I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

О ПЕРИОДИЧНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. ГОЛОКВОСЧЮС

В предлагаемой статье матричным методом исследуется условие периодичности фундаментальной системы решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

§ 1. Рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt} = X\left[U_0\varphi_0(t) + U_1\varphi_1(t) + U_0U_1\varphi_2(t) + U_1U_0\varphi_3(t)\right], \tag{1}$$

где $U_k (k=0,\ 1)$ — матрицы второго порядка с определителями, равными нулю, т. е.

$$D(U_k) = 0 \qquad (k=0,\ 1), \tag{2}$$

$\varphi_k(t)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ — непрерывные периодические функции периода $\omega = 1$, обладающие свойством

$$\int\limits_0^1 \varphi_k(t)\,dt = 0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{3}$$

X — интегральная матрица второго порядка, образованная фундаментальной системой решений.

Пусть σ_k — след матрицы U_k, а σ_{01} — след произведения U_0U_1. Пусть, далее, выполнено тождество

$$\varphi_0(t) + \sigma_1\varphi_3(t) = 0. \tag{4}$$

Тогда, согласно [1], нормированная в точке $t=0$ интегральная матрица $X(t)$ системы имеет структуру[1]

$$X(t) = -\frac{1}{D(U_0+U_1)}\left[\omega_0(t)\,U_0 + \omega_1(t)\,U_1 + \omega_2(t)\,U_0U_1 + \omega_3(t)\,U_1U_0\right], \tag{5}$$

где

$$D(U_0+U_1) = \sigma_0\sigma_1 - \sigma_{01} \neq 0, \tag{6}$$

$$\omega_0(t) = -\sigma_1\exp\left[\sigma_0L_0(t) + \sigma_{01}L_3(t)\right],$$

$$\omega_3(t) = \exp\left[\sigma_0L_0(t) + \sigma_{01}L_3(t)\right],$$

$$\omega_1(t) = \left[-\sigma_0 + \sigma_{01}I(t)\right]\exp\left[\sigma_1L_1(t) + \sigma_{01}L_2(t)\right],$$

$$\omega_2(t) = \left[1 - \sigma_1I(t)\right]\exp\left[\sigma_1L_1(t) + \sigma_{01}L_2(t)\right].$$

[1] В работе Г. Ф. Федорова функции $\varphi_k(t)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ не обязательно периодические.

Здесь

$$I(t) = \int_0^t e^{\Psi(\tau)} [\varphi_1(\tau) + \sigma_0 \varphi_2(\tau)]\, d\tau,$$

причем

$$\Psi(\tau) = \sigma_0 L_0(\tau) - \sigma_1 L_1(\tau) + \sigma_{01} [L_3(\tau) - L_2(\tau)], \tag{7}$$

а непрерывные функции

$$L_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\tau)\, d\tau \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

обладающие свойством

$$L_k(1) = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{8}$$

являются периодическими с периодом $\omega = 1$.

Учитывая введенные обозначения и условие (8), из формулы (5) интегральную подстановку

$$V = X(1) \tag{9}$$

находим в виде

$$V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \frac{(\sigma_1 U_0 - \sigma_{01}) U_1 I(1)}{D(U_0 + U_1)} \qquad \left(D(U_0 + U_1) \neq 0\right). \tag{10}$$

Следовательно, эта подстановка является единичной матрицей второго порядка, т. е.

$$V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(\sigma_1 U_0 - \sigma_{01}) U_1 I(1) = 0.$$

Таким образом, согласно общей теории, изложенной в работе [2], имеем следующий критерий.

Теорема 1. *Нормированная в точке $t = 0$ интегральная матрица $X(t)$ системы (1) является периодической периода $\omega = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$(\sigma_1 U_0 - \sigma_{01}) U_1 \int_0^1 e^{\Psi(t)} [\varphi_1(t) + \sigma_0 \varphi_2(t)]\, dt = 0, \tag{11}$$

причем непрерывная функция $\Psi(t)$ вида (7) является периодической периода $\omega = 1$.

Примечание 1. Если $D(U_0 + U_1) = 0$, то предыдущий метод интегрирования непригоден.

Тогда в случае выполнения одного из двух условий

$$\varphi_1(t) + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \varphi_0(t) + \sigma_0 [\varphi_2(t) + \varphi_3(t)] = 0,$$

$$\varphi_0(t) + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \varphi_1(t) + \sigma_1 [\varphi_2(t) + \varphi_3(t)] = 0$$

система (1) приводится к системе

$$\frac{dX}{dt} = XP(t)$$

со соответствующей периодической матрицей

$$P(t)=\begin{cases} U_{01}\varphi_0(t)+U_{01}U_1\varphi_2(t)+U_1U_{01}\varphi_3(t) & \left(U_{01}=U_0-\frac{\sigma_0}{\sigma_1}U_1\right), \\ U_{10}\varphi_1(t)+U_0U_{10}\varphi_2(t)+U_{10}U_0\varphi_2(t) & \left(U_{10}=U_1-\frac{\sigma_1}{\sigma_0}U_0\right), \end{cases}$$

коммутирующей со своим интегралом, т. е.

$$P(t)\,.\int_0^t P(\tau)\,d\tau=\int_0^t P(\tau)\,d\tau.\,P(t).$$

Так как нормированную в точке $t=0$ интегральную матрицу $X(t)$ системы (1) находим в виде

$$X(t)=\exp\left[\int_0^t P(\tau)\,d\tau\right],$$

то, следовательно, принимая во внимание условие (3), нетрудно убедиться, что в данном случае она является периодической с периодом $\omega=1$.

Примечание 2. Для случая, когда в системе (1) вместо тождества (4) выполняется тождество

$$\varphi_1(t)+\sigma_0\varphi_2(t)=0,$$

рассматриваемый критерий получается из теоремы 1 заменой индексов 0, 1, 2 и 3 соответственно на 1, 0, 3 и 2.

§. 2 Пусть дана система

$$\frac{dX}{dt}=X\sum_{k=0}^{2}\bar{U}_k\varphi_k(t), \tag{12}$$

в которой дифференциальные подстановки $\bar{U}_k$ $(k=0,\ 1,\ 2)$ — любые матрицы второго порядка; $\varphi_k(t)$ $(k=0,\ 1,\ 2)$ — непрерывные периодические функции периода $\omega=1$, обладающие свойством

$$\int_0^1 \varphi_k(t)\,dt=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2). \tag{13}$$

Обозначим через $\lambda_1^{(k)}$ одно из характеристических чисел матрицы $\bar{U}_k$ и, следуя И. А. Лаппо-Данилевскому [3], введем матрицу X_1 по формуле

$$X=X_1\exp\left[\sum_{k=0}^{2}\lambda_1^{(k)}\int_0^t \varphi_k(\tau)\,d\tau\right].$$

Матрица X_1 удовлетворяет новой системе

$$\frac{dX_1}{dt}=X_1\sum_{k=0}^{2}U_k\varphi_k(t), \tag{14}$$

где

$$U_k=\bar{U}_k-\lambda_1^{(k)} \qquad (k=0,\ 1,\ 2). \tag{15}$$

Предположим, что выполняется тождество

$$\sigma_{01}(\sigma_{01}-\sigma_0\sigma_1)\varphi_0(t)+(\sigma_{01}\sigma_{12}-\sigma_1\sigma_{012})\varphi_2(t)=0, \qquad (16)$$

причем σ_{kl} и σ_{klm} — следы соответствующих произведений U_kU_l и $U_kU_lU_m$.

Пользуясь методом, указанным в работе [1], нормированную в точке $t=0$ интегральную матрицу $X(t)$ системы (12) получаем в виде

$$X(t)=X_2(t)\exp\left[\int_0^t\left(\sigma_2-\frac{\sigma_{012}+\sigma_{102}}{\sigma_{01}}\right)\varphi_2(\tau)\,d\tau\right]\exp\left[\sum_{k=0}^{2}\lambda_1^{(k)}\int_0^t\varphi_k(\tau)\,d\tau\right], \qquad (17)$$

где

$$X_2(t)=\frac{1}{D(U_0+U_1)}\Big\{(\sigma_1-U_1)U_0\exp\left[\frac{\sigma_{102}}{\sigma_{01}}L_2(t)\right]+$$
$$+[(\sigma_0-U_0)+(\sigma_1U_0-\sigma_{01})I(t)]\,U_1\exp Q(t)\Big\}.$$

Здесь непрерывная периодическая функция $Q(t)$ с периодом $\omega=1$ определяется равенством

$$Q(t)=\sigma_1L_1(t)+\frac{1}{c}(a\sigma_1+\sigma_{01}\sigma_{012})L_2(t),$$

причем

$$a=\sigma_{01}\sigma_{02}-\sigma_0(\sigma_{012}+\sigma_{102}),\quad c=\sigma_{01}(\sigma_{01}-\sigma_0\sigma_1)\neq 0, \qquad (18)$$

$$L_k(t)=\int_0^t\varphi_k(\tau)\,d\tau \qquad (k=0,\ 1,\ 2),$$

и обладает свойством

$$Q(1)=0,$$

а функция $I(t)$ имеет вид

$$I(t)=\int_0^t e^{\Psi(\tau)}\left[\varphi_1(\tau)+\frac{a\sigma_0}{c}\varphi_2(\tau)\right]d\tau, \qquad (19)$$

где

$$\Psi(\tau)=-\sigma_1\left[L_1(\tau)+\frac{1}{c}(\sigma_{01}\sigma_{02}-\sigma_0\sigma_{012})L_2(\tau)\right] \qquad (20)$$

— непрерывная периодическая функция периода $\omega=1$.

Учитывая введенные обозначения и условие (13), из формулы (17) интегральную подстановку (9) получаем в виде (10), причем интеграл $I(1)$ определяется формулой (19) при $t=1$.

На основании рассуждений аналогичных приведенным в § 1 относительно интегральной подстановки (10), в данном случае получаем следующий критерий.

Теорема 2. *Интегральная матрица системы* (14), *следовательно, и системы* (12), *является периодической периода* $\omega=1$ *тогда и только тогда, когда имеет место условие*

$$(\sigma_1U_0-\sigma_{01})U_1\int_0^1 e^{\Psi(t)}\left[\varphi_1(t)+\frac{a\sigma_0}{c}\varphi_2(t)\right]dt=0, \qquad (21)$$

где постоянные величины a, c *и непрерывная периодическая с периодом* $\omega=1$ *функция* $\Psi(t)$ *определяются соответственно формулами* (18) *и* (20).

Примечание 3. Для случая, когда вместо тождества (16) выполнено одно из двух следующих тождеств

$$\sigma_{01}(\sigma_{01}-\sigma_0\sigma_1)\varphi_1(t)+(\sigma_{01}\sigma_{02}-\sigma_0\sigma_{102})\varphi_2(t)=0,$$

$$\sigma_{12}(\sigma_{12}-\sigma_1\sigma_2)\varphi_1(t)+(\sigma_{12}\sigma_{02}-\sigma_2\sigma_{012})\varphi_0(t)=0,$$

соответствующий критерий существования периодической интегральной матрицы системы (12) получается из теоремы 2 заменой соответственно индексов 0, 1 и 2 на 1, 0 и 2 и на 1, 2 и 0.

Случаи, когда все σ_k равны нулю, исследованы в работе [4].

§ 3. Рассмотрим один частный случай системы (1), который иллюстрирует полученные результаты

Пусть в системе (1) матрицы U_0 и U_1 имеют вид

$$U_0=\begin{Vmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{Vmatrix}, \quad U_1=\begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{22}$$

а их элементы a_1, b_0, c_1 и d_0 связаны существенным для данного способа интегрирования системы условием

$$\sigma_0\sigma_1-\sigma_{01}=a_1d_0-b_0c_1\neq 0. \tag{23}$$

Пусть, далее, в указанной системе функции $\varphi_k(t)$ определяются формулами:

$$\varphi_0(t)=-\sigma_1\cos 2\pi t, \quad \varphi_1(t)=\sin 2\pi t, \quad \varphi_2(t)=\varphi_3(t)=\cos 2\pi t. \tag{24}$$

Тогда условия (2), (3), (4) и (6) выполнены. Следовательно, согласно формам (22), (23) и (24), выражение, стоящее в левой части равенства (11), имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ c_1(a_1d_0-b_0c_1) & 0 \end{Vmatrix} I(1),$$

причем

$$I(1)=\exp\left(-\frac{a_1^2}{2\pi}\right)\int\limits_0^1 \exp\left[\frac{a_1}{2\pi}(\cos 2\pi t-a_1\sin 2\pi t)\right](\sin 2\pi t+d_0\cos 2\pi t)\,dt. \tag{25}$$

Если по крайней мере выполняется одно из двух условий

$$1)\ c_1=0, \quad 2)\ I(1)=0,$$

то, в силу теоремы 1, в рассматриваемом случае нормированная в точке $t=0$ интегральная матрица $X(t)$ системы (1) является периодической периода $\omega=1$.

Интеграл (25) представляется в виде

$$I(1)=\frac{d_0-a_1}{\sqrt{1+a_1^2}}\exp\left(-\frac{a_1}{2\pi}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,\Gamma(\nu+2)}\left(\frac{a_1\sqrt{1+a_1^2}}{4\pi}\right)^{2\nu+1}, \tag{26}$$

или

$$I(1)=\frac{(a_1-d_0)\,i}{\sqrt{1+a_1^2}}\exp\left(-\frac{a_1}{2\pi}\right)J_1(z) \qquad (a_1\neq\pm i), \tag{27}$$

где через J_1 обозначена функция Бесселя, причем

$$z=\frac{ia_1\sqrt{1+a_1^2}}{2\pi} \qquad (i=\sqrt{-1}). \tag{28}$$

Согласно теореме 1 и формулам (26) и (27), в данном случае при $c_1 \neq 0$ и $a_1 \neq d_0$ имеем следующий результат.

Теорема 3. *В точке $t=0$ нормированная интегральная матрица $X(t)$ системы* (1) *является периодической периода $\omega=1$ тогда и только тогда, когда число z, определяемое равенством* (28), *является нулем бесселевой функции $J_1(z)$.*

На основании формулы (26) нетрудно увидеть, что если $a_1 = \pm i$, то интегральная матрица данной системы является периодической периода $\omega = 1$.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 27. V. 1959 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Федоров. Изв. ВУЗ, Математика, 1958, № 3, 217.
2. Н. П. Еругин. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений, изд. Ленинградского у-та, 1956.
3. И. А. Лаппо-Данилевский. Применение функций от матриц к теории линей ных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М., 1957.
4. П. Б. Голоквосчюс. Уч. зап. Вильнюсского гос. у-та, сер. матем. и физ., 1960, 9,5—13.

KAI KURIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ INTEGRALINĖS MATRICOS PERIODIŠKUMAS

P. GOLOKVOSČIUS

(Rezium ė)

1. Tegu duota sistema

$$\frac{dX}{dt} = X\left[U_0 \varphi_0(t) + U_1 \varphi_1(t) + U_0 U_1 \varphi_2(t) + U_1 U_0 \varphi_3(t)\right], \tag{1}$$

kur U_k $(k=0, 1)$ — antros eilės matricos, kurių determinantai yra lygūs nuliui, o determinantas $D(U_0+U_1) \neq 0$. Be to, tegu tolydinės funkcijos $\varphi_k(t)\,(k=0, 1, 2, 3)$ yra periodinės su periodu $\omega=1$ ir galioja sąlygos:

$$\int_0^1 \varphi_k(t)\,dt = 0 \quad (k=0, 1, 2, 3), \quad \varphi_0(t) + \sigma_1 \varphi_3(t) = 0,$$

kur σ_1 — matricos U_1 pėdsakas.

1 teorema. *Taške $t=0$ normuota sistemos* (1) *integralinė matrica $X(t)$ yra periodinė su periodu $\omega=1$ tada ir tik tada, kada galioja sąlyga*

$$(\sigma_1 U_0 - \sigma_{01})\, U_1 \int_0^1 e^{\Psi(t)} \left[\varphi_1(t) + \sigma_0 \varphi_2(t)\right] dt = 0,$$

kur funkcija

$$\Psi(t) = \sigma_0 \int_0^t \varphi_0(\tau)\,d\tau - \sigma_1 \int_0^t \varphi_1(\tau)\,d\tau + \sigma_{01} \int_0^t \left[\varphi_3(\tau) - \varphi_2(\tau)\right] d\tau$$

yra tolydinė su periodu $\omega=1$, o σ_{01} — sandaugos $U_0 U_1$ pėdsakas.

2. Tegu duota sistema

$$\frac{dX}{dt} = X \sum_{k=0}^{2} \bar{U}_k \varphi_k(t), \tag{2}$$

kur $\bar{U}_k$ $(k=0, 1, 2)$ — bet kurios antros eilės pastovios matricos; $\varphi_k(t)$ $(k=0, 1, 2)$ — tolydinės su periodu $\omega=1$ funkcijos, kurios patenkina sąlygą

$$\int_0^1 \varphi_k(t)\,dt = 0 \qquad (k=0, 1, 2).$$

Leiskime, kad $\lambda_1^{(k)}$ yra matricos $\bar{U}_k$ charakteringasis skaičius, o matrica U_k apibrėžiama lygybe

$$U_k = \bar{U}_k - \lambda_1^{(k)} \qquad (k=0, 1, 2).$$

Be to, tegu galioja tapatybė

$$\sigma_{01}(\sigma_{01} - \sigma_0\sigma_1)\varphi_0(t) + (\sigma_{01}\sigma_{12} - \sigma_1\sigma_{012})\varphi_2(t) = 0,$$

kur σ_{kl} ir σ_{klm} — pėdsakai atitinkamų sandaugų $U_k U_l$ ir $U_k U_l U_m$.

2 teorema. *Taške* $t=0$ *normuota sistemos* (1) *integralinė matrica* $X(t)$ *yra periodinė su periodu* $\omega=1$ *tada ir tik tada, kada galioja sąlyga*

$$(\sigma_1 U_0 - \sigma_{01}) U_1 \int_0^1 e^{\Psi(t)} \left\{ \varphi_1(t) + \frac{[\sigma_{01}\sigma_{02} - \sigma_0(\sigma_{012} + \sigma_{102})]\sigma_0}{\sigma_{01}(\sigma_{01} - \sigma_0\sigma_1)} \varphi_2(t) \right\} dt = 0$$

$$(\sigma_{01} \neq 0, \quad \sigma_{01} - \sigma_0\sigma_1 \neq 0),$$

kur funkcija

$$\Psi(t) = -\sigma_1 \left[\int_0^t \varphi_1(\tau)\,d\tau + \frac{\sigma_{01}\sigma_{02} - \sigma_0\sigma_{012}}{\sigma_1(\sigma_{01} - \sigma_0\sigma_1)} \int_0^t \varphi_2(\tau)\,d\tau \right]$$

yra tolydinė ir periodinė su periodu $\omega=1$.

SUR LES MATRICES INTÉGRALES PÉRIODIQUES POUR QUELQUES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

P. GOLOKVOSČIUS

(Résumé)

Soient donnés les systèmes d'équations différentielles (1) et (12), où U_k et $\bar{U}_k$ sont des matrices constantes du second degré, les fonctions $\varphi_k(t)$ $(k=0, 1, 2, 3)$ sont continues en la variable indépendante réelle t, admettant la période commune $\omega=1$, et X est une matrice intégrale. Supposons que les matrices U_k, $\bar{U}_k$ et les fonctions $\varphi_k(t)$ $(k=0, 1, 2, 3)$ satisfont aux conditions (2), (3), (4), (13), (15), (16) respectivement.

A l'aide de la substitution intégrale (9) nous démontrons que dans les conditions (11) et (21) respectivement les matrices intégrales des systèmes (1) et (12) sont périodiques. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la substitution intégrale (10) forme la matrice unité.

Dans le § 3 de cet article nous étudions le système (1), où les matrices U_0, U_1 et es fonctions $\varphi_k(t)$ $(k=0, 1, 2, 3)$ sont données par les formules (22) et (24) respectivement. Pour que la matrice intégrale de ce système soit périodique, admettant le période $\omega=1$, il faut et il suffit que le nombre (28) soit une racine de fonction de Bessel $J_1(z)$.
