I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

ОТЫСКАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. ГОЛОКВОСЧЮС

§ 1. Нахождение интегральной матрицы

Дана линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XQ(t, \mu), \tag{1}$$

где вещественная матрица 2-го порядка

$$Q(t, \mu) = Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t)\mu^k, \tag{2}$$

матрица Q_0 — постоянная, матрицы $Q_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — непрерывные периодические с периодом $\omega = 1$, μ — численный вещественный параметр и X — интегральная матрица системы.

Предположим, что ряд (2) сходится при $|\mu| < r$, а характеристические числа ξ_1 и ξ_2 матрицы Q_0 обладают свойством

$$\xi_1 - \xi_2 \neq 2\pi m i \qquad (m \text{ — целое})^1. \tag{3}$$

Преобразуем систему (1) в другую систему с помощью формулы

$$Y = XS \qquad \big(D(S) \neq 0\big), \tag{4}$$

где Y — новая неизвестная матрица и S — постоянная матрица преобразования, приводящая Q_0 к каноническому виду.

Получим уравнение

$$\frac{dY}{dt} = YP(t, \mu), \tag{5}$$

в котором

$$P(t, \mu) = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\mu^k; \tag{6}$$

$$P_0 = S^{-1}Q_0S. \qquad P_k(t) = S^{-1}Q_k(t)\,S = \left\|p_{\sigma\nu}^{(k)}\right\| \quad (\sigma, \nu = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

[1] Если условие (3) не выполнено, то матрицу X можно преобразовать так, чтобы ξ_1, ξ_2 уже удовлетворяли такому условию [1, стр. 10].

На основании [1] решение $Y(t, \mu)$ системы (5) ищем в виде

$$Y(t, \mu) = \exp\Big(A(\mu)t\Big)z(t, \mu) \qquad \Big(z(0, \mu) = I\Big), \tag{8}$$

причём матрица $A(\mu)$ и периодическая с периодом $\omega = 1$ матрица $z(t, \mu)$ разлагаются соответственно в сходящиеся ряды:

$$A(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^k, \tag{9}$$

$$z(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \mu^k. \tag{10}$$

Ряд (9) сходится в области $|\mu| < R < r$. Инварианты матрицы $A(\mu)$ также голоморфные функции по крайней мере в области $|\mu| < R < r$, где дискриминант характеристического уравнения этой матрицы отличен от нуля (при $\mu \neq 0$) [1, стр. 83—88].

При $\mu \to 0$ система (5) переходит в систему

$$\frac{dY_0(t)}{dt} = Y_0(t) P_0, \tag{11}$$

интегрируемую в квадратурах. Её интегральная нормированная в точке $t = 0$ матрица $Y_0(t)$, представляемая в виде

$$Y_0(t) = \exp(A_0 t) z_0(t), \tag{12}$$

имеет структуру

$$Y_0(t) = \exp(P_0 t). \tag{13}$$

Отсюда, учитывая (3) и (12), следует, что

$$A_0 = P_0, \qquad z_0 = I, \tag{14}$$

где I — единичная матрица 2-го порядка. При $\mu \to 0$ матрицы (9) и (10) переходят соответственно в матрицы (14).

Для нахождения рядов (9) и (10) подставим (8) в (5), тогда после сокращения на множитель $\exp\Big(A(\mu)t\Big)$ получим

$$\frac{dz}{dt} = zP - Az.$$

Подставляя сюда (6), (9), (10) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, найдём

$$\frac{dz_0}{dt} = z_0 P_0 - A_0 z_0 = 0 \qquad (z_0 = I,\ A_0 = P_0),$$

$$\frac{dz_1}{dt} = z_1 A_0 - A_0 z_1 + P_1 - A_1, \tag{15}$$

$$\frac{dz_k}{dt} = z_k A_0 - A_0 z_k + \sum_{j=1}^{k-1} (z_{k-j} P_j - A_{k-j} z_j) + P_k - A_k \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{16}$$

Согласно [1, стр. 8], будем искать общее решение $z_k(t)$ систем (15) и (16) в виде

$$z_k(t) = \exp(-A_0 t) c_k(t) \exp(A_0 t), \tag{17}$$

где $c_k(t)$ — дифференцируемая матрица. Подставляя (17) в (16), после сокращений получаем

$$\exp(-A_0 t)\, c_k'(t) \exp(A_0 t) = \sum_{j=1}^{k-1} (z_{k-j}P_j - A_{k-j}z_j) + P_k - A_k,$$

откуда имеем

$$c_k(t) = \int_0^t e^{A_0\tau} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (z_{k-j}P_j - A_{k-j}z_j) + P_k - A_k \right] e^{-A_0\tau}\, d\tau.$$

Подставляя это в (17), находим

$$z_1(t) = e^{-A_0 t} \int_0^t e^{A_0\tau} (P_1 - A_1) e^{-A_0\tau}\, d\tau\, e^{A_0 t}, \qquad (18)$$

$$z_k(t) = e^{-A_0 t} \int_0^t e^{A_0\tau} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (z_{k-j}P_j - A_{k-j}z_j) + P_k - A_k \right] e^{-A_0\tau}\, d\tau \cdot e^{A_0 t} \qquad (19)$$

$$(k = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Подчиняя $z_k(t)$ условию периодичности, мы последовательно и единственным образом найдём A_k и $z_k(t)$. Согласно предыдущему, инварианты $\sigma\big(A(\mu)\big)$ и $D\big(A(\mu)\big)$, построенные на основе ряда (9), будут сходиться при всех $|\mu| < R$. Следовательно, вопрос отыскания характеристических показателей системы (5) сводится к определению вещественных частей корней характеристического уравнения [2, стр. 176—182].

$$\lambda^2 - \sigma\big(A(\mu)\big)\lambda + D\big(A(\mu)\big) = 0. \qquad (20)$$

Принимая во внимание (4) и (8), интегральную матрицу $X(t, \mu)$ системы (1) находим в виде

$$X(t, \mu) = \exp\big(A(\mu)\, t\big)\, z(t, \mu)\, S^{-1}, \qquad (21)$$

откуда следует, что характеристические показатели систем (1) и (5) совпадают.

Таким образом, если в разложениях $\lambda_{1,2}(\mu)$ по целым или дробным степеням μ свободный член или коэффициент при наименьшей степени μ вещественный и неравен нулю, то вопрос об ограниченных решениях системы (5), а следовательно, и системы (1), решается при достаточно малом μ.

Определим разложение характеристических чисел показательной матрицы $A(\mu)$ данной системы по степеням малого параметра μ в ниже следующих случаях.

§ 2. Матрица P_0 имеет комплексные характеристические числа с простыми элементарными делителями

Предположим, что в системе (5) постоянная матрица P_0 имеет вид

$$P_0 = \begin{Vmatrix} \alpha + \beta i, & 0 \\ 0, & \alpha - \beta i \end{Vmatrix} \qquad (\beta \neq \pi m,\ m \text{ — целое}). \qquad (22)$$

Тогда на основании равенств (14) и [3, стр. 21, форм. (1.24)] можно написать

$$e^{\pm A_0 t} = e^{\pm P_0 t} = \begin{Vmatrix} e^{\pm(\alpha+\beta i)t}, & 0 \\ 0, & e^{\pm(\alpha-\beta i)t} \end{Vmatrix}. \tag{23}$$

Учитывая соотношения (7), (23) и обозначая через $a_{\sigma\nu}^{(k)}$ ($\sigma, \nu = 1, 2$) элементы матрицы A_k, из формулы (18) получаем

$$z_1(t) = \begin{Vmatrix} \int\limits_0^t p_{11}^{(1)}(\tau)\,d\tau - a_{11}^{(1)} t, & e^{-2\beta i t}\int\limits_0^t \left(p_{12}^{(1)}(\tau) - a_{12}^{(1)}\right) e^{2\beta i \tau}\,d\tau \\ e^{2\beta i t}\int\limits_0^t \left(p_{21}^{(1)}(\tau) - a_{21}^{(1)}\right) e^{-2\beta i \tau}\,d\tau, & \int\limits_0^t p_{22}^{(1)}(\tau)\,d\tau - a_{22}^{(1)} t \end{Vmatrix}, \tag{24}$$

где $p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)$ ($\sigma, \nu = 1, 2$) — функции периодические с периодом $\omega = 1$.

Так как

$$\int\limits_0^t p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)\,d\tau = a_{\sigma\sigma}^{(1)} t + \varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t) \qquad (\sigma = 1, 2), \qquad a_{\sigma\sigma}^{(1)} = \int\limits_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt, \tag{25}$$

а $\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)$ ($\sigma = 1, 2$) — функции периодические периода $\omega = 1$, то, подчиняя элементы $z_{11}^{(1)}(t)$ и $z_{22}^{(1)}(t)$ матрицы $z_1(t)$ условию периодичности, находим

$$a_{\sigma\sigma}^{(1)} = \int\limits_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt \qquad (\sigma = 1, 2). \tag{26}$$

Теперь выясним, когда остальные элементы матрицы (24) будут периодическими с периодом $\omega = 1$. Для этого рассмотрим предварительно уравнение

$$\left(u(t)\, e^{2\beta i t}\right)' = \left(p(t) - a\right) e^{2\beta i t},$$

где $p(t)$ — непрерывная периодическая функция периода $\omega = 1$, а постоянная a подлежит определению.

Последнее уравнение эквивалентно следующему

$$u' + 2\beta i u = p(t) - a,$$

общий интеграл которого находим в форме

$$u(t) = e^{-2\beta i t}\left[C_1 + \int\limits_0^t \left(p(\tau) - a\right) e^{2\beta i \tau}\,d\tau\right], \tag{27}$$

причём C_1 — произвольное постоянное.

Для того, чтобы решение (27) было периодическим с периодом $\omega = 1$, надо в нём уничтожить член вида $e^{-2\beta i t}$ и выбрать соответствующим образом постоянную a.

Положив $u(0) = u(1) = 0$, получаем

$$C_1 = 0, \qquad a = \frac{2\beta i}{e^{2\beta i} - 1}\int\limits_0^1 p(t)\, e^{2\beta i t}\,dt, \tag{28}$$

а функция (27) примет вид

$$u(t)=e^{-2\beta it}\left[\int_0^t p(\tau)\, e^{2\beta i\tau}\, d\tau-\frac{e^{2\beta it}-1}{e^{2\beta i}-1}\int_0^1 p(t)\, e^{2}\quad dt\right]. \tag{29}$$

Так как

$$\int_0^{t+1} p(\tau)\, e^{2\beta i\tau}\, d\tau=e^{2\beta i}\int_0^t p(\tau)\, e^{2\beta i\tau}\, d\tau+\int_0^1 p(t)\, e^{2\beta it}\, dt,$$

то следовательно, имеем $u(t+1)=u(t)$.

Заметим ещё, что

$$v(t)=e^{2\beta it}\left[C_2+\int_0^t \left(q(\tau)-b\right)e^{-2\beta i\tau}\, d\tau\right]$$

— общее решение уравнения

$$\left(v(t)\, e^{-2\beta it}\right)'=\left(q(t)-b\right)e^{-2\beta it},$$

где непрерывная функция $q(t)$ — периодическая с периодом $\omega=1$ и b — постоянная.

Подчиняя $v(t)$ условию периодичности, находим

$$C_2=0,\qquad b=\frac{2\beta i}{1-e^{-2\beta i}}\int_0^1 q(t)\, e^{-2\beta it}\, dt. \tag{30}$$

При таком выборе C_2 и b, функция $v(t)$ имеет вид

$$v(t)=e^{2\beta it}\left[\int_0^t q(\tau)\, e^{-2\beta i\tau}\, d\tau-\frac{1-e^{-2\beta it}}{1-e^{-2\beta i}}\int_0^1 q(t)\, e^{-2\beta it}\, dt\right] \tag{31}$$

и обладает свойством $v(t+1)=v(t)$, так как

$$\int_0^{t+1} q(\tau)\, e^{-2\beta i\tau}\, d\tau=e^{-2\beta i}\int_0^t q(\tau)\, e^{-2\beta i\tau}\, d\tau+\int_0^1 q(t)\, e^{-2\beta it}\, dt.$$

На основании проведенных рассуждений имеем следующее. Для того, чтобы элементы $z_{12}^{(1)}(t)$ и $z_{21}^{(1)}(t)$ матрицы $z_1(t)$ были периодическими с периодом $\omega=1$, необходимо положить

$$a_{12}^{(1)}=\frac{2\beta i}{e^{2\beta i}-1}\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\, e^{2\beta it}\, dt, \tag{32}$$

$$a_{21}^{(1)}=\frac{2\beta i}{1-e^{-2\beta i}}\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\, e^{-2\beta it}\, dt. \tag{33}$$

В соответствии с формулами (25), (26) и (28) — (33) имеем

$$z_1(t)=\left\|\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\right\|\qquad(\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{34}$$

причём

$$\varphi_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{\sigma\sigma}^{(1)}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 p_{\sigma\sigma}^{(1)}(t)\,dt \qquad (\sigma=1,\ 2), \tag{35}$$

$$\varphi_{12}^{(1)}(t)=e^{-2\beta it}\left[\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)\,e^{2\beta i\tau}\,d\tau-\frac{e^{2\beta it}-1}{e^{2\beta i}-1}\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,e^{2\beta it}\,dt\right], \tag{36}$$

$$\varphi_{21}^{(1)}(t)=e^{2\beta it}\left[\int_0^t p_{21}^{(1)}(\tau)\,e^{-2\beta i\tau}\,d\tau-\frac{1-e^{-2\beta it}}{1-e^{-2\beta i}}\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,e^{-2\beta it}\,dt\right] \tag{37}$$

— функции периодические с периодом $\omega=1$, а $z_1(0)=z_1(1)=0$, $z_1(t+1)=$ $=z_1(t)$.

Из формулы (19) для $k=2$ получаем

$$z_2(t)=e^{-A_0t}\int_0^t e^{A_0\tau}\Big(M(\tau)-A_2\Big)e^{-A_0\tau}\,d\tau\cdot e^{A_0t}; \tag{38}$$

Здесь

$$M(\tau)=z_1(\tau)\,P_1(\tau)-A_1z_1(\tau)+P_2(\tau)=\|m_{\sigma\nu}(\tau)\| \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{39}$$

где

$$m_{11}(\tau)=\Big(p_{11}^{(1)}(\tau)-a_{11}^{(1)}\Big)z_{11}^{(1)}(\tau)+p_{21}^{(1)}(\tau)\,z_{12}^{(1)}(\tau)-a_{12}^{(1)}z_{21}^{(1)}(\tau)+p_{11}^{(2)}(\tau), \tag{40}$$

$$m_{12}(\tau)=p_{12}^{(1)}(\tau)\,z_{11}^{(1)}(\tau)+\Big(p_{22}^{(1)}(\tau)-a_{11}^{(1)}\Big)z_{12}^{(1)}(\tau)-a_{12}^{(1)}z_{22}^{(1)}(\tau)+p_{12}^{(2)}(\tau), \tag{41}$$

$$m_{21}(\tau)=p_{21}^{(1)}(\tau)\,z_{22}^{(1)}(\tau)+\Big(p_{11}^{(1)}(\tau)-a_{22}^{(1)}\Big)z_{21}^{(1)}(\tau)-a_{21}^{(1)}z_{11}^{(1)}(\tau)+p_{21}^{(2)}(\tau), \tag{42}$$

$$m_{22}(\tau)=\Big(p_{22}^{(1)}(\tau)-a_{22}^{(1)}\Big)z_{22}^{(1)}(\tau)+p_{12}^{(1)}(\tau)\,z_{21}^{(1)}(\tau)-a_{21}^{(1)}z_{12}^{(1)}(\tau)+p_{22}^{(2)}(\tau), \tag{43}$$

причём $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ — элементы матрицы A_1, а $z_{\sigma\nu}^{(1)}(t)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ — элементы матрицы $z_1(t)$, определяемые соответственно формулами (26), (32), (33) и (35) — (37).

Используя равенства (23) и (38), находим

$$z_2(t)=\left\|\begin{matrix}\displaystyle\int_0^t m_{11}(\tau)\,d\tau-a_{11}^{(2)}t, & \displaystyle e^{-2\beta it}\int_0^t\Big(m_{12}(\tau)-a_{12}^{(2)}\Big)e^{2\beta i\tau}\,d\tau\\ \displaystyle e^{2\beta it}\int_0^t\Big(m_{21}(\tau)-a_{21}^{(2)}\Big)e^{-2\beta i\tau}\,d\tau, & \displaystyle\int_0^t m_{22}(\tau)\,d\tau-a_{22}^{(2)}t\end{matrix}\right\|, \tag{44}$$

откуда, подчиняя $z_2(t)$ условию периодичности, определяем элементы матрицы A_2:

$$a_{\sigma\sigma}^{(2)}=\int_0^1 m_{\sigma\sigma}(t)\,dt \qquad (\sigma=1,\ 2), \tag{45}$$

$$a_{12}^{(2)}=\frac{2\beta i}{e^{2\beta i}-1}\int_0^1 m_{12}(t)\,e^{2\beta it}\,dt, \tag{46}$$

$$a_{21}^{(2)}=\frac{2\beta i}{1-e^{-2\beta i}}\int_0^1 m_{21}(t)\,e^{-2\beta it}\,dt. \tag{47}$$

При этом

$$z_2(t)=\left\|\varphi_{\sigma\nu}^{(2)}(t)\right\| \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{48}$$

где

$$\varphi_{\sigma\sigma}^{(2)}(t)=\int_0^t m_{\sigma\sigma}(\tau)\,d\tau-t\int_0^1 m_{\sigma\sigma}(t)\,dt \qquad (\sigma=1,\ 2), \tag{49}$$

$$\varphi_{12}^{(2)}(t)=e^{-2\beta it}\left[\int_0^t m_{12}(\tau)\,e^{2\beta i\tau}\,d\tau-\frac{e^{2\beta it}-1}{e^{2\beta i}-1}\int_0^1 m_{12}(t)\,e^{2\beta it}\,dt\right], \tag{50}$$

$$\varphi_{21}^{(2)}(t)=e^{2\beta it}\left[\int_0^t m_{21}(\tau)\,e^{-2\beta it}\,d\tau-\frac{1-e^{-2\beta it}}{1-e^{-2\beta i}}\int_0^1 m_{21}(t)\,e^{-2\beta it}\,dt\right], \tag{51}$$

и, очевидно, $z_2(0)=z_2(1)=0,\ z_2(t+1)=z_2(t)$.

Принимая во внимание равенства (9), (14) и (22), имеем

$$A(\mu)=\left\|\begin{matrix} \alpha+\beta i+a_{11}^{(1)}\mu+a_{11}^{(2)}\mu^2+\ldots, & a_{12}^{(1)}\mu+a_{12}^{(2)}\mu^2+\ldots \\ a_{21}^{(1)}\mu+a_{21}^{(2)}\mu^2+\ldots, & \alpha-\beta i+a_{22}^{(1)}\mu+a_{22}^{(2)}\mu^2+\ldots \end{matrix}\right\|, \tag{52}$$

где коэффициенты $a_{\sigma\nu}^{(k)}$ $(k,\ \sigma,\ \nu=1,\ 2)$ даны соответственно формулами (26), (32), (33) и (45) — (47).

Дискриминант характеристического уравнения (20) матрицы (52)

$$\Delta(\mu)=-\beta^2+\beta i\left(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}\right)\mu+\left[\frac{1}{4}\left(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}\right)^2-D(A_1)+\right.$$
$$\left.+\beta i\left(a_{11}^{(2)}-a_{22}^{(2)}\right)\right]\mu^2+\ldots \tag{53}$$

обладает свойством

$$\Delta(0)=-\beta^2\neq 0. \tag{54}$$

Следовательно, характеристические числа этой матрицы при достаточно малых μ разлагаются по **целым** степеням μ.

Учитывая выше введенные обозначения, получаем

$$\lambda_1(\mu)=\alpha+\beta i+\left(\int_0^1 p_{11}^{(1)}(t)\,dt\right)\mu+\left(a_{11}^{(2)}-\frac{i}{2\beta}a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}\right)\mu^2+o_+(\mu^2), \tag{55}$$

$$\lambda_2(\mu)=\alpha-\beta i+\left(\int_0^1 p_{22}^{(1)}(t)\,dt\right)\mu+\left(a_{22}^{(2)}+\frac{i}{2\beta}a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}\right)\mu^2+o_-(\mu^2), \tag{56}$$

причём

$$a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}=\frac{\beta^2}{\sin^2\beta}\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,e^{2\beta it}\,dt\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,e^{-2\beta it}\,dt, \tag{57}$$

$$a_{11}^{(2)} = \int_0^1 \left[\left(p_{11}^{(1)}(t) - \int_0^1 p_{11}^{(1)}(t)\,dt \right) \varphi_{11}^{(1)}(t) + p_{21}^{(1)}(t)\,\varphi_{12}^{(1)}(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\beta i \varphi_{21}^{(1)}(t)}{1 - e^{2\beta i}} \int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\, e^{2\beta i t}\,dt + p_{11}^{(2)}(t) \right] dt, \tag{58}$$

$$a_{22}^{(2)} = \int_0^1 \left[\left(p_{22}^{(1)}(t) - \int_0^1 p_{22}^{(1)}(t)\,dt \right) \varphi_{22}^{(1)}(t) + p_{12}^{(1)}(t)\,\varphi_{21}^{(1)}(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\beta i \varphi_{12}^{(1)}(t)}{e^{-2\beta i} - 1} \int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\, e^{-2\beta i t}\,dt + p_{22}^{(2)}(t) \right] dt, \tag{59}$$

а $o_+(\mu^2)$ и $o_-(\mu^2)$ — бесконечно малые порядка выше второго по сравнению с μ при $\mu \to 0$.

§ 3. Характеристические числа матрицы P_0 кратные

Рассмотрим два случая, подлежащие исследованию.

1. Пусть в системе (5)

$$P_0 = \left\| \begin{matrix} \xi, & 0 \\ 0, & \xi \end{matrix} \right\| \qquad (\xi \neq 0). \tag{60}$$

Тогда, согласно (14),

$$\exp(\pm A_0 t) = \exp(\pm P_0 t) = \exp(\pm \xi t), \tag{61}$$

и, следовательно, из формулы (18) находим

$$z_1(t) = \int_0^t P_1(\tau)\,d\tau - A_1 t. \tag{62}$$

Чтобы матрица $z_1(t)$ была периодической с периодом $\omega = 1$, необходимо A_1 определить так:

$$A_1 = \int_0^1 P_1(t)\,dt = \left\| \int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt \right\| \qquad (\sigma,\ \nu = 1,\ 2). \tag{63}$$

При таком выборе A_1 имеем

$$z_1(t) = \Phi_1(t) = \| \varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t) \| \qquad (\sigma,\ \nu = 1,\ 2), \tag{64}$$

причём матрицы A_1, $P_1(t)$ и $\Phi_1(t)$ обладают свойством

$$\int_0 P_1(\tau)\,d\tau = A_1 t + \Phi_1(t) \tag{65}$$

и, кроме того, $\Phi_1(t)$ — матрица непрерывная и периодическая с периодом $\omega = 1$.

Используя (19), (61), (63), (64) и подчиняя $z_2(t)$ условию периодичности, находим элементы матрицы A_2:

$$a_{11}^{(2)}=\int_0^1\left[\left(p_{11}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{11}^{(1)}(t)\,dt\right)\varphi_{11}^{(1)}(t)+p_{21}^{(1)}(t)\,\varphi_{12}^{(1)}(t)-\right.$$
$$\left.-\varphi_{21}^{(1)}(t)\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt+p_{11}^{(2)}(t)\right]dt, \qquad (66)$$

$$a_{12}^{(2)}=\int_0^1\left[p_{12}^{(1)}(t)\,\varphi_{11}^{(1)}(t)+\left(p_{22}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{11}^{(1)}(t)\,dt\right)\varphi_{12}^{(1)}(t)-\right.$$
$$\left.-\varphi_{22}^{(1)}(t)\int_0^1 p_{12}^{(1)}(t)\,dt+p_{12}^{(2)}(t)\right]dt, \qquad (67)$$

$$a_{21}^{(2)}=\int_0^1\left[p_{21}^{(1)}(t)\,\varphi_{22}^{(1)}(t)+\left(p_{11}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{22}^{(1)}(t)\,dt\right)\varphi_{21}^{(1)}(t)-\right.$$
$$\left.-\varphi_{11}^{(1)}(t)\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt+p_{21}^{(2)}(t)\right]dt, \qquad (68)$$

$$a_{22}^{(2)}=\int_0^1\left[\left(p_{22}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{22}^{(1)}(t)\,dt\right)\varphi_{22}^{(1)}(t)+p_{12}^{(1)}(t)\,\varphi_{21}^{(1)}(t)-\right.$$
$$\left.-\varphi_{12}^{(1)}(t)\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt+p_{22}^{(2)}(t)\right]dt. \qquad (69)$$

В данном случае

$$A(\mu)=\left\|\begin{matrix}\xi+a_{11}^{(1)}\mu+a_{11}^{(2)}\mu^2+\ldots, & a_{12}^{(1)}\mu+a_{12}^{(2)}\mu^2+\ldots\\ a_{21}^{(1)}\mu+a_{21}^{(2)}\mu^2+\ldots, & \xi+a_{22}^{(1)}\mu+a_{22}^{(2)}\mu^2+\ldots\end{matrix}\right\|, \qquad (70)$$

и, согласно введеннным обозначениям, нетрудно убедиться, что дискриминант характеристического уравнения (20) этой матрицы представляется степенным рядом

$$\Delta(\mu)=\left[\left(\frac{1}{2}\int_0^1\sigma\left(P_1(t)\right)dt\right)^2-D\left(\int_0^1 P_1(t)\,dt\right)\right]\mu^2+\ldots\quad\left(\Delta(0)=0\right). \qquad (71)$$

Следовательно, если имеет место условие

$$\Delta''(0)=2\left[\left(\frac{1}{2}\int_0^1\sigma\left(P_1(t)\right)dt\right)^2-D\left(\int_0^1 P_1(t)\,dt\right)\right]\neq 0, \qquad (72)$$

то характеристические числа матрицы (70) при достаточно малых μ разлагаются по целым степеням μ:

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\xi+\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \sigma\left(P_1(t)\right)dt \pm \right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \sigma\left(P_1(t)\right)dt\right)^2-D\left(\int_0^1 P_1(t)\,dt\right)}\right]\mu+o_{\pm}(\mu), \qquad (73)$$

где σ и D — знаки следа и определителя соответственно, а $o_{\pm}(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$.

2. Предположим, наконец, что в системе (5)

$$P_0=\begin{Vmatrix} \xi, & 1 \\ 0, & \xi \end{Vmatrix} \qquad (\xi\neq 0). \qquad (74)$$

Тогда, учитывая (14) и [3, стр. 21], имеем

$$\exp(\pm A_0 t)=\exp(\pm P_0 t)=\exp(\pm \xi t)\begin{Vmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (75)$$

Таким образом, согласно (18) и (75), найдем

$$z_1(t)=\begin{Vmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}\left(\int_0^t P_1(\tau)\,d\tau-A_1 t\right)\begin{Vmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (76)$$

Чтобы эта матрица была периодической с периодом $\omega=1$, необходимо A_1 определить равенством

$$A_1=\int_0^1 P_1(t)\,dt=\begin{Vmatrix}\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt\end{Vmatrix} \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2). \qquad (77)$$

При таком выборе A_1 получим

$$z_1(t)=\begin{Vmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}\Phi_1(t)\begin{Vmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (78)$$

где $\Phi_1(t)$ — периодическая матрица (64), которая с матрицами A_1 и $P_1(t)$ связана условием (65).

Очевидно, матрицу (78) можно представить в виде

$$z_1(t)=\begin{Vmatrix} \varphi_{11}^{(1)}(t)+2\varphi_{21}^{(1)}(t), & \varphi_{12}^{(1)}(t)+2\varphi_{11}^{(1)}(t)+4\varphi_{21}^{(1)}(t)+2\varphi_{22}^{(1)}(t) \\ \varphi_{21}^{(1)}(t), & \varphi_{22}^{(1)}(t)+2\varphi_{21}^{(1)}(t) \end{Vmatrix}, \qquad (79)$$

причём $\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ — функции периодические периода $\omega=1$, определяемые при помощи соотношений:

$$\int_0^t p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau=a_{\sigma\nu}^{(1)}t+\varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t) \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \qquad a_{\sigma\nu}^{(1)}=\int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt. \qquad (80)$$

Принимая во внимание (75), из формулы (19) получаем

$$z_2(t)=\begin{Vmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}\left(\int_0^t M(\tau)\,d\tau-A_2 t\right)\begin{Vmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (81)$$

Здесь элементы $m_{\sigma\nu}(\tau)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ периодической матрицы $M(\tau)$ имеют вид (40)—(43), где величины $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ и периодические функции $z_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ определяются соответственно из (77) и (79).

Подчиняя $z_2(t)$ условию периодичности, из формулы (81) находим

$$A_2=\int_0^1 M(t)\,dt=\left\| \int_0^1 m_{\sigma\nu}(t)\,dt \right\| \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2). \tag{82}$$

При этом

$$z_2(t)=\left\| \begin{matrix} \varphi_{11}^{(2)}+2\varphi_{21}^{(2)}(t), & 2\varphi_{11}^{(2)}(t)+\varphi_{12}^{(2)}(t)+4\varphi_{21}^{(2)}(t)+2\varphi_{22}^{(2)}(t) \\ \varphi_{21}^{(2)}(t), & \varphi_{22}^{(2)}(t)+2\varphi_{21}^{(2)}(t) \end{matrix} \right\|, \tag{83}$$

а $\varphi_{\sigma\nu}^{(2)}(t)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ — функции периодические периода $\omega=1$, входящие в соотношения:

$$\int_0^t m_{\sigma\nu}(\tau)\,d\tau=a_{\sigma\nu}^{(2)}t+\varphi_{\sigma\nu}^{(2)}(t) \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \qquad a_{\sigma\nu}^{(2)}=\int_0^1 m_{\sigma\nu}(t)\,dt. \tag{84}$$

Согласно (9), (14), (74), (77) и (82), в данном случае

$$A(\mu)=\left\| \begin{matrix} \xi+a_{11}^{(1)}\mu+a_{11}^{(2)}\mu^2+\ldots, & 1+a_{12}^{(1)}\mu+a_{12}^{(2)}\mu^2+\ldots \\ a_{21}^{(1)}\mu+a_{21}^{(2)}\mu^2+\ldots, & \xi+a_{22}^{(1)}\mu+a_{22}^{(2)}\mu^2+\ldots \end{matrix} \right\|, \tag{85}$$

откуда дискриминант

$$\Delta(\mu)=a_{21}^{(1)}\mu+\left[\frac{1}{4}\left(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}\right)^2+a_{21}^{(2)}-D(A_1)\right]\mu^2+\ldots \qquad \left(\Delta(0)=0\right). \tag{86}$$

Допустим, что

$$\Delta'(0)=a_{21}^{(1)}=\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt\neq 0. \tag{87}$$

Тогда характеристические числа матрицы (85) при малых μ разлагаются по степеням $\mu^{\frac{1}{2}}$, причём, принимая во внимание введенные обозначения,

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\xi\pm\sqrt{\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt}\,\mu^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \sigma\left(P_1(t)\right)dt\right)\mu\pm$$

$$\pm\frac{\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \sigma\left(P_1(t)\right)dt\right)^2+a_{21}^{(2)}-D\left(\int_0^1 P_1(t)\,dt\right)}{2\sqrt{\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt}}\mu^{\frac{3}{2}}+o_{\pm}\left(\mu^{\frac{3}{2}}\right), \tag{88}$$

где

$$a_{21}^{(2)}=\int_0^1\left[\left(p_{11}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{22}^{(1)}(t)\,dt\right)\varphi_{21}^{(1)}(t)+2\left(p_{21}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt\right)\varphi_{21}^{(1)}(t)+\right.$$

$$\left.+p_{21}^{(1)}(t)\,\varphi_{22}^{(1)}(t)-\varphi_{11}^{(1)}(t)\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt+p_{21}^{(2)}(t)\right]dt \tag{89}$$

и $o_{\pm}\left(\mu^{\frac{3}{2}}\right)\to 0$ при $\mu\to 0$.

Предположим теперь, что

$$\Delta'(0)=a_{21}^{(1)}=\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt=0 \tag{90}$$

и, кроме того,

$$\Delta''(0)=2\left[\frac{1}{4}\left(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}\right)^2+a_{21}^{(2)}\right]\neq 0. \tag{91}$$

В этом случае $\lambda_{1,2}(\mu)$ разлагаются по **целым** степеням μ и эти разложения имеют вид:

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\xi+\frac{1}{2}\left[\int_0^1 \sigma\left(P_1(t)\right)dt\pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left(\int_0^1 p_{11}^{(1)}(t)\,dt-\int_0^1 p_{22}^{(1)}(t)\,dt\right)^2+4a_{21}^{(2)}}\right]\mu+o_{\pm}(\mu). \tag{92}$$

Здесь, учитывая (89) и (90),

$$a_{21}^{(2)}=\int_0^1\left[\left(p_{11}^{(1)}(t)+2p_{21}^{(1)}(t)-\int_0^1 p_{22}^{(1)}(t)\,dt\right)\varphi_{21}^{(1)}(t)+p_{21}^{(1)}(t)\,\varphi_{22}^{(1)}(t)+p_{21}^{(2)}(t)\right]dt, \tag{93}$$

а $o_{\pm}(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$.

§ 4. Матрица P_0 имеет нулевые характеристические числа с непростым элементарным делителем

Предположим, что в системе (5) постоянная матрица P_0 имеет вид

$$P_0=\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}. \tag{94}$$

Тогда, принимая во внимание (14) и [3, стр. 21], имеем

$$\exp(\pm A_0 t)=\begin{Vmatrix} 1, & \pm t \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}, \tag{95}$$

и, следовательно, из (18) получаем

$$z_1(t)=\begin{Vmatrix} r_{11}(t)-tr_{21}(t), & r_{12}(t)+t\left(r_{11}(t)-r_{22}(t)\right)-t^2r_{21}(t) \\ r_{21}(t), & r_{22}(t)+tr_{21}(t) \end{Vmatrix}, \tag{96}$$

где

$$r_{11}(t)=\int_0^t p_{11}^{(1)}(\tau)\,d\tau+\int_0^t \tau p_{21}^{(1)}(\tau)\,d\tau-a_{11}^{(1)}t-\frac{1}{2}a_{21}^{(1)}t^2, \tag{97}$$

$$r_{22}(t)=\int_0^t p_{22}^{(1)}(\tau)\,d\tau-\int_0^t \tau p_{21}^{(1)}(\tau)\,d\tau-a_{22}^{(1)}t+\frac{1}{2}a_{21}^{(1)}t^2, \tag{98}$$

$$r_{21}(t)=\int_0^t p_{21}^{(1)}(\tau)\,d\tau-a_{21}^{(1)}t, \tag{99}$$

$$r_{12}(t)=\int_0^t p_{12}^{(1)}(\tau)\,d\tau+\int_0^t \tau\left(p_{22}^{(1)}(\tau)-p_{11}^{(1)}(\tau)\right)d\tau-\int_0^t \tau^2 p_{21}^{(1)}(\tau)\,d\tau-a_{12}^{(1)}t+$$

$$+\frac{1}{2}\left(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}\right)t^2+\frac{1}{3}a_{21}^{(1)}t^3. \tag{100}$$

В силу очевидных соотношений:

$$\int_0 \tau p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau=t\int_0 p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau-\int_0^t\int_0^\tau p_{\sigma\nu}^{(1)}(u)\,du\,d\tau, \tag{101}$$

$$\int_0^t \tau^2 p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau=t^2\int_0^t p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau-2t\int_0^t\int_0^\tau p_{\sigma\nu}^{(1)}(u)\,du\,d\tau+$$

$$+2\int_0^t\int_0^\tau\int_0^u p_{\sigma\nu}^{(1)}(v)\,dv\,du\,d\tau \tag{102}$$

элементы матрицы (96) можно представить в виде:

$$z_{11}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{11}^{(1)}(\tau)\,d\tau-\int_0^t\int_0^\tau p_{21}^{(1)}(u)\,du\,d\tau-a_{11}^{(1)}t+\frac{1}{2}a_{21}^{(1)}t^2, \tag{103}$$

$$z_{22}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{22}^{(1)}(\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_0^\tau p_{21}^{(1)}(u)\,du\,d\tau-a_{22}^{(1)}t-\frac{1}{2}a_{21}^{(1)}t^2, \tag{104}$$

$$z_{21}^{(1)}(t)=\int_0^t p_{21}^{(1)}(\tau)\,d\tau-a_{21}^{(1)}t, \tag{105}$$

$$z_{12}^{(1)}(t)=\int_0 p_{12}^{(1)}(\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_0^\tau\left(p_{11}^{(1)}(u)-p_{22}^{(1)}(u)\right)du\,d\tau-$$

$$-2\int_0^t\int_0^\tau\int_0^u p_{21}^{(1)}(v)\,dv\,du\,d\tau-a_{12}^{(1)}t+\frac{1}{2}\left(a_{22}^{(1)}-a_{11}^{(1)}\right)t^2+\frac{1}{2}a_{21}^{(1)}t^3. \tag{106}$$

Так как $p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)$ $(\sigma,\ \nu=1,\ 2)$ — функции периодические с периодом $\omega=1$, то

$$\int_0^t p_{\sigma\nu}^{(1)}(\tau)\,d\tau=\alpha_{\sigma\nu}^{(1)}t+\varphi_{\sigma\nu}^{(2)}(t) \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{107}$$

$$\int_0^t\int_0^\tau p_{\sigma\nu}^{(1)}(u)\,du\,d\tau=\frac{1}{2}\alpha_{\sigma\nu}^{(1)}t^2+\alpha_{\sigma\nu}^{(2)}t+\varphi_{\sigma\nu}^{(2)}(t) \qquad (\sigma,\ \nu=1,\ 2), \tag{108}$$

$$\int_0^t\int_0^\tau\int_0^u p_{21}^{(1)}(v)\,dv\,du\,d\tau=\frac{1}{6}\alpha_{21}^{(1)}t^3+\frac{1}{2}\alpha_{21}^{(2)}t^2+\alpha_{21}^{(3)}t+\varphi_{21}^{(3)}(t), \tag{109}$$

где

$$\alpha_{\sigma\nu}^{(1)} = \int_0^1 p_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt, \tag{110}$$

$$\alpha_{\sigma\nu}^{(2)} = \int_0^1 \varphi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt, \tag{111}$$

$$\alpha_{21}^{(3)} = \int_0^1 \varphi_{21}^{(2)}(t)\,dt, \tag{112}$$

причём $\varphi_{\sigma\nu}^{(k)}(t)$ $(\sigma,\ \nu = 1,\ 2;\ k = 1,\ 2,\ 3)$ — функции непрерывные и периодические с периодом $\omega = 1$, обладающие свойством $\varphi_{\sigma\nu}^{(k)}(0) = \varphi_{\sigma\nu}^{(k)}(1) = 0$.

Учитывая (107) — (109), из (103) — (106) соответственно получаем:

$$z_{11}^{(1)}(t) = \left(\alpha_{11}^{(1)} - \alpha_{21}^{(2)} - a_{11}^{(1)}\right)t + \frac{1}{2}\left(a_{21}^{(1)} - \alpha_{11}^{(1)}\right)t^2 + \varphi_{11}^{(1)}(t) - \varphi_{21}^{(2)}(t), \tag{113}$$

$$z_{22}^{(1)}(t) = \left(\alpha_{22}^{(1)} + \alpha_{21}^{(2)} - a_{22}^{(1)}\right)t + \frac{1}{2}\left(\alpha_{21}^{(1)} - a_{21}^{(1)}\right)t^2 + \varphi_{22}^{(1)}(t) + \varphi_{21}^{(2)}(t), \tag{114}$$

$$z_{21}^{(1)}(t) = \left(\alpha_{21}^{(1)} - a_{21}^{(1)}\right)t + \varphi_{21}^{(1)}(t), \tag{115}$$

$$z_{12}^{(1)}(t) = \left(\alpha_{12}^{(1)} + \alpha_{11}^{(2)} - \alpha_{22}^{(2)} - 2\alpha_{21}^{(3)} - a_{12}^{(1)}\right)t + \frac{1}{2}\left(\alpha_{11}^{(1)} - \alpha_{22}^{(1)} - 2\alpha_{21}^{(2)} - a_{11}^{(1)} +\right.$$

$$\left. + a_{22}^{(1)}\right)t^2 + \frac{1}{3}\left(a_{21}^{(1)} - \alpha_{21}^{(1)}\right)t^3 + \varphi_{12}^{(1)}(t) + \varphi_{11}^{(2)}(t) - \varphi_{22}^{(2)}(t) - 2\varphi_{21}^{(3)}(t). \tag{116}$$

Подчиняя $z_{\sigma\nu}^{(1)}(t)$ $(\sigma,\ \nu = 1,\ 2)$ условию периодичности, определяем элементы матрицы A_1:

$$a_{11}^{(1)} = \int_0^1 \left(p_{11}^{(1)}(t) - \varphi_{21}^{(1)}(t)\right)dt, \tag{117}$$

$$a_{22}^{(1)} = \int_0^1 \left(p_{22}^{(1)}(t) + \varphi_{21}^{(1)}(t)\right)dt, \tag{118}$$

$$a_{21}^{(1)} = \int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt, \tag{119}$$

$$a_{12}^{(1)} = \int_0^1 \left(p_{12}^{(1)}(t) + \varphi_{11}^{(1)}(t) - \varphi_{22}^{(1)}(t) - 2\varphi_{21}^{(2)}(t)\right)dt. \tag{120}$$

При этом матрица $z_1(t)$ имеет вид

$$z_1(t) = \begin{Vmatrix} \varphi_{11}^{(1)}(t) - \varphi_{21}^{(2)}(t), & \varphi_{12}^{(1)}(t) + \varphi_{11}^{(2)}(t) - \varphi_{22}^{(2)}(t) - 2\varphi_{21}^{(3)}(t) \\ \varphi_{21}^{(1)}(t), & \varphi_{22}^{(1)}(t) + \varphi_{21}^{(2)}(t) \end{Vmatrix} \tag{121}$$

и, очевидно, является периодической с периодом $\omega = 1$.

В данном случае

$$A(\mu)=\begin{Vmatrix} a_{11}^{(1)}\mu+\ldots, & 1+a_{12}^{(1)}\mu+\ldots \\ a_{21}^{(1)}\mu+\ldots, & a_{22}^{(1)}\mu+\ldots \end{Vmatrix}, \tag{122}$$

откуда

$$\Delta(\mu)=a_{21}^{(1)}\mu+\ldots \qquad \left(\Delta(0)=0\right). \tag{123}$$

Допустим, что

$$\Delta'(0)=a_{21}^{(1)}=\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt\neq 0. \tag{124}$$

В этом случае характеристические числа матрицы (122) в окрестности начала координат разлагаются по степеням $\mu^{\frac{1}{2}}$ и эти разложения имеют вид

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\pm\sqrt{\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt}\,\mu^{\frac{1}{2}}+o_{\pm}(\mu^{\frac{1}{2}}). \tag{125}$$

Предположим теперь, что

$$\Delta'(0)=a_{21}^{(1)}=\int_0^1 p_{21}^{(1)}(t)\,dt=0. \tag{126}$$

На основании (38), (39), (95) и (126) матрицу $z_2(t)$ получаем в виде (96), причём

$$r_{11}(t)=\int_0^t m_{11}(\tau)\,d\tau+\int_0^t \tau m_{21}(\tau)\,d\tau-a_{11}^{(2)}t-\frac{1}{2}a_{21}^{(2)}t^2, \tag{127}$$

$$r_{22}(t)=\int_0^t m_{22}(\tau)\,d\tau-\int_0^t \tau m_{21}(\tau)\,d\tau-a_{22}^{(2)}t+\frac{1}{2}a_{21}^{(2)}t^2, \tag{128}$$

$$r_{21}(t)=\int_0^t m_{21}(\tau)\,d\tau-a_{21}^{(2)}t, \tag{129}$$

$$r_{12}(t)=\int_0^t m_{12}(\tau)\,d\tau+\int_0^t \tau\left(m_{22}(\tau)-m_{11}(\tau)\right)d\tau-\int_0^t \tau^2 m_{21}(\tau)\,d\tau-a_{12}^{(2)}t+$$
$$+\frac{1}{2}\left(a_{11}^{(2)}-a_{22}^{(2)}\right)t^2+\frac{1}{3}a_{21}^{(2)}t^3 \tag{130}$$

и, согласно (40) — (43), (126), имеем

$$m_{11}(\tau)=\left(p_{11}^{(1)}(\tau)-a_{11}^{(1)}\right)z_{11}^{(1)}(\tau)+p_{21}^{(1)}(\tau)\,z_{12}^{(1)}(\tau)-a_{12}^{(1)}z_{21}^{(1)}(\tau)+p_{11}^{(2)}(\tau), \tag{131}$$

$$m_{12}(\tau)=p_{12}^{(1)}(\tau)\,z_{11}^{(1)}(\tau)+\left(p_{22}^{(1)}(\tau)-a_{11}^{(1)}\right)z_{12}^{(1)}(\tau)-a_{12}^{(1)}z_{22}^{(1)}(\tau)+p_{12}^{(2)}(\tau), \tag{132}$$

$$m_{21}(\tau)=p_{21}^{(1)}(\tau)\,z_{22}^{(1)}(\tau)+\left(p_{11}^{(1)}(\tau)-a_{22}^{(1)}\right)z_{21}^{(1)}(\tau)+p_{21}^{(2)}(\tau), \tag{133}$$

$$m_{22}(\tau)=\left(p_{22}^{(1)}(\tau)-a_{22}^{(1)}\right)z_{22}^{(1)}(\tau)+p_{12}^{(1)}(\tau)\,z_{21}^{(1)}(\tau)+p_{22}^{(2)}(\tau). \tag{134}$$

Здесь элементы $a_{\sigma\nu}^{(1)}$ $(\sigma, \nu=1, 2)$ и $z_{\sigma\nu}^{(1)}$ $(\sigma, \nu=1, 2)$ определяются соответственно формулами (117)—(120) и (121).

С помощью рассуждения, подобному тому, которым мы воспользовались вычисляя A_1, нетрудно убедиться в том, что в данном случае $a_{\sigma\nu}^{(2)}$ $(\sigma, \nu=1, 2)$ имеют вид:

$$a_{11}^{(2)}=\beta_{11}^{(1)}-\beta_{21}^{(2)}, \tag{135}$$

$$a_{22}^{(2)}=\beta_{22}^{(1)}+\beta_{21}^{(2)}, \tag{136}$$

$$a_{21}^{(2)}=\beta_{21}^{(1)}, \tag{137}$$

$$a_{12}^{(2)}=\beta_{12}^{(1)}+\beta_{11}^{(2)}-\beta_{22}^{(2)}-2\beta_{21}^{(3)}. \tag{138}$$

Постоянные величины $\beta_{\sigma\nu}^{(k)}$ $(\sigma, \nu=1, 2;\ k=1, 2, 3)$, определяемые формулами:

$$\beta_{\sigma\nu}^{(1)}=\int_0^1 m_{\sigma\nu}(t)\,dt \qquad (\sigma, \nu=1, 2), \tag{139}$$

$$\beta_{\sigma\nu}^{(2)}=\int_0^1 \psi_{\sigma\nu}^{(1)}(t)\,dt \qquad (\sigma, \nu=1, 2), \tag{140}$$

$$\beta_{21}^{(3)}=\int_0^1 \psi_{21}^{(2)}(t)\,dt, \tag{141}$$

связаны соотношениями:

$$\int_0^t m_{\sigma\nu}(\tau)\,d\tau=\beta_{\sigma\nu}^{(1)}t+\psi_{\sigma\nu}^{(1)}(t) \qquad (\sigma, \nu=1, 2), \tag{142}$$

$$\int_0^t\int_0^\tau m_{\sigma\nu}(u)\,du\,d\tau=\frac{1}{2}\beta_{\sigma\nu}^{(1)}t^2+\beta_{\sigma\nu}^{(2)}t+\psi_{\sigma\nu}^{(2)}(t) \qquad (\sigma, \nu=1, 2), \tag{143}$$

$$\int_0^t\int_0^\tau\int_0^u m_{21}(v)\,dv\,du\,d\tau=\frac{1}{6}\beta_{21}^{(1)}t^3+\frac{1}{2}\beta_{21}^{(2)}t^2+\beta_{21}^{(3)}t+\psi_{21}^{(3)}(t), \tag{144}$$

где $\psi_{\sigma\nu}^{(k)}(t)$ $(\sigma, \nu=1, 2;\ k=1, 2, 3)$ — функции периодические с периодом $\omega=1$, удовлетворяющие условию $\psi_{\sigma\nu}^{(k)}(0)=\psi_{\sigma\nu}^{(k)}(1)=0$.

Тогда

$$z_2(t)=\begin{Vmatrix} \psi_{11}^{(1)}(t)-\psi_{21}^{(2)}(t), & \psi_{12}^{(1)}(t)+\psi_{11}^{(2)}(t)-\psi_{22}^{(2)}(t)-2\psi_{21}^{(3)}(t) \\ \psi_{21}^{(1)}(t), & \psi_{22}^{(1)}+\psi_{21}^{(2)}(t) \end{Vmatrix} \tag{145}$$

и, очевидно, $z_2(0)=z_2(1)=0$, $z_2(t+1)=z_2(t)$.

В рассматриваемом случае

$$A(\mu)=\begin{Vmatrix} a_{11}^{(1)}\mu+a_{11}^{(2)}\mu^2+\dots, & 1+a_{12}^{(1)}\mu+a_{12}^{(2)}\mu^2+\dots \\ a_{21}^{(2)}\mu^2+\dots, & a_{22}^{(1)}\mu+a_{22}^{(2)}\mu^2+\dots \end{Vmatrix}, \tag{146}$$

откуда дискриминант

$$\Delta(\mu)=\frac{1}{4}\left[\left(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}\right)^2+4a_{21}^{(2)}\right]\mu^2+\ldots \qquad \left(\Delta(0)=0\right). \tag{147}$$

Кроме условия (126), предположим

$$\Delta''(0)=\frac{1}{2}\left[\left(a_{11}^{(1)}-a_{21}^{(1)}\right)^2+4a_{21}^{(2)}\right]\neq 0. \tag{148}$$

Тогда характеристические числа матрицы (146) в окресности начала координат разлагаются по **целым** степеням μ:

$$\lambda_{1,2}(\mu)=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 \sigma\left(P_1(t)\right)dt\pm\sqrt{\left(a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}\right)^2+4a_{21}^{(2)}}\right]\mu+o_{\pm}(\mu), \tag{149}$$

где

$$a_{11}^{(1)}-a_{22}^{(1)}=\int_0^1\left(p_{11}^{(1)}(t)-p_{22}^{(1)}(t)-2\varphi_{21}^{(1)}(t)\right)dt, \tag{150}$$

$$a_{21}^{(2)}=\int_0^1\left\{\left[p_{11}^{(1)}(t)-\int_0^1\left(p_{22}^{(1)}(t)+\varphi_{21}^{(1)}(t)\right)dt\right]\varphi_{21}^{(1)}(t)+\right.$$

$$\left.+p_{21}^{(1)}(t)\left(\varphi_{22}^{(1)}(t)+\varphi_{21}^{(2)}(t)\right)+p_{21}^{(2)}(t)\right\}dt. \tag{151}$$

Согласно предыдущему, вещественные части разложений (55), (56), (73), (88), (92), (125) и (149) являются соответственно характеристическими показателями системы (5), следовательно, и системы (1).

В заключение рассмотрим уравнение [4, стр. 220]

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\mu p_1(t)+\mu^2p_2(t)+\ldots\right)x. \tag{152}$$

Здесь $p_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots)$ — непрерывные периодические функции периода $\omega=1$, а ряд сходится при $|\mu|<r$.

Запишем уравнение (152) в виде системы

$$\begin{cases} x_1'=0\cdot x_1+\left(\mu p_1(t)+\mu^2p_2(t)+\ldots\right)x_2,\\ x_2'=1\cdot x_1+0\cdot x_2,\end{cases}$$

где $x_2=x$, $x_1=x'$. Записывая эту систему в матричной форме, получим

$$\frac{dX}{dt}=X\begin{Vmatrix} 0, & 0\\ \mu p_1(t)+\mu^2p_2(t)+\ldots, & 0\end{Vmatrix}. \tag{153}$$

Отсюда видно, что уравнение (152) эквивалентно системе (5), причём

$$P_0=A_0=\begin{Vmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{Vmatrix},\quad P_k(t)=\begin{Vmatrix}0, & 0\\ p_k(t), & 0\end{Vmatrix}\qquad (k=1, 2, \ldots);$$

$$p_{11}^{(k)}(t)=p_{12}^{(k)}(t)=p_{22}^{(k)}(t)=0,\qquad p_{21}^{(k)}(t)=p_k(t)\qquad (k=1, 2, \ldots)$$

и, согласно (119),

$$a_{21}^{(1)}=\int_0^1 p_1(t)\,dt. \tag{154}$$

Сначала допустим, что для функции $p_1(t)$ уравнения (152) выполняется условие (124), т.е.

$$\Delta'(0) = \int_0^1 p_1(t)\,dt \neq 0. \tag{155}$$

Тогда из формулы (125) следует:

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \pm \sqrt{\int_0^1 p_1(t)\,dt}\;\mu^{\frac{1}{2}} + o_{\pm}(\mu^{\frac{1}{2}}). \tag{156}$$

Пусть теперь условие (124) не имеет места и, кроме того, дискриминант $\Delta(\mu)$ обладает свойством (148)

$$\Delta''(0) = 2\int_0^1 \left(p_1(t)\,\varphi_{21}^{(2)}(t) + p_2(t)\right) dt \neq 0, \tag{157}$$

где непрерывная периодическая функция $\varphi_{21}^{(2)}(t)$, имеющая период $\omega = 1$, определяется при помощи соотношений (103) и (107), т.е.

$$\int_0^t p_1(\tau)\,d\tau = \alpha_{21}^{(1)} t + \varphi_{21}^{(1)}(t), \quad \alpha_{21}^{(1)} = \int_0^1 p_1(t)\,dt;$$

$$\int_0^t \varphi_{21}^{(1)}(\tau)\,d\tau = \alpha_{21}^{(2)} t + \varphi_{21}^{(2)}(t), \quad \alpha_{21}^{(2)} = \int_0^1 \varphi_{21}^{(1)}(t)\,dt.$$

Используя для матрицы $A(\mu)$ второе приближение, получаем, что в данном случае характеристические числа этой матрицы в окрестности начала координат разлагаются по целым степеням μ:

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \pm \left[\int_0^1 \left(p_1(t)\,\varphi_{21}^{(2)}(t) + p_2(t)\right) dt\right]^{\frac{1}{2}} \mu + o_{\pm}(\mu), \tag{158}$$

где $o_{\pm}(\mu)$ — бесконечно малая порядка выше первого по сравнению с μ при $\mu \to 0$.

Следует заметить, что метод определения коэффициентов в разложениях характеристических показателей в ряд по малому параметру даётся и в работе [5], но там нет исследования случаев различения. Кроме того, выше нами предлагаемый способ отыскания характеристических показателей данных систем отличается от приёма, рассматриваемого в [4, стр. 195—213], и является более естественным.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
27. V. 1959 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Еругин. Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1946, 13.
2. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
3. Н. П. Еругин. Метод Лаппо—Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений, изд. Ленинградского у-та, 1956.
4. И. Г. Малкин. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ, 1956.
5. Н. А. Артемьев. Изв. АН СССР, (1944) сер. мат., 8, № 2, 61—100.

DVIEJŲ TIESINIŲ HOMOGENINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS CHARAKTERINGŲJŲ RODIKLIŲ RADIMAS

P. GOLOKVOSČIUS

(Reziumė)

Tiriama lygčių sistema

$$\frac{dX}{dt} = X\left[Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t)\,\mu^k\right], \tag{1}$$

kur antros eilės pastovios matricos Q_0 charakteringieji skaičiai ξ_1 ir ξ_2 patenkina sąlygą

$$\xi_1 - \xi_2 \neq 2\pi mi \qquad (m \text{ — sveikas skaičius});$$

antros eilės matricos $Q_k(t)$ yra tolydinės ir periodinės su periodu $\omega = 1$; μ — skaitinis realus parametras, o eilutė konverguoja intervale $|\mu| < r$; X — sistemos integralinė matrica.

Darbe gauti charakteringosios rodiklinės matricos, įeinančios į sistemos (1) integralinės matricos struktūrą, charakteringų skaičių išdėstymai mažo parametro μ atžvilgiu sveikais ir trupmeniniais laipsniais.

LA RECHERCHE DES EXPOSANTS CARACTÉRISTIQUES POUR LE SYSTÈME DE DEUX ÈQUATIONS HOMOGÉNES DIFFÉRENTIELLES

P. GOLOKVOSČIUS

(Résumé)

Dans cet article nous recherchons des exposants caractéristiques pour le système

$$\frac{dX}{dt} = X\left[Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t)\,\mu_k\right],$$

où Q_0 est une matrice constante, $Q_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ sont des matrices continues de la variable indénpendante t, admettant la période commune $\omega = 1$, X est une matrice intégrale, μ est un petit paramètre et la série est convergente pour $|\mu| < r$.

Supposons que Q_0 et $Q_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ sont les matrices du second degré et que les nombres caractéristiques ξ_1 et ξ_2 de la matrice Q_0 satisfont à la condition

$$\xi_1 - \xi_2 \neq 2\pi mi \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

où m est un nombre entier.