-3}]-[z_1z_2\dots z_{n-2}]}{z-z_{n-2}}=\frac{P_k(z)}{\alpha z+\beta}, \qquad k\leqslant 2.$$

Продолжая аналогичным образом, найдем выражение для функции $f(z)$

$$f(z)=\frac{P_k(z)}{\alpha z+\beta}, \qquad k\leqslant n.$$

Если $\alpha=0$, то, как видно из предыдущего, $f(z)=P_n(z)$, где $P_n(z)$ — многочлен n-й степени со старшим коэффициентом, не равным нулю.

Докажем теперь, что всякая функция вида (2) принадлежит классу $K_n(\pi)$. Для $\alpha=0$ и $k=n$. Это очевидно.

Пусть теперь $\alpha\neq 0$ и $k\leqslant n$. Функцию $f(z)$ можно представить в следующем виде

$$f(z)=h\cdot\frac{1}{z+p}+P_{k-1}(z), \qquad h \text{ и } p \text{ — некоторые постоянные.}$$

Пользуясь предложением (1), установленным перед теоремой, получим:

$$[z_0z_1\dots z_n]_f=[z_0z_1\dots z_n]_{h\cdot\frac{1}{z+p}}+[z_0z_1\dots z_n]_{p_{k-1}}=h\cdot[z_0z_1\dots z_n]_{\frac{1}{z+p}},$$

и задача сводится к доказательству того, что

$$[z_0z_1\dots z_n]_{\frac{1}{z+p}}\neq 0, \qquad z\in\pi.$$

Для $n=1$ утверждение справедливо, и в этом случае

$$[z_0z_1]_{\frac{1}{z+p}}=\frac{\frac{1}{z_0+p}-\frac{1}{z_1+p}}{z_0-z_1}=\frac{-1}{(z_0+p)(z_1+p)}\neq 0.$$

Применяя метод математической индукции, легко получить, что

$$[z_0 z_1 \dots z_n]_{\frac{1}{z+p}} = \frac{(-1)^n}{(z_0+p)(z_1+p)\dots(z_n+p)} \neq 0, \qquad z \in \pi.$$

V. Укажем одно достаточное условие для того, чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $K_n(E)$, где E — круг $|z| < 1$.

Теорема 5. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^n |a_{n+k}| \leqslant 1, \tag{3}$$

то функция $f(z) = z^n + a_{n+1}, \ z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots$ *принадлежит классу* $K_n(E)$ *(E — единичный круг), причем правую часть неравенства* (3) *нельзя увеличить.*

Доказательство. Воспользуясь аддитивным свойством, разделенной разности, получим

$$[z_0 z_1 \dots z_n]_{f(z)} = [z_0 z_1 \dots z_n]_{z^n} + a_{n+1} [z_0 z_1 \dots z_n]_{z^{n+1}} + \dots .$$

Разделенная разность n-го порядка от z^{n+k} $(k \geqslant 1)$ является однородным многочленом относительно своих аргументов степени k с коэффициентами, равными единице ([2] стр. 105—109). Число членов такого многочлена будет равно C_{n+k}^n (см. [3] отд. I, зад. 13). Тогда при $|z_i| < 1$ $(i = 0, 1 \dots n)$

$$\left| [z_0 z_1 \dots z_n \right|_{z^{n+k}} < C_{n+k}^n .$$

Следовательно

$$\left| [z_0 z_1 \dots z_n] \right|_{f(z)} > 1 - C_{n+k}^n \left| a_{n+1} \right| - C_{n+2}^n \left| a_{n+2} \right| - \dots \geqslant 0$$

и $f(z) \in K_n(E)$.

При $n = 1$ получаем известное достаточное условие для однолистности функции $f(z)$ в единичном круге ([4] стр. 241). Пусть теперь

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^n |a_{n+k}| > 1. \tag{4}$$

Покажем, что функция $f(z) = z^n - |a_{n+1}| z^{n+1} - |a_{n+2}| z^{n+2} - \dots$ не принадлежит классу $K_n(E)$.

Рассмотрим n-ю производную нашей функции $f(z)$

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = 1 - C_{n+1}^n |a_{n+1}| z - C_{n+2}^n |a_{n+2}| z^2 - \dots .$$

В точке $z = 0$ функция $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ имеет положительное значение, равное единице. Из условия (4) следует, что для действительных значений z, достаточно близких к единице,

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} < 0.$$

Значит существует такое значение z, где $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ равно нулю и поэтому $f(z) \notin K_n(E)$.

VI. В теории однолистных функций рядом замечательных свойств обладает однолистная функция $f(z) = z(1-z)^{-2}$ (см. [5] гл. XIII).

Для нее справедлива следующая

теорема 6. *Функция $f(z)=z(1-z)^{-2}$ принадлежит в единичном круге E всем классам $K_n(E)$, $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Покажем, что разделенную разность нашей функции можно представить в следующем виде:

$$[z_0 z_1 \dots z_n] = \frac{\dfrac{1}{z_0-1}+\dfrac{1}{z_1-1}+\dots+\dfrac{1}{z_n-1}+1}{(-1)^n (z_0-1)(z_1-1)\dots(z_n-1)}. \tag{5}$$

Действительно

$$[z_0] = f(z_0) = \frac{z_0}{(z_0-1)^2} = \frac{\dfrac{1}{z_0-1}+1}{z_0-1}.$$

Пусть для некоторого фиксированного n равенство (5) справедливо. Найдем разделенную разность $n+1$-го порядка:

$$[z_0 z_1 \dots z_n z_{n+1}] = \frac{[z_0 z_1 \dots z_n]-[z_1 z_2 \dots z_{n+1}]}{z_0-z_{n+1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{1}{z_0-1}+\dfrac{1}{z_1-1}+\dots+\dfrac{1}{z_n-1}+1}{(-1)^n (z_0-1)(z_1-1)\dots(z_n-1)} - \dfrac{\dfrac{1}{z_1-1}+\dfrac{1}{z_2-1}+\dots+\dfrac{1}{z_{n-1}-1}+1}{(-1)^n (z_1-1)(z_2-1)\dots(z_{n+1}-1)}}{z_0-z_{n+1}} =$$

$$= \frac{(z_{n+1}-1)\left(\dfrac{1}{z_0-1}+\dfrac{1}{z_1-1}+\dots+\dfrac{1}{z_n-1}+1\right)-(z_0-1)\left(\dfrac{1}{z_1-1}+\dfrac{1}{z_2-1}+\dots+\dfrac{1}{z_n-1}+\dfrac{1}{z_{n+1}-1}+1\right)}{(-1)^n (z_0-z_{n+1})(z_0-1)(z_1-1)\dots(z_n-1)(z_{n+1}-1)} =$$

$$= \frac{\dfrac{z_{n+1}-1}{z_0-1}-\dfrac{z_0-1}{z_{n+1}-1}+(z_{n+1}-z_0)\left(\dfrac{1}{z_1-1}+\dfrac{1}{z_2-1}+\dots+\dfrac{1}{z_n-1}+1\right)}{(-1)^n (z_0+z_{n+1})(z_0-1)(z_1-1)\dots(z_{n+1}-1)} =$$

$$= \frac{(z_{n+1}-z_0)\left(\dfrac{1}{z_0+1}+\dfrac{1}{z_{n+1}-1}\right)+(z_{n+1}-z_0)\left(\dfrac{1}{z_1-1}+\dfrac{1}{z_2-1}+\dots+\dfrac{1}{z_n-1}+1\right)}{(-1)^n (z_0-z_{n+1})(z_0-1)(z_1-1)\dots(z_{n+1}-1)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{z_0-1}+\dfrac{1}{z_1-1}+\dots+\dfrac{1}{z_n-1}+\dfrac{1}{z_{n+1}-1}+1}{(-1)^{n+1}(z_0-1)(z_1-1)\dots(z_{n+1}-1)}.$$

Таким образом, равенство (5) доказано для всех $n=0, 1 \dots$.

Далее, функция $\omega=(z-1)^{-1}$ отображает круг $|z|<1$ на полуплоскость $Re\{\omega\} \leqslant -\frac{1}{2}$. Тогда, очевидно, в единичном круге

$$Re\left\{\frac{1}{z_0-1}+\frac{1}{z_1-1}+\dots+\frac{1}{z_n-1}+1\right\}<0, \qquad n \geqslant 1, \text{ при } |z_i|<1, \tag{6}$$

откуда следует, что $[z_0 z_1 \dots z_n] \neq 0$ и функция $z(1-z)^{-2} \in K_n(E)$, $n \geqslant 1$.

Замечание. Неравенство (6) будет также выполняться, если точки $z_0, z_1 \dots z_n$ находятся внутри круга $\left|z-\frac{1-n}{2}\right|<\frac{1+n}{2}$. Обозначим его через P_n.

Действительно, функция $\omega = \frac{1}{z-1}$ отображает этот круг на полуплоскость $Re\{\omega\} < \frac{-1}{n+1}$, и тогда

$$Re\left\{\frac{1}{z_0-1} + \frac{1}{z_1-1} + \ldots + \frac{1}{z_n-1} + 1\right\} < 0.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что функция принадлежит классу $K_n(P_n)$.

Поступила в редакцию
19. III. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, М.—Л., х 1952.
2. И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы Вычислений, т. 1, Ф. М., М., 1959.
3. Г. Полиа и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, М., Гостехиздат, 1956.
4. Е. Титчмарш. Теория функций, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
5. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного, Гостехиздат, М., 1954.

FUNKCIJOS, KURIŲ n-TOS EILĖS PADALYTAS SKIRTUMAS NĖRA LYGUS NULIUI

E. KIRJACKIS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjama funkcijų klasė $K_n(D)$, kuriai priklauso analizinės srityje D funkcijos, patenkinančios sąlygą $[z_0 z_1 \ldots z_n] \neq 0$, $z_k \in D$ ($[z_0 z_1 \ldots z_n]$ yra n-tos eilės padalytas skirtumas).

ÜBER FUNKTIONEN, DIE KEINE NULLGLEICHE DIVIDIERTE DIFFERENZ n-TER ORDNUNG BESITZEN

E. KIRJATSKY

(Zusammenfassung)

Eine im Bereiche D schlichte Funktion kann man dadurch definieren, dass die dividierte Differenz erster Ordnung $[z_1 z_2]$, $z_1 \neq z_2$, dieser Funktion im Bereiche D nicht gleich Null ist. Es sei $K_n(D)$ die Klasse der im Bereiche D regulären und eindeutigen Funktionen, deren dividierte Differenz n-ter Ordnung $[z_0 z_1 \ldots z_n]$, $z_i \neq z_j$, $z_i \in D$, nicht gleich Null ist. Die Klasse $K_1(D)$ ist mit der Klasse der im Bereiche D schlichten Funktionen identisch.

In der Arbeit werden einige gut bekannte Sätze über die Klasse $K_1(D)$ auf die Klassen $K_n(D)$, $n > 1$, übertragen.